ΣΕΜΦΕ
Μαθηματική Ανάλυση Ι
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 1 – ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1. Αποδείξτε ότι ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.

Λύση. Έστω ότι υπάρχει ρητός $q = \dfrac{m}{n}$ με $q^2 = 2$. Μπορούμε να υποθέσουμε επιπλέον, απλοποιώντας το κλάσμα $\frac{m}{n}$, ότι οι m, n δεν έχουν άλλους κοινούς διαιρέτες εκτός της μονάδας. Ειδικότερα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι δεν είναι και οι δύο άρτιοι. Έχουμε

$$q^2 = \frac{m^2}{n^2} = 2 \Rightarrow m^2 = 2n^2 \Rightarrow m^2 \text{ άρτιος } \Rightarrow m \text{ άρτιος } \Rightarrow m = 2k$$

Άρα

$$q^2 = \frac{(2k)^2}{n^2} = 2 \Rightarrow (2k)^2 = 2n^2 \Rightarrow 4k^2 = 2n^2 \Rightarrow n^2 = 2k^2 \Rightarrow n^2 \text{ άρτιος } \Rightarrow n \text{ άρτιος}$$

Συνεπώς, m, n και οι δύο άρτιοι, άτοπο.

Άσκηση 2. Τι λέει η Αρχιμήδεια Ιδιότητα του $\mathbb{N}$; Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα αυτή δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $-n < x < n$. Συμπεράνετε ότι το $\mathbb{Z}$ δεν είναι ούτε άνω φραγμένο ούτε κάτω φραγμένο.

Λύση. Η Αρχιμήδεια Ιδιότητα του $\mathbb{N}$ λέει ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $x < n$. Έστω $x \in \mathbb{R}$. Διακρίνουμε τρείς περιπτώσεις: $x < 0$ ή $x = 0$ ή $x > 0$.

1. Αν $x < 0$ τότε $-x > 0$ και επιλέγουμε $n \in \mathbb{N}$ με $-x < n$. Τότε $-n < x < 0 < n$.
2. Αν $x = 0$ οποιοδήποτε $n \in \mathbb{N}$ κάνει.
3. Αν $x > 0$ επιλέγουμε $n \in \mathbb{N}$ με $x < n$ και τότε $-n < 0 < x < n$.

Άσκηση 3. (α) Αποδείξτε ότι κάθε πεπερασμένο μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει μέγιστο και ελάχιστο.

(β) Τι λέει η ιδιότητα της Καλής διάταξης του $\mathbb{N}$; Χρησιμοποιώντας το (α) δώστε μια εναλλακτική απόδειξη της ιδιότητας αυτής.

(*Υπόδειξη: (α) Με επαγωγή στο πλήθος των στοιχείων του συνόλου. (β) Αν $A \subseteq \mathbb{N}$ μη κενό πάρτε ένα τυχαίο $n_0 \in A$ και αποδείξτε ότι* $\min A = \min\{n \in A : n \le n_0\}$.)

Λύση. (α) Με $|F|$ συμβολίζουμε το πλήθος των στοιχείων ενός $F \subseteq \mathbb{R}$. Έστω $p(n)$ η πρόταση: Αν $F \subseteq \mathbb{R}$ με $|F| = n$ τότε το F έχει ελάχιστο και μέγιστο στοιχείο. Για $n = 1$ το F είναι μονοσύνολο, $F = \{x\}$ και άρα $\max F = \min F = x$. Έστω ότι η $p(n)$ ισχύει για κάποιο $n = k \in \mathbb{N}$ και έστω $F \subseteq \mathbb{R}$ με $|F| = k + 1$. Αν $F = \{x_1, \ldots, x_{k+1}\}$, θέτουμε $F' = \{x_1, \ldots, x_k\}$. Αφού η $p(k)$ ισχύει και $|F'| = k$, το F' έχει ελάχιστο και μέγιστο. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε (πώς;) ότι $\max F = \max(\max F', x_{k+1})$ και $\min F = \min(\min F', x_{k+1})$. Άρα αν ισχύει η $p(k)$ τότε ισχύει και η $p(k+1)$. Από την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής η $p(n)$ ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(β) Η ιδιότητα της Καλής διάταξης του $\mathbb{N}$ λέει ότι κάθε μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}$ έχει ελάχιστο στοιχείο. Χρησιμοποιώντας το (α) μπορούμε να δώσουμε μια εναλλακτική απόδειξη της ιδιότητας αυτής ως εξής: Έστω $A \subseteq \mathbb{N}$ μη κενό και έστω $n_0 \in A$. Έστω $A_{n_0} = \{n \in A : n \le n_0\}$. Το A_{n_0} είναι πεπερασμένο αφού έχει το πολύ n_0 στοιχεία, μη κενό ($n_0 \in A_{n_0}$) και άρα από το (α) έχει ελάχιστο στοιχείο. Έστω $a_0 = \min A_{n_0}$. Ισχυριζόμαστε ότι $a_0 = \min A$. Πράγματι, έστω $a \in A$. Τότε είτε $a \le n_0$ ή $a > n_0$. Αν $a \le n_0$ τότε $a \in A_{n_0}$ και άρα $a_0 \le a$ (αφού $a_0 = \min A_{n_0}$). Αν $a > n_0$ τότε πάλι $a > a_0$, αφού $n_0 \ge a_0$. Άρα $a \ge a_0$ για κάθε $a \in A$.

