Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωσης (2024–25)
Ασκήσεις – Φυλλάδιο 1

(Παραδίδετε έξι από τις ασκήσεις. Ημερομηνία παράδοσης: 3 Νοεμβρίου 2024)

1. Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ τέτοια ώστε $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{A}$, και $x, y \in X$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $F \in \mathcal{F}$ έχουμε $x \in F$ αν και μόνο αν $y \in F$.

Αποδείξτε ότι: για κάθε $A \in \mathcal{A}$ έχουμε $x \in A$ αν και μόνο αν $y \in A$.

2. Έστω $X \neq \varnothing$ και $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ δύο σ-άλγεβρες στο X. Είναι απαραίτητα σωστό ότι η $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ είναι σ-άλγεβρα;

3. Έστω $X \neq \varnothing$ και $\mathcal{F}$ μια οικογένεια συναρτήσεων $f : X \to \mathbb{R}$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:

(α) Όλες οι σταθερές συναρτήσεις $f : X \to \mathbb{R}$ ανήκουν στην $\mathcal{F}$.

(β) Αν $f, g \in \mathcal{F}$ και $c \in \mathbb{R}$ τότε οι $f + g$, $f \cdot g$ και $c \cdot f$ ανήκουν στην $\mathcal{F}$.

(γ) Αν $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία συναρτήσεων στην $\mathcal{F}$ και $f : X \to \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση τέτοια ώστε $f_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in X$, τότε και η f ανήκει στην $\mathcal{F}$.

Αποδείξτε ότι η οικογένεια $\mathcal{A} = \{A \subseteq X : \chi_A \in \mathcal{F}\}$ είναι σ-άλγεβρα στο X (με χ_A συμβολίζουμε τη δείκτρια συνάρτηση του A).

4. Αποδείξτε ότι οι οικογένειες $\mathcal{B} = \{$αριθμήσιμες ενώσεις διαστημάτων του $\mathbb{R}\}$ και

$$\mathcal{D} = \{\text{αριθμήσιμες ενώσεις διαστημάτων της μορφής } (a, b) \text{ όπου } a, b \in \mathbb{R}, a \leqslant b\}$$

δεν είναι σ-άλγεβρες στο $\mathbb{R}$.

5. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τυχούσα συνάρτηση. Αποδείξτε ότι το σύνολο C_f όλων των $x \in \mathbb{R}$ στα οποία η f είναι συνεχής είναι G_δ-σύνολο.

(β) Αποδείξτε ότι το $\mathbb{Q}$ είναι F_σ-σύνολο αλλά δεν είναι G_δ-σύνολο.

(γ) Υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $C_f = \mathbb{Q}$;

(δ) Υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $C_f = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

6. Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $\nu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ πεπερασμένα προσθετικό μέτρο. Αν το ν είναι επίσης αριθμήσιμα υποπροσθετικό, αποδείξτε ότι το ν είναι μέτρο.

7. Έστω μ ένα πεπερασμένο μέτρο στην σ-άλγεβρα $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ των Borel υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ (δηλαδή, $\mu(\mathbb{R}) < +\infty$). Ορίζουμε $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$F(x) = \mu\big((-\infty, x]\big), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Αποδείξτε ότι η F είναι αύξουσα και δεξιά συνεχής (δηλαδή, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $\lim\limits_{y \to x^+} F(y) = F(x)$).

8. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία συνόλων στην $\mathcal{A}$ τέτοια ώστε $\mu(A_n) \to 0$ και $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_{n+1} \setminus A_n) < +\infty$. Αποδείξτε ότι $\mu(\limsup A_n) = 0$.

9. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Αποδείξτε ότι, για κάθε $A, B, C \in \mathcal{A}$ ισχύει ότι

$$\mu(A \triangle B) \leqslant \mu(A \triangle C) + \mu(C \triangle B).$$

[Η συμμετρική διαφορά δύο συνόλων A και B είναι το σύνολο $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.]

10. Έστω μ και ν δύο μέτρα στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$ που ικανοποιούν το εξής: για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $\mu(A) + \nu(X \setminus A) \leqslant \epsilon$.

Αποδείξτε ότι υπάρχει $B \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $\mu(B) = \nu(X \setminus B) = 0$.