ΣΕΜΦΕ
Μαθηματική Ανάλυση Ι
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 3, ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1. Από τις παρακάτω προτάσεις βρείτε ποιές είναι αληθείς και ποιές είναι ψευδείς δικαιολογώντας την απάντησή σας.

1. Αν η (a_n^2) συγκλίνει τότε και η (a_n) συγκλίνει.
2. Αν $a_n^2 \to 0$ τότε $a_n \to 0$.
3. Αν $\lim_n a_n = 1$ τότε $\lim_n a_n^n = 1$.
4. Αν $0 < a_n < 1$ τότε $a_n^n \to 0$.
5. Αν $1 \leq a_n \leq n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε $\sqrt[n]{a_n} \to 1$.
6. Υπάρχει φραγμένη ακολουθία που δεν συγκλίνει.

Λύση.

1. ΛΑΘΟΣ, πχ. αν $a_n = (-1)^n$ τότε $a_n^2 = 1 \to 1$ αλλά η (a_n) δεν συγκλίνει.
2. ΣΩΣΤΟ, $a_n^2 \to 0 \Rightarrow \sqrt{a_n^2} \to 0 \Rightarrow |a_n| \to 0 \Rightarrow a_n \to 0$.
3. ΛΑΘΟΣ, $a_n = \sqrt[n]{2} \to 1$ ενώ $a_n^n = 2 \to 2$.
4. ΛΑΘΟΣ, $a_n = \sqrt[n]{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}$.
5. ΣΩΣΤΟ, από Θεώρημα ισοσυγκλινουσών και επειδή $\sqrt[n]{n} \to 1$.
6. ΣΩΣΤΟ, $a_n = (-1)^n$.

Άσκηση 2. Βρείτε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών

(α) $\dfrac{na + (-1)^n}{n}$

(β) $\dfrac{\sin n}{n}$

(γ) $\dfrac{\left(2 - \frac{1}{n}\right)^3}{7 - \frac{1}{n}}$

(δ) $\dfrac{3 + (0.5)^n}{5 + 3(0.9)^n}$

(ε) $a_n = \dfrac{4n^2 - n + 2}{n^2 + 7n - 3}$

(ζ) $\lim_n \dfrac{n!}{n^n}$.

Λύση. (α) Έχουμε $a_n = \dfrac{na+(-1)^n}{n} = a + \dfrac{(-1)^n}{n} = a + (-1)^n \dfrac{1}{n} \to a + 0 = a$.
(Η ακολουθία $b_n = \dfrac{(-1)^n}{n} = (-1)^n \dfrac{1}{n} \to 0$ ως γινόμενο φραγμένης επί μηδενική).

(β) $|\sin n| \leq 1$ και $\frac{1}{n} \to 0$. Άρα $\dfrac{\sin n}{n} \to 0$ ως φραγμένη επί μηδενική.

(γ) $\dfrac{\left(2-\frac{1}{n}\right)^3}{7-\frac{1}{n}} \to \dfrac{(2-0)^3}{7-0} = \dfrac{2^3}{7}$

(δ) $\dfrac{3+(0.5)^n}{5+3(0.9)^n} \to \dfrac{3+0}{5+3\cdot 0} = \dfrac{3}{5}$.

(ε) $\dfrac{4n^2-n+2}{n^2+7n-3} = \dfrac{n^2(4-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2})}{n^2(1+\frac{7}{n}-\frac{3}{n^2})} = \dfrac{4-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{7}{n}-\frac{3}{n^2}} \to \dfrac{4}{1} = 4$

(ζ) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1\cdot 2 \dots (n-1)\cdot n}{n \cdot n \dots n \cdot n} = \frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot \dots \cdot \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n} \leq \frac{1}{n}\cdot 1 \cdot 1 \dots 1$$

δηλαδή $0 \leq \dfrac{n!}{n^n} \leq \dfrac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από το Θεώρημα των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών έπεται ότι $\lim\limits_n \dfrac{n!}{n^n} = 0$.

Άσκηση 3. Βρείτε το όριο της ακολουθίας $a_n = \sqrt[n]{a^n+b^n+c^n}$, όπου $0 \leq a \leq b \leq c$.

Λύση. Επειδή $0 \leq a \leq b \leq c$, έχουμε ότι

$$c \leq \sqrt[n]{a^n+b^n+c^n} \leq \sqrt[n]{3}c$$

Επιπλέον, $\sqrt[n]{3} \to 1$ και άρα από το Θεώρημα ισοσυγκλινουσών ακολουθιών, έπεται ότι $\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n} \to c$.

Άσκηση 4. Βρείτε το όριο της ακολουθίας $\sqrt[n]{n^2+n+1}$.

