ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
4ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Ασκηση 1. Έστω $a > 0$. Θεωρούμε τυχόν $x_1 > 0$ και για κάθε $n \geq 1$ ορίζουμε

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

Αποδείξτε ότι η (x_n), τουλάχιστον από τον δεύτερο όρο της και πέρα, είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη από τον $\sqrt{a}$. Βρείτε το $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Ασκηση 2. Έστω $0 < a_1 < b_1$. Ορίζουμε αναδρομικά δύο ακολουθίες θέτοντας

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad \text{και} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

(α) Αποδείξτε ότι η (a_n) είναι αύξουσα και η (b_n) φθίνουσα.

(β) Αποδείξτε ότι οι (a_n), (b_n) συγκλίνουν και έχουν το ίδιο όριο.

Ασκηση 3. Υπολογίστε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}, \quad b_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n, \quad c_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

και

$$d_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n, \quad e_n = \left(1 + \frac{2}{3n}\right)^n.$$

Ασκηση 4. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις ακολουθίες:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \quad \text{και} \quad b_n = \frac{1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^n}{n^n}.$$

Ασκηση 5. (α) Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Ορίζουμε μια δεύτερη ακολουθία (b_n) θέτοντας $b_n = \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$. Αποδείξτε ότι: αν $a_n \to a$ τότε $b_n \to a$. Ισχύει το αντίστροφο;

(β) Αποδείξτε ότι: αν $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_n \to a > 0$ τότε

$$\gamma_n := \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \to a \quad \text{και} \quad \delta_n := \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \to a.$$

Ασκηση 6. Έστω (a_n) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε ότι: αν $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = a$ τότε $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$. Ισχύει το αντίστροφο;

[*Υπόδειξη:* Αν ορίσουμε $b_1 = a_1$ και $b_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ για $n \geq 2$, τότε $a_n = b_1 b_2 \cdots b_n$.]

Ασκηση 7. (α) Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε ότι $a_n \to a$ αν και μόνο αν οι υπακολουθίες (a_{2n}) και (a_{2n-1}) συγκλίνουν στο a.

(β) Έστω (a_n) μια ακολουθία. Υποθέτουμε ότι οι υπακολουθίες (a_{2n}), (a_{2n-1}) και (a_{3n}) συγκλίνουν. Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{3n}$. Συμπεράνατε από αυτό ότι η (a_n) συγκλίνει.