ΣΕΜΦΕ
Μαθηματική Ανάλυση Ι
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 2

Άσκηση 1. Έστω $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ μη κενά με το B φραγμένο. Δείξτε ότι και το A είναι φραγμένο και ότι

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$$

Άσκηση 2. Έστω A, B μη κενά φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\sup A = \inf B$. Δείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν $a \in A$ και $b \in B$ με $0 \leq b - a < \epsilon$.

Άσκηση 3. Γνωρίζοντας ότι κάθε μη κενό άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{Z}$ έχει μέγιστο αποδείξτε ότι κάθε μη κενό κάτω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{Z}$ έχει ελάχιστο στοιχείο.

Άσκηση 4. Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$ μη κενά τέτοια ώστε για κάθε $a \in A$ υπάρχει $b \in B$ με $b \geq a$.

(α) Αν το A δεν είναι άνω φραγμένο δείξτε ότι και το B δεν είναι άνω φραγμένο.

(β) Αν το B είναι άνω φραγμένο δείξτε ότι και το A είναι άνω φραγμένο και $\sup A \leq \sup B$.

Άσκηση 5. Έστω $A = \left\{ \frac{m}{n} + \frac{4n}{m} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$. Βρείτε το $\inf A$ και δείξτε ότι το A δεν είναι άνω φραγμένο

Άσκηση 6. *Έστω (a_n), (b_n) ακολουθίες στο $\mathbb{R}$ και $a \in \mathbb{R}$. Αν η (b_n) διαφέρει από την (a_n) σε πεπερασμένο πλήθος όρων δείξτε ότι αν η (a_n) συγκλίνει στο a τότε και η (b_n) συγκλίνει στο a.*

Άσκηση 7. *Έστω (a_n) ακολουθία με $a_n \in \mathbb{Z}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν η (a_n) είναι συγκλίνουσα δείξτε ότι είναι τελικά σταθερή, δηλαδή υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $a_n = a_{n_0}$ για κάθε $n \geq n_0$.*

Άσκηση 8. Έστω (a_n) ακολουθία στο $\mathbb{R}$ και $a \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε την ακολουθία (d_n) με $d_n = |a_n - a|$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(α) Δείξτε ότι $a_n \to a \Leftrightarrow d_n \to 0$.

(β) Δείξτε ότι $a_n \to 0 \Leftrightarrow |a_n| \to 0$.

(γ) Δείξτε ότι $a_n \to a \Rightarrow |a_n| \to |a|$. Ισχύει η αντίστροφη συνεπαγωγή αν $a \neq 0$?

Άσκηση 9. Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών και $a \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(α) $a_n \to a$.

(β) Για κάθε $\epsilon > 0$ το σύνολο $N_\epsilon = \{n \in \mathbb{N} : |a_n - a| \geq \epsilon\}$ είναι πεπερασμένο.

Άσκηση 10. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό.

(α) Αν το A είναι άνω φραγμένο δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (a_n) στο A τέτοια ώστε $a_n \to \sup A$.

(β) Αντίστοιχα αν το A είναι κάτω φραγμένο δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (a_n) στο A τέτοια ώστε $a_n \to \inf A$.

Άσκηση 11. Με βάση την ιδιότητα της πυκνότητας των ρητών (αντίστοιχα αρρήτων) δείξτε ότι κάθε πραγματικός αριθμός είναι το όριο ακολουθίας ρητών (αντ. αρρήτων).

Άσκηση 12. Αποδείξτε ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $\frac{a^n}{n!} \to 0$.