Λύση. Ισχύει ότι $1 \leq n^2+n+1 \leq n^2+n^2+n^2$ και άρα

$$1 \leq \sqrt[n]{n^2+n+1} \leq \sqrt[n]{3n^2}. \tag{1}$$

Επειδή

$$\sqrt[n]{3n^2} = \sqrt[n]{3}\,\sqrt[n]{n^2} = \sqrt[n]{3}\left(\sqrt[n]{n}\right)^2 \to 1\cdot 1^2 = 1, \tag{2}$$

από την (1) και το θεώρημα ισοσυγκλινουσών ακολουθιών έπεται ότι

$$\sqrt[n]{n^2+n+1} \to 1.$$

Άσκηση 5. Έστω $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και έστω ότι $a_n \to a > 0$. Εξετάστε αν υπάρχει το $\lim\limits_n \sqrt[n]{a_n}$.

Λύση. Για $\epsilon = a/2$ επιλέγουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κα΄θε $n \geq n_0$ να έχουμε

$$|a_n - a| < \frac{a}{2} \Leftrightarrow -\frac{a}{2} < a_n < \frac{a}{2} \Leftrightarrow \frac{a}{2} < a_n < \frac{3a}{2}$$

Αλλά τότε για $a_1 = a/2$ και $a_2 = 3a/2$, έχουμε

$$\sqrt[n]{a_1} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{a_2}$$

για κάθε $n \geq n_0$. Επειδή $\sqrt[n]{a_1} \to 1$ και $\sqrt[n]{a_2} \to 1$ από Θεώρημα Ισοσυγκλινουσών έπεται ότι $\sqrt[n]{a_n} \to 1$.

Άσκηση 6. (α) Αν $a_n \to a < 1$ δείξτε ότι για κάθε $\lambda \in (a, 1)$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $a_n < \lambda$ για κάθε $n \geq n_0$.

(β) Αν $b_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\sqrt[n]{b_n} \to b < 1$ δείξτε ότι $b_n \to 0$.

(γ) Βρείτε το όριο της ακολουθίας $a_n = \dfrac{n^5}{2^n}$.

(δ) Δώστε παράδειγμα ακολουθίας (b_n) με $b_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $b_n \to 0$ αλλά $\sqrt[n]{b_n} \to 1$.

Λύση. (α) Έστω $\lambda \in (a, 1)$. Τότε $\lambda = a + \epsilon$ με $\epsilon = \lambda - a$. Αφού $a_n \to a$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|a_n - a| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Τότε για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$|a_n - a| < \epsilon \Rightarrow a_n - a < \epsilon \Rightarrow a_n < a + \epsilon = \lambda$$

(β) Έστω $\lambda \in (b, 1)$ (π.χ. $\lambda = \dfrac{b+1}{2}$). Από το (α) (για $a_n = \sqrt[n]{b_n}$) έχουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\sqrt[n]{b_n} < \lambda \Rightarrow b_n < \lambda^n$ για κα΄θε $n \geq n_0$. Άρα

$$0 < b_n < \lambda^n$$

για κάθε $n \geq n_0$. Επειδή $0 < \lambda < 1$ έχουμε $\lambda^n \to 0$ και άρα από το Θεώρημα των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών έπεται ότι $b_n \to 0$.

(γ) Έχουμε $\sqrt[n]{a_n} = \dfrac{(\sqrt[n]{n})^5}{2} \to \dfrac{1}{5} < 1 \Rightarrow \dfrac{n^5}{2^n} \to 0$.

(δ) Αν $b_n = \dfrac{1}{n}$ τότε $b_n \to 0$ αλλά $\sqrt[n]{b_n} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1$.

Άσκηση 7. Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n^3]{1^{n^2} + 2^{n^2} + \cdots + n^{n^2}}$.

Λύση. Έχουμε

$$1 \leq \sqrt[n^3]{1^{n^2} + 2^{n^2} + \cdots + n^{n^2}} \leq \sqrt[n^3]{n \cdot n^{n^2}}$$

Επειδή

$$\sqrt[n^3]{n \cdot n^{n^2}} = \sqrt[n^3]{n^{n^2+1}} = n^{\frac{n^2+1}{n^3}} \leq n^{\frac{2n^2}{n^3}} = n^{\frac{2}{n}} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^2$$

και $\lim\limits_{n} \left(\sqrt[n]{n}\right)^2 = \left(\lim\limits_{n} \sqrt[n]{n}\right)^2 = 1$ από Θεώρημα των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών,

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n^3]{1^{n^2} + 2^{n^2} + \cdots + n^{n^2}} = 1$$

Άσκηση 8. Βρείτε το όριο της ακολουθίας $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Λύση. Είναι

$$\begin{aligned}\sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\end{aligned}$$

οπότε

$$0 < a_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

και άρα από το Θεώρημα ισοσυγκλινουσών ακολουθιών, έπεται ότι $a_n \to 0$.

Άσκηση 9. Έστω $x_n \to x$ και έστω $a < b$ με $x \in (a,b)$. Δείξτε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $x_n \in (a,b)$ για κάθε $n \geq n_0$.

