ΣΕΜΦΕ
Μαθηματική Ανάλυση Ι
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 2-ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1. Έστω $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ μη κενά με το B φραγμένο. Δείξτε ότι και το A είναι φραγμένο και ότι

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$$

Λύση. Παρατηρούμε ότι κάθε άνω (αντ. κάτω) φράγμα του B είναι και άνω (αντ. κάτω) φράγμα του A και άρα αν το B είναι φραγμένο το ίδιο ισχύει και για το A. Ειδικότερα, το $\inf B$ είναι κάτω φράγμα του B, άρα και του A οπότε $\inf B \leq \inf A$ διότι το $\inf A$ είναι το μεγαλύτερο κάτω φράγμα του A. Ομοίως, το $\sup A$ είναι το μικρότερο άνω φράγμα του A και άρα $\sup A \leq \sup B$ διότι το $\sup B$ είναι άνω φράγμα του A ως άνω φράγμα του B.

Άσκηση 2. Έστω A, B μη κενά φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\sup A = \inf B$. Δείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν $a \in A$ και $b \in B$ με $0 \leq b - a < \epsilon$.

Λύση. Έστω $\epsilon > 0$. Έστω $s = \sup A = \inf B$. Αφού $s = \sup A$ υπάρχει $a \in A$ τέτοιο ώστε

$$s - \frac{\epsilon}{2} < a \leq s$$

Αντίστοιχα, αφού $s = \inf B$ υπάρχει $b \in B$ τέτοιο ώστε

$$s \leq b < s + \frac{\epsilon}{2}$$

Άρα

$$s - \frac{\epsilon}{2} < a \leq s \leq b < s + \frac{\epsilon}{2}$$

οπότε $0 \leq b - a < \epsilon$.

Άσκηση 3. Γνωρίζοντας ότι κάθε μη κενό άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{Z}$ έχει μέγιστο αποδείξτε ότι κάθε μη κενό κάτω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{Z}$ έχει ελάχιστο στοιχείο.

Λύση. Έστω $A \subseteq \mathbb{Z}$ μη κενό κάτω φραγμένο. Τότε το $-A = \{-a : a \in A\}$ είναι μη κενό και άνω φραγμένο. Επιπλέον $-A \subseteq \mathbb{Z}$ αφού $A \subseteq \mathbb{Z}$. Συνεπώς το $-A$ έχει μέγιστο στοιχείο. Αν $M = \max(-A)$ τότε $M \in -A$ και $M \leq -a$ για όλα τα $a \in A$. Άρα $-M \in A$ και $-M \leq a$ για όλα τα $a \in A$ δηλαδή $-M = \min A$.

Άσκηση 4. Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$ μη κενά τέτοια ώστε για κάθε $a \in A$ υπάρχει $b \in B$ με $b \geq a$.

(α) Αν το A δεν είναι άνω φραγμένο δείξτε ότι και το B δεν είναι άνω φραγμένο.

(β) Αν το B είναι άνω φραγμένο δείξτε ότι και το A είναι άνω φραγμένο και $\sup A \leq \sup B$.

Λύση. (α) Θα δείξουμε ότι κάθε πραγματικός αριθμός δεν είναι άνω φράγμα του A. Πράγματι, έστω $x \in \mathbb{R}$. Αφού το A δεν είναι άνω φραγμένο υπάρχει $a \in A$ με $a > x$. Από την υπόθεσή μας υπάρχει $b \in B$ με $b \geq a$ και άρα $b > x$.

(β) Θα δείξουμε ότι κάθε άνω φράγμα του B είναι και άνω φράγμα του A. Αυτό ειδικότερα σημαίνει ότι το $\sup B$ είναι άνω φράγμα του A και άρα $\sup A \leq \sup B$ αφού το $\sup A$ είναι το μικρότερο άνω φράγμα του A. Έστω M άνω φράγμα του B και έστω $a \in A$ τυχαίο στοιχείο του. Από την υπόθεσή μας υπάρχει $b \in B$ με $b \geq a$ και άρα $a \leq b \leq M \Rightarrow a \leq M$. Επειδή το a ήταν ένα οποιοδήποτε στοιχείο του A έχουμε ότι το M είναι άνω φράγμα του A.

Άσκηση 5. Έστω $A = \left\{\frac{m}{n} + \frac{4n}{m} : m, n \in \mathbb{N}\right\}$. Βρείτε το $\inf A$ και δείξτε ότι το A δεν είναι άνω φραγμένο

Λύση. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $x^2 + y^2 \geq 2xy$ έχουμε

$$\frac{m}{n} + \frac{4n}{m} = \frac{m^2 + 4n^2}{nm} \geq \frac{4mn}{mn} = 4$$

με την ισότητα να ισχύει όταν $m = 2n$. Άρα $\inf A = \min A = 4$.

