ΣΕΜΦΕ
Μαθηματική Ανάλυση Ι
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 3

Άσκηση 1. Από τις παρακάτω προτάσεις βρείτε ποιές είναι αληθείς και ποιές είναι ψευδείς δικαιολογώντας την απάντησή σας.

1. Αν η (a_n^2) συγκλίνει τότε και η (a_n) συγκλίνει.
2. Αν $a_n^2 \to 0$ τότε $a_n \to 0$.
3. Αν $\lim\limits_n a_n = 1$ τότε $\lim\limits_n a_n^n = 1$.
4. Αν $0 < a_n < 1$ τότε $a_n^n \to 0$.
5. Αν $1 \leq a_n \leq n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε $\sqrt[n]{a_n} \to 1$.
6. Υπάρχει φραγμένη ακολουθία που δεν συγκλίνει.

Άσκηση 2. *Βρείτε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών*

$$\frac{na + (-1)^n}{n}, \quad \frac{\sin n}{n}, \quad \frac{\left(2 - \frac{1}{n}\right)^3}{7 - \frac{1}{n}}, \quad \frac{3 + (0.5)^n}{5 + 3(0.9)^n}, \quad \frac{4n^2 - n + 2}{n^2 + 7n - 3}, \quad \frac{n!}{n^n}$$

Άσκηση 3. Βρείτε το όριο της ακολουθίας $a_n = \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}$, όπου $0 \leq a \leq b \leq c$.

Άσκηση 4. Βρείτε το όριο της ακολουθίας $\sqrt[n]{n^2 + n + 1}$.

Άσκηση 5. Έστω $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και έστω ότι $a_n \to a > 0$. Εξετάστε αν υπάρχει το $\lim\limits_n \sqrt[n]{a_n}$.

Άσκηση 6. (α) Αν $a_n \to a < 1$ δείξτε ότι για κάθε $\lambda \in (a, 1)$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $a_n < \lambda$ για κάθε $n \geq n_0$.

(β) Αν $b_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\sqrt[n]{b_n} \to b < 1$ δείξτε ότι $b_n \to 0$.

(γ) Βρείτε το όριο της ακολουθίας $a_n = \dfrac{n^5}{2^n}$.

(δ) Δώστε παράδειγμα ακολουθίας (b_n) με $b_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $b_n \to 0$ αλλά $\sqrt[n]{b_n} \to 1$.

Άσκηση 7. Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n^3]{1^{n^2} + 2^{n^2} + \cdots + n^{n^2}}$.

Άσκηση 8. Βρείτε το όριο της ακολουθίας $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Άσκηση 9. Έστω $x_n \to x$ και έστω $a < b$ με $x \in (a, b)$. Δείξτε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $x_n \in (a, b)$ για κάθε $n \geq n_0$.

Άσκηση 10. Αποδείξτε ότι κάθε πραγματικός αριθμός είναι το όριο μιας γνησίως αύξουσας ακολουθίας ρητών (αντίστοιχα αρρήτων).

Άσκηση 11. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και άνω φραγμένο και έστω $M \in \mathbb{R}$ άνω φράγμα του A. Αποδείξτε ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.

(α) Το M είναι το supremum του A.

(β) Υπάρχει ακολουθία (a_n) με $a_n \in A$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_n \to M$.

Άσκηση 12. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό. Αν το A δεν είναι άνω φραγμένο δείξτε ότι το A περιέχει μια γνησίως αύξουσα ακολουθία $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ που τείνει στο $+\infty$. (Υπενθυμίζουμε ότι $a_n \to +\infty$ αν $\forall M > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $a_n > M$, για όλα τα $n \geq n_0$).