Λύση. Επιλέγουμε $\epsilon > 0$ αρκετά μικρό τέτοιο ώστε

$$(x-\epsilon, x+\epsilon) \subseteq (a,b) \tag{3}$$

Για να προσδιορίσουμε με ακρίβεια ένα τέτοιο ϵ μπορούμε να πάρουμε τις αποστάσεις του x από τα a, b, $|x-a|$ και $|x-b|$ και να επιλέξουμε $\epsilon > 0$ μικρότερο από αυτές π.χ. $\epsilon = \dfrac{1}{2}\min(|x-a|, |x-b|)$. Τώρα για το ϵ που επιλέξαμε βρίσκουμε ένα n_0 τέτοιο ώστε

$$|x_n - x| < \epsilon \Leftrightarrow x_n \in (x-\epsilon, x+\epsilon) \tag{4}$$

για κάθε $n \geq n_0$. Από την (3) έχουμε ότι για κάθε $n \geq n_0$ $x_n \in (a,b)$.

Άσκηση 10. Αποδείξτε ότι κάθε πραγματικός αριθμός είναι το όριο μιας γνησίως αύξουσας ακολουθίας ρητών (αντίστοιχα αρρήτων).

Λύση. Έστω $x \in \mathbb{R}$. Έστω η ακολουθία $\left(x - \dfrac{1}{n}\right)$. Έχουμε

$$x - 1 < x - \frac{1}{2} < x - \frac{1}{3} < \cdots < x - \frac{1}{n} < x - \frac{1}{n+1} < \cdots < x$$

Από πυκνότητα ρητών και αρρήτων, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να επιλέξουμε $x_n \in \mathbb{Q}$ (αντίστοιχα x_n άρρητο) τέτοιο ώστε

$$x - \frac{1}{n} < x_n < x - \frac{1}{n+1} \tag{5}$$

Η ακολουθία (x_n) είναι γνησίως αύξουσα ακολουθία ρητών και από την (5) και το Θεώρημα Ισοσυγκλινουσών συγκλίνει στο x.

Άσκηση 11. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και άνω φραγμένο και έστω $M \in \mathbb{R}$ άνω φράγμα του A. Αποδείξτε ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.

(α) Το M είναι το supremum του A.

(β) Υπάρχει ακολουθία (a_n) με $a_n \in A$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_n \to M$.

Λύση. $(a) \Rightarrow (b)$: Αν το $M = \sup A$ τότε από την ξαρακτηριστική ιδιότητα του supremum, μπορούμε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να επιλέξουμε $a_n \in A$ με $M - \dfrac{1}{n} < a_n \leq M$. Η ακολουθία (a_n) που παίρνουμε με αυτόν τον τρόπο είναι μια ακολουθία στο A με $a_n \to M$ από το Θεώρημα των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών.

$(b) \Rightarrow (a)$: Έστω (a_n) ακολουθία στο A με $a_n \to M$. Υποθέτουμε επίσης ότι το M είναι άνω φράγμα του A. Αν το M δεν ήταν το $\sup A$ τότε $\sup A < M$ (θυμίζουμε ότι το $\sup A$ είναι εξ ορισμού το μικρότερο άνω φράγμα του A). Θέτουμε $\epsilon = M - \sup A$. Τότε $\epsilon > 0$ και άρα μπορούμε να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ με $|a_n - M| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Αλλά τότε

$$|a_{n_0} - M| < \epsilon \Rightarrow M - \epsilon < a_{n_0} \Rightarrow \sup A < a_{n_0}$$

άτοπο, αφού $a_{n_0} \in A$.

Άσκηση 12. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό. Αν το A δεν είναι άνω φραγμένο δείξτε ότι το A περιέχει μια γνησίως αύξουσα ακολουθία $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ που τείνει στο $+\infty$. (Υπενθυμίζουμε ότι $a_n \to +\infty$ αν $\forall M > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $a_n > M$, για όλα τα $n \geq n_0$).

Λύση. Η ακολουθία (a_n) κατασκευάζεται αναδρομικά έτσι ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να ισχύει ότι (α) $a_n < a_{n+1}$ και (β) $a_n > n$. Η πρώτη συνθήκη εθασφαλίζει ότι η (a_n) είναι γνησίως αύξουσα και η δεύτερη ότι $a_n \to +\infty$. Πράγματι για $n = 1$ επιλέγουμε $a_1 \in A$ με $a_1 > 1$. Αυτό μπορεί να γίνει επειδή το 1 δεν είναι άνω φράγμα του A. Έστω ότι για κάποιο $k \in \mathbb{N}$ έχουμε επιλέξει $a_1, \ldots, a_k \in A$ με $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ και $a_1 > 1$, ..., $a_k > k$. Θέτουμε $M = \max\{a_k, k+1\}$ και επιλέγουμε $a_{k+1} \in A$ με $a_{k+1} > M$. Τότε $a_{k+1} > a_k$ και $a_{k+1} > k+1$. Με αυτόν τον επαγωγικό τρόπο κατασκευάζεται μια γνησίως αύξουσα ακολουθία (a_n) στο A με την ιδιότητα $a_n > n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Η ιδιότητα αυτή της (a_n) επιβάλει ότι $a_n \to +\infty$. Πράγματι, έστω $M > 0$. Επιλέγουμε (Αρχιμήδεια Ιδιότητα) $n_0 \in \mathbb{N}$ με $n_0 > M$. Τότε για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $a_n \geq n \geq n_0 > M$.