Απο την άλλη μεριά, αν $m = 1$ τότε

$$\frac{m}{n} + \frac{4n}{m} = \frac{1}{n} + 4n \geq 4n \geq n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $a \in A$ με $a \geq n$. Επειδή το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο έχουμε ότι και το το A δεν είναι άνω φραγμένο (δείτε και το (α) μέρος της Άσκησης 4).

Άσκηση 6. Έστω (a_n), (b_n) ακολουθίες στο $\mathbb{R}$ και $a \in \mathbb{R}$. Αν η (b_n) διαφέρει από την (a_n) σε πεπερασμένο πλήθος όρων δείξτε ότι αν η (a_n) συγκλίνει στο a τότε και η (b_n) συγκλίνει στο a.

Λύση. Έστω ότι $a_n \to a$. Θα δείξουμε ότι $b_n \to a$ ή ισοδύναμα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$n \geq n_0 \Rightarrow |b_n - a| < \epsilon$$

Πράγματι, έστω $\epsilon > 0$. Επειδή $a_n \to a$ υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $n \geq n_1$, ισχύει ότι $|a_n - a| < \epsilon$. Επίσης επεπειδή η (b_n) διαφέρει από την (a_n) σε πεπερασμένο πλήθος όρων υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $b_n = a_n$ για κάθε $n \geq n_2$. Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Τότε

$$n \geq n_0 \Rightarrow b_n = a_n \text{ και } n \geq n_2 \Rightarrow |b_n - a| = |a_n - a| < \epsilon$$

Άσκηση 7. Έστω (a_n) ακολουθία με $a_n \in \mathbb{Z}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν η (a_n) είναι συγκλίνουσα δείξτε ότι είναι τελικά σταθερή, δηλαδή υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $a_n = a_{n_0}$ για κάθε $n \geq n_0$.

Λύση. Έστω ότι $a_n \to a$ για κάποιο $a \in \mathbb{R}$. Τότε για $\epsilon = 1/2$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$, $|a_n - a| < 1/2$ και άρα

$$|a_{n_0} - a_n| = |a_{n_0} - a + a - a_n| \leq |a_{n_0} - a| + |a - a_n| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Συνεπώς κάθε όρος a_n με $n > n_0$ απέχει από τον ο a_{n_0} απόσταση γνήσια μικρότερη του 1. Επειδή $a_n \in \mathbb{Z}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ αυτό σημαίνει ότι $a_n = a_{n_0}$ για κάθε $n \geq n_0$, δηλαδή η (a_n) είναι τελικά σταθερή.

Άσκηση 8. Έστω (a_n) ακολουθία στο $\mathbb{R}$ και $a \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε την ακολουθία (d_n) με $d_n = |a_n - a|$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(α) Δείξτε ότι $a_n \to a \Leftrightarrow d_n \to 0$.

(β) Δείξτε ότι $a_n \to 0 \Leftrightarrow |a_n| \to 0$.

(γ) Δείξτε ότι $a_n \to a \Rightarrow |a_n| \to |a|$. Ισχύει η αντίστροφη συνεπαγωγή αν $a \neq 0$?

Λύση. (α) Εφαρμόζοντας τον ορισμό του ορίου και παρατηρώντας ότι $d_n = |d_n - 0|$ έχουμε

$$\begin{aligned} a_n \to a &\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ τέτοιο ώστε } \ \forall n \geq n_0 \ \ |a_n - a| < \epsilon \\ &\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ τέτοιο ώστε } \ \forall n \geq n_0 \ \ d_n < \epsilon \\ &\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ τέτοιο ώστε } \ \forall n \geq n_0 \ \ |d_n - 0| < \epsilon \Leftrightarrow d_n \to 0 \end{aligned}$$

(β) Προκύπτει άμεσα από το (α) για $a = 0$.

(γ) Από την ανισότητα $||x| - |y|| \leq |x - y|$ έχουμε

$$\begin{aligned} a_n \to a &\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq n_0 \ \ |a_n - a| < \epsilon \\ &\Rightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq n_0 \ \ ||a_n| - |a|| < \epsilon \\ &\Leftrightarrow |a_n| \to |a| \end{aligned}$$

Η αντίστροφη συνεπαγωγή δεν ισχύει, πχ. αν $a_n = (-1)^n$ τότε $|a_n| = 1 \to 1$ αλλά η (a_n) δεν συγκλίνει.

