ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
2ο Φυλλάδιο Ασκήσεων (υποδείξεις)

Ασκηση 1. Αποδείξτε ότι τα σύνολα

$$A = \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$
$$B = \left\{ \frac{n}{2n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

είναι φραγμένα και βρείτε το supremum και το infimum τους. Εξετάστε αν έχουν μέγιστο ή ελάχιστο στοιχείο. Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Υπόδειξη: Γενικά, αν $A \neq \varnothing$ είναι άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $x \in \mathbb{R}$ τότε τα εξής είναι ισοδύναμα:

(i) $x = \sup A$.

(ii) ο x είναι άνω φράγμα του A και για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $a \in A$ τέτοιο ώστε $x - \epsilon < a$.

(iii) ο x είναι άνω φράγμα του A και υπάρχει ακολουθία (a_n) στοιχείων του A τέτοια ώστε $a_n \to x$.

Συνεπώς, για να αιτιολογήσουμε ότι κάποιος $x \in \mathbb{R}$ είναι το supremum του A, αρκεί να ελέγξουμε ότι ικανοποιεί το (ii) ή το (iii). Συνήθως, είναι ευκολότερο να δουλέψουμε με το τλ(ιιι).

Μια άλλη παρατήρηση είναι ότι αν το A έχει μέγιστο στοιχείο τότε αυτό είναι το supremum του A (εξηγήστε γιατί). Επίσης, λόγω της τελευταίας παρατήρησης, αν με κάποιον τρόπο βρούμε το supremum του A και αυτό δεν ανήκει στο A, τότε το A δεν έχει μέγιστο στοιχείο.

Αντίστοιχες παρατηρήσεις ισχύουν για το infimum και το ελάχιστο στοιχείο ενός συνόλου (δείτε και την Άσκηση 4).

(α) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{1} = 2$. Αυτό δείχνει ότι ο 2 είναι το μέγιστο στοιχείο του A, και έπεται ότι $2 = \sup A$.

Ο 0 είναι κάτω φράγμα του A διότι $\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, αν ορίσουμε $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$, τότε η (a_n) είναι ακολουθία στοιχείων του A και $a_n \to 0$. Από τον χαρακτηρισμό (iii) του infimum της Άσκησης 4, $0 = \inf A$. Όμως, $0 \notin A$, άρα το A δεν έχει ελάχιστο στοιχείο.

(β) Θα δείξουμε ότι το supremum του B είναι ο $\dfrac{1}{2}$ χρησιμοποιώντας τον χαρακτηρισμό (ii) του supremum. Παρατηρούμε ότι ο $\dfrac{1}{2}$ είναι άνω φράγμα του συνόλου αφού

$$\frac{n}{2n+1} < \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}\,.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$\frac{n}{2n+1} > \frac{1}{2} - \varepsilon \iff n > \frac{1}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}\,.$$

Τέτοιος $n \in \mathbb{N}$ όμως υπάρχει λόγω της Αρχιμήδειας ιδιότητας. Συνεπώς, $\sup B = \frac{1}{2}$. Αφού $\frac{1}{2} \notin B$, το B δεν έχει μέγιστο στοιχείο.

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι $\frac{1}{2\cdot 1+1} = \frac{1}{3} \leq \frac{n}{2n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (παρατηρήστε ότι, ισοδύναμα, $2n+1 \leq 3n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$). Συνεπώς, ο $\frac{1}{3}$ είναι το ελάχιστο στοιχείο του B, και έπεται ότι $\frac{1}{3} = \inf B$. $\square$

Ασκηση 2. Αποδείξτε ότι το σύνολο

$$A = \{\sqrt{n+1} - \sqrt{n} : n \geq 1\}$$

είναι φραγμένο και βρείτε τα $\sup A$ και $\inf A$. Εξετάστε αν το A έχει μέγιστο ή ελάχιστο στοιχείο. Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Υπόδειξη: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι

$$0 < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1.$$

Από αυτές τις ανισότητες βλέπουμε αρχικά ότι ο $\sqrt{2}-1$ είναι το μέγιστο στοιχείο του A, και έπεται ότι $\sup A = \sqrt{2}-1$.

Από τις ίδιες ανισότητες βλέπουμε ότι ο 0 είναι κάτω φράγμα του A και επίσης, αν θέσουμε $a_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ τότε η (a_n) είναι ακολουθία στοιχείων του A και $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \to 0$. Από τον χαρακτηρισμό του infimum μέσω ακολουθιών (το (iii) στην Άσκηση 4) συμπεραίνουμε ότι $\inf A = 0$. Τέλος, αφού $0 \notin A$, το A δεν έχει ελάχιστο στοιχείο. $\square$

Ασκηση 3. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή ή λανθασμένη κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις:

(α) Ένα μη κενό πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ περιέχει πάντα το supremum του.

(β) Αν $x < M$ για κάθε στοιχείο του μη κενού συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$, τότε $\sup A < M$.

(γ) Αν A και B είναι μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και ισχύει ότι $\alpha < \beta$ για κάθε $\alpha \in A$ και $\beta \in B$, τότε $\sup A < \inf B$.

(δ) Αν A και B είναι μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και ισχύει ότι $\sup A \leq \sup B$, τότε υπάρχει στοιχείο του B που είναι άνω φράγμα του συνόλου A.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Υπόδειξη: (α) Σωστή, αφού κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει μέγιστο στοιχείο το οποίο είναι και το supremum του.

(β) Λάθος, αφού για παράδειγμα $\sup[0,1) = 1$. Αν επιλέξουμε $M = 1$ τότε $x < M$ για κάθε $x \in [0,1)$, όμως $\sup[0,1) = 1 = M$.

(γ) Λάθος, αφού για παράδειγμα $\sup[0,1) = 1 = \inf(1,2]$ ενώ για κάθε $\alpha \in [0,1)$ και $\beta \in (1,2]$ ισχύει ότι $\alpha < 1 < \beta$.

(δ) Λάθος. Παίρνουμε για παράδειγμα $A = B = [0,1)$. Έχουμε $\sup A = 1 = \sup B$ αλλά δεν υπάρχει στοιχείο του $B = A$ που να είναι άνω φράγμα του A. $\square$

Ασκηση 4. (α) Έστω $A \neq \varnothing$ κάτω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(i) $x = \inf A$.

(ii) ο x είναι κάτω φράγμα του A και για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $a \in A$ τέτοιο ώστε $a < x + \epsilon$.

(iii) ο x είναι κάτω φράγμα του A και υπάρχει ακολουθία (a_n) στοιχείων του A τέτοια ώστε $a_n \to x$.

Υπόδειξη: (i) $\Longrightarrow$ (ii) Αν $x = \inf A$ τότε από τον ορισμό του infimum ο x είναι κάτω φράγμα του A. Επίσης, για κάθε $\epsilon > 0$ έχουμε ότι $x + \varepsilon > x$, άρα ο $x + \epsilon$ δεν είναι κάτω φράγμα του A και συνεπώς υπάρχει $a \in A$ τέτοιος ώστε $a < x + \epsilon$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Τώρα έχουμε υποθέσει το (ii), άρα ο γνωρίζουμε ότι ο x είναι κάτω φράγμα του A. Επίσης, εφαρμόζοντας διαδοχικά την υπόθεση για $\epsilon = 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ βρίσκουμε $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ στο A ώστε $a_n < x + \frac{1}{n}$ για $n = 1, 2, \ldots$. Ορίζεται έτσι μια ακολουθία (a_n) στοιχείων του A τέτοια ώστε

$$x \leq a_n < x + \frac{1}{n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (η $x \leq a_n$ ισχύει διότι $a_n \in A$ και ο x είναι κάτω φράγμα του A). Αφού $x + \frac{1}{n} \to x$, από το κριτήριο παρεμβολής συμπεραίνουμε ότι $a_n \to x$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) Τώρα έχουμε υποθέσει το (iii), άρα ο γνωρίζουμε ότι ο x είναι κάτω φράγμα του A. Μένει να δείξουμε ότι αν $y \in \mathbb{R}$ και $y > x$ τότε ο y δεν είναι κάτω φράγμα του A (διότι, τότε, ο x θα είναι το μεγαλύτερο κάτω φράγμα του A, δηλαδή $x = \inf A$).

Έστω $y > x$. Υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε $x + \epsilon < y$. Από την υπόθεση έχουμε μια ακολουθία (a_n) στοιχείων του A τέτοια ώστε $a_n \to x$. Για το $\epsilon > 0$ που έχουμε επιλέξει, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε: για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει ότι $x - \epsilon < a_n < x + \epsilon$. Τότε, για οποιονδήποτε $n \geq n_0$ έχουμε $a_n \in A$ και $a_n < x + \epsilon < y$. Αυτό δείχνει ότι ο y δεν είναι κάτω φράγμα του A (βρήκαμε στοιχεία του A μικρότερα από τον y). $\square$

Ασκηση 5. Έστω A, B μη κενά φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $A \cup B = (0, 1)$. Αποδείξτε ότι τουλάχιστον ένας από τους $\inf A$ και $\inf B$ είναι ίσος με 0.

Υπόδειξη: Για κάθε $x \in A$ έχουμε ότι $x \in (0, 1)$, άρα $x > 0$. Αυτό δείχνει ότι ο 0 είναι κάτω φράγμα του A, άρα $\inf A \geq 0$. Όμοια δείχνουμε ότι $\inf B \geq 0$.

Αν κανένας από τους $\inf A$ και $\inf B$ δεν είναι ίσος με 0, έχουμε ότι $\inf A > 0$ και $\inf B > 0$. Μπορούμε να επιλέξουμε $y > 0$ που είναι μικρότερος από τους $\inf A, \inf B$ και 1 (υπάρχει y τέτοιος ώστε $0 < y < \min\{\inf A, \inf B, 1\}$. Τότε, αφού $y < \inf A$ έχουμε ότι $y \notin A$ και αφού $y < \inf B$ έχουμε ότι $y \notin B$. Συνεπώς, $y \notin A \cup B = (0, 1)$. Όμως, από την επιλογή του y έχουμε ότι $0 < y < 1$, δηλαδή $y \in (0, 1)$. Καταλήξαμε σε άτοπο, άρα τουλάχιστον ένας από τους $\inf A$ και $\inf B$ είναι ίσος με 0. $\square$

Ασκηση 6. Έστω A, B μη κενά, φραγμένα σύνολα πραγματικών αριθμών με $\sup A = \inf B$. Αποδείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $\alpha \in A$ και $\beta \in B$, τέτοια ώστε $\beta - \alpha < \varepsilon$.

[*Υπόδειξη:* να χρησιμοποιήσετε τον χαρακτηρισμό για τα supremum και infimum ενός υποσυνόλου του $\mathbb{R}$.]

Υπόδειξη: Θέτουμε $x = \sup A = \inf B$. Έστω $\varepsilon > 0$. Από τον χαρακτηρισμό για τα sup και inf ενός υποσυνόλου του $\mathbb{R}$ υπάρχουν $\alpha \in A$ και $\beta \in B$ τέτοια ώστε

$$\alpha > \sup A - \varepsilon/2 = x - \varepsilon/2 \text{ και } \beta < \inf A + \varepsilon/2 = x + \varepsilon/2\,.$$

Οπότε, έχουμε ότι $\beta - \alpha < (x + \varepsilon/2) - (x - \varepsilon/2) = \varepsilon$. $\square$

Ασκηση 7. Έστω A, B μη κενά, άνω φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $a \in A$ υπάρχει $b \in B$ ώστε $a < b$. Αποδείξτε ότι $\sup A \leq \sup B$.

Δώστε παράδειγμα στο οποίο ικανοποιείται η υπόθεση και ισχύει $\sup A = \sup B$.

Υπόδειξη: Αν δείξουμε ότι ο $\sup B$ είναι άνω φράγμα του A τότε, αφού ο $\sup A$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A, θα έχουμε ότι $\sup A \leq \sup B$.

Δείχνουμε ότι ο $\sup B$ είναι άνω φράγμα του A δείχνοντας ότι για κάθε $a \in A$ ισχύει ότι $a \leq \sup B$: Έστω $a \in A$. Από την υπόθεση, υπάρχει $b \in B$ ώστε $a < b$. Όμως, $b \leq \sup B$ (διότι ο $\sup B$ είναι άνω φράγμα του B). Από τις $a < b$ και $b \leq \sup B$ έπεται ότι $a \leq \sup B$.

Ένα παράδειγμα συνόλων A και B που ικανοποιούν την υπόθεση αλλά ισχύει $\sup A = \sup B$ είναι να πάρουμε $A = [0, 1)$ και $B = \{1\}$. Για κάθε $a \in A$ έχουμε $a < 1$ (χρησιμοποιούμε δηλαδή πάντα ως b τον $1 \in B$) όμως $\sup A = 1 = \sup B$. $\square$