

ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
3ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Άσκηση 1. Έστω $(a_n), (b_n)$ ακολουθίες πραγματικών αριθμών τέτοιες ώστε: $a_n \rightarrow +\infty$ και η (b_n) είναι φραγμένη. Αποδείξτε πλήρως (με χρήση μόνο του ορισμού) ότι $a_n + b_n \rightarrow +\infty$.

Άσκηση 2. Για καθεμιά από τις παρακάτω ακολουθίες εξετάστε αν συγκλίνει, και αν ναι, βρείτε το όριό της:

$$\alpha_n = \frac{n^3}{4^n}, \quad \beta_n = \frac{n^6}{6^n}, \quad \gamma_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2}$$
$$\delta_n = (\sqrt[n]{n} - 1)^n, \quad \epsilon_n = \sqrt[n]{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}, \quad \zeta_n = \frac{\sin(n^3)}{\sqrt{n}}.$$

Άσκηση 3. Έστω $k \geq 2$ και $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n}.$$

Άσκηση 4. Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής. Αν είναι αληθής αποδείξτε την και αν είναι ψευδής δώστε αντιπαράδειγμα.

(α) Αν $\alpha_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\alpha_n \rightarrow \alpha \in \mathbb{R}$ τότε $\sqrt[n]{\alpha_n} \rightarrow 1$.

(β) Αν $\beta_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\beta_n \rightarrow \beta > 0$ τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιος ώστε $\beta_n > \delta$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(γ) Αν $\gamma_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\gamma_n \rightarrow \gamma > 0$ τότε $\sqrt[n]{\gamma_n} \rightarrow 1$.

Άσκηση 5. Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει ακολουθία ρητών αριθμών που συγκλίνει στον x και ακολουθία αρρήτων που συγκλίνει στον x . [Υπόδειξη: να χρησιμοποιήσετε την πυκνότητα των ρητών και των αρρήτων στο \mathbb{R} .]

Άσκηση 6. Έστω y θετικός πραγματικός αριθμός. Ορίζουμε μια ακολουθία (a_n) θέτοντας

$$a_n = \frac{[y] + [2y] + \cdots + [ny]}{n^2}$$

όπου $[x]$ είναι το ακέραιο μέρος του x . Αποδείξτε ότι $a_n \rightarrow \frac{y}{2}$.

Άσκηση 7. Αποδείξτε ότι η ακολουθία

$$y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. [Υπόδειξη: Εξετάστε πρώτα αν η (y_n) είναι μονότονη.]