Άσκηση 9. Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών και $a \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(α) $a_n \to a$.

(β) Για κάθε $\epsilon > 0$ το σύνολο $N_\epsilon = \{n \in \mathbb{N} : |a_n - a| \geq \epsilon\}$ είναι πεπερασμένο.

Λύση. (α) $\Rightarrow$ (β): Έστω $\epsilon > 0$. Αφού $a_n \to a$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|a_n - a| < \epsilon$ για όλα τα $n \geq n_0$. Αυτό σημαίνει ότι αν $|a_n - a| \geq \epsilon$ τότε υποχρεωτικά $n < n_0$ δηλαδή $\{n \in \mathbb{N} : |a_n - a| \geq \epsilon\} \subseteq \{1, \ldots, n_0\}$ και άρα το N_ϵ είναι πεπερασμένο.

(β) $\Rightarrow$ (α): Έστω $\epsilon > 0$ και $n_0 = \max N_\epsilon + 1$ (αν $N_\epsilon = \emptyset$ θέτουμε $n_0 = 1$). Παρατηρούμε ότι

$$n \geq n_0 \Rightarrow n \notin N_\epsilon \Rightarrow |a_n - a| < \epsilon$$

Άσκηση 10. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό.

(α) Αν το A είναι άνω φραγμένο δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (a_n) στο A τέτοια ώστε $a_n \to \sup A$.

(β) Αντίστοιχα αν το A είναι κάτω φραγμένο δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (a_n) στο A τέτοια ώστε $a_n \to \inf A$.

Λύση. (α) Έστω $s = \sup A$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ επιλέγουμε $a_n \in A$ με $s - \frac{1}{n} < a_n \leq s$. Από Θεώρημα Ισοσυγκλινουσών ακολουθιών η ακολουθία (a_n) συγκλίνει στο s.

(β) Ομοίως, έστω $\tau = \inf A$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ επιλέγουμε $a_n \in A$ με $\tau \leq a_n < \tau + \frac{1}{n}$. Από Θεώρημα Ισοσυγκλινουσών ακολουθιών η ακολουθία (a_n) συγκλίνει στο τ.

Άσκηση 11. Με βάση την ιδιότητα της πυκνότητας των ρητών (αντίστοιχα αρρήτων) δείξτε ότι κάθε πραγματικός αριθμός είναι το όριο ακολουθίας ρητών (αντ. αρρήτων).

Λύση. Η ιδιότητα της πυκνότητας των ρητών αριθμών λέει ότι μεταξύ δύο πραγματικών αριθμών υπάρχει ρητός. Έστω $x \in \mathbb{R}$. Από πυκνότητα ρητών για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $q_n \in \mathbb{Q}$ με $x - \frac{1}{n} < q_n < x$. Από Θεώρημα Ισοσυγκλινουσών ακολουθιών $q_n \to x$. Ομοίως για ακολουθία αρρήτων.

Άσκηση 12. Αποδείξτε ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $\frac{a^n}{n!} \to 0$.

Λύση. Αρκεί να δειχθεί για $a = m \in \mathbb{N}$. Πράγματι, η γενική περίπτωση $a \in \mathbb{R}$ προκύπτει τότε από το Θεώρημα των Ισοσυγκλινουσών ακολουθιών επιλέγοντας $m \in \mathbb{N}$ με $-m < x < m$.

Σταθεροποιούμε λοιπόν ένα $m \in \mathbb{N}$. Τότε για κάθε $n > m$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\frac{m^n}{n!} &= \frac{m^n}{m!(m+1)(m+2)\cdot\cdots\cdot n} \\
&\leq \frac{m^n}{m!(m+1)^{n-m}} \\
&= \frac{m^n}{m!(m+1)^n(m+1)^{-m}} = \frac{(m+1)^m}{m!} \cdot \left(\frac{m}{m+1}\right)^n
\end{aligned}$$

Άρα, θέτοντας

$$c_m = \frac{(m+1)^m}{m!} \quad \text{και} \quad \lambda_m = \frac{m}{m+1}$$

έχουμε

$$0 \leq \frac{m^n}{n!} \leq c_m \cdot \lambda_m^n$$

για κάθε $n \geq m$. Επειδή $0 < \lambda_m < 1$, έχουμε ότι $\lambda_m^n \to 0$ και άρα από το Θεώρημα των Ισοσυγκλινουσών ακολουθιών έπεται ότι $\frac{m^n}{n!} \to 0$.