Άσκηση 4. Αποδείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ κάθε σύνολο με n στοιχεία έχει 2^n υποσύνολα.

Λύση. Αν $n = 1$ δηλαδή $A = \{a_1\}$ μονοσύνολο τότε το A έχει δύο υποσύνολα το $\emptyset$ και το ίδιο το A. Άρα η πρόταση ισχύει για $n = 1$. Έστω ότι ισχύει για $n = k$. Θα δείξουμε ότι ισχύει και για $n = k+1$. Έστω $A = \{a_1, \ldots, a_{k+1}\}$ ένα σύνολο με $k+1$ στοιχεία. Θέτουμε $A' = \{a_1, \ldots, a_k\}$. Το A' έχει k-στοιχεία και άρα από επαγωγική υπόθεση έχει 2^k υποσύνολα. Παρατηρούμε ότι τα υποσύνολα του A χωρίζονται σε δύο ξένα μέρη: Σε αυτά τα υποσύνολα που δεν περιέχουν το a_{k+1} και σε εκείνα που το περιέχουν. Αυτά που δεν περιέχουν το a_{k+1} είναι ακριβώς τα υποσύνολα του A' και άρα είναι 2^k το πλήθος. Από την άλλη μεριά, ένα υποσύνολο $F \subseteq A$ που περιέχει το a_{k+1} γράφεται στην μορφή $F = F' \cup \{a_{k+1}$ με $F' \subseteq A'$. Παρατηρούμε επίσης ότι αυτή η αντιστοιχία $F \to F'$ για τα $F \subseteq A$ με $a_{k+1} \in F$ είναι 1-1. Άρα πάλι τα υποσύνολα του A που περιέχουν το a_{k+1} είναι και αυτά 2^k το πλήθος. Συνεπώς όλα τα υποσύνολα του A είναι $2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ το πλήθος.

Άσκηση 5. Έστω A μη κενό σύνολο. Με τον όρο *μετάθεση του* A εννοούμε κάθε απεικόνιση $f : A \to A$ που είναι 1-1 ($a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$) και επί ($f(A) = \{f(a) : a \in A\} = A$). Αποδείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ένα σύνολο με n στοιχεία έχει $n!$ μεταθέσεις (όπου $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$).

Λύση. Θα δείξουμε το εξής γενικότερο: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ οι 1-1 και επί απεικονίσεις μεταξύ δύο συνόλων με n στοιχεία είναι $n!$ το πλήθος. Για $n = 1$ είναι προφανές (μια μοναδική απεικόνιση). Έστω ότι αυτό ισχύει για $n = k$ και έστω A, B σύνολα με $k+1$ στοιχεία. Έστω $A = \{a_1, \ldots, a_{k+1}\}$ και $B = \{b_1, \ldots, b_{k+1}\}$. Θέτουμε $\mathcal{F} = \{f : A \to B : f \text{ 1-1 και επί }\}$ και για κάθε $1 \leq i \leq k+1$ θέτουμε $\mathcal{F}_i = \{f \in \mathcal{F} : f(a_1) = b_i\}$. Τότε $\mathcal{F} = \cup_{i=1}^{k+1} \mathcal{F}_i$ και $\mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_j = \emptyset$ για $i \neq j$. Παρατηρούμε επιπλέον για κάθε $1 \leq i \leq k+1$ ότι αν $f \in \mathcal{F}$ με $f(a_1) = b_i$, τότε η f στο $A' = \{a_2, \ldots, a_{k+1}\}$ είναι μια 1- και επί απεικόνιση από το A' στο $B' = \{b_j \in B : j \neq i\}$. Επειδή τα A' και B' έχουν πλήθος k από επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι το πλήθος κάθε $\mathcal{F}_i$ είναι $k!$. Άρα το πλήθος της $\mathcal{F}$ είναι $\underbrace{k! + \cdots + k!}_{(k+1)\text{-φορές}} = (k+1) \cdot k! = (k+1)!$.

Άσκηση 6. Έστω $A \subset \mathbb{R}$ μη κενό και $s \in \mathbb{R}$.

(α) Αν κάθε $s' > s$ είναι άνω φράγμα του A. Δείξτε ότι το s είναι και αυτό άνω φράγμα του A.

(β) Αν επιπλέον κάθε $s' < s$ δεν είναι άνω φράγμα του A δείξτε ότι $s = \sup A$

Λύση. (α) Έστω προς απαγωγή σε άτοπο ότι το s δεν ήταν άνω φράγμα του A τότε θα υπήρχε $a \in A$ με $s < a$. Αλλά τότε για $s' = \dfrac{s+a}{2}$ έχουμε ότι $s' > s$ αλλά

(β) Από το (α) και την υπόθεση ότι κάθε $s' < s$ δεν είναι άνω φράγμα του A προκύπτει ότι το s είναι το μικρότερο άνω φράγμα του A δηλαδή το supremum του.

Άσκηση 7. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και φραγμένο, $s = \sup A$ και $\tau = \inf A$.

(α) Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $a \in A$ τέτοιο ώστε $s - \varepsilon < a \leq s$.

(β) Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $a \in A$ τέτοιο ώστε $\tau \leq a < \tau + \varepsilon$.

Λύση. (α) Έστω $\epsilon > 0$. Τότε $s - \epsilon < s = \sup A$ και άρα το $s - \epsilon$ δεν είναι άνω φράγμα του A (το $\sup A$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A). Άρα υπάρχει $a \in A$ με $s - \epsilon < a$. Υποχρεωτικά $a \leq s$ αφού το $s = \sup A$ είναι άνω φράγμα του A.

(β) Έστω $\epsilon > 0$. Τότε $\inf A = \tau < \tau + \epsilon$ και άρα το $\tau + \epsilon$ δεν είναι κάτω φράγμα του A (το $\inf A$ είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του A). Άρα υπάρχει $a \in A$ με $a < \tau + \epsilon$. Υποχρεωτικά $\tau \leq a$ αφού το $\tau = \inf A$ είναι κάτω φράγμα του A.

Άσκηση 8. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και φραγμένο. Αν $I = [x, y]$ κλειστό διάστημα του $\mathbb{R}$ με $A \subseteq I$ δείξτε ότι $[\sup A, \inf A] \subseteq I$.

Λύση. Έστω $s = \sup A$ και $\tau = \inf A$. Αρκεί να δειχθεί ότι $s, \tau \in I$. Δείχνουμε ότι $s \in I$ (για το τ εργαζόμαστε ομοίως). Αν $s \notin I = [x, y]$ έχουμε ότι είτε $s < x$ είτε $y < s$. Αν $s < x$ τότε $a \leq s < x$ για όλα τα $a \in A$ άτοπο γιατί τότε $A \cap I = \emptyset$. Αν $y < s$ τότε το $y = s - \varepsilon < s$ για $\varepsilon > 0$ και άρα από το (α) υπάρχει $a_0 \in A$ με $y < a_0 \leq s$. Αλλά τότε $a_0 \notin I$, άτοπο αφού $a_0 \in A \subseteq I$.

Άσκηση 9. Έστω $A, B \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $a \in A$ και κάθε $b \in B$ ισχύει ότι $a \leq b$. Δείξτε ότι $\sup A \leq \inf B$.

Λύση. Από την υπόθεση έπεται ότι κάθε $b \in B$ είναι άνω φράγμα του A, οπότε $\sup A \leq b$ για οποιοδήποτε $b \in B$, αφού το $\sup A$ είναι το μικρότερο άνω φράγμα του A. Αυτό με την σειρά του σημαίνει ότι το $\sup A$ είναι κάτω φράγμα του B και άρα $\sup A \leq \inf B$ αφού το $\inf B$ είναι το μεγαλύτερο κάτω φράγμα του T.

Άσκηση 10. Έστω $a \in \mathbb{R}$. Χρησιμοποιώντας την πυκνότητα των ρητών αριθμών δείξτε ότι

$$\sup\{q \in \mathbb{Q} : q < a\} = \inf\{q \in Q : q > a\} = a$$

Λύση. Έστω $A = \{q \in \mathbb{Q} : q < a\}$. Το a είναι άνω φράγμα του A και άρα $\sup A \leq a$ (το $\sup A$ είναι το μικρότερο άνω φράγμα). Έστω προς απαγωγή σε άτοπο ότι $supA < a$. Λόγω πυκνότητας ρητών στο $\mathbb{R}$ υπάρχει $q \in Q$ με $\sup A < q < a$. Αλλά τότε $q \in A \Rightarrow q \leq \sup A$ (αφού $q \in \mathbb{Q}$ και $q < a$). Άτοπο αφού ταυτόξρονα $q > \sup A$.

Ομοίως έστω $B = \{q \in \mathbb{Q} : q > a\}$. Το a είναι κάτω φράγμα του B και άρα $a \leq \inf B$ (το $\inf B$ είναι το μεγαλύτερο κάτω φράγμα). Έστω προς απαγωγή σε άτοπο ότι $a < \inf B$. Λόγω πυκνότητας ρητών στο $\mathbb{R}$ υπάρχει $q \in Q$ με $a < q < \inf B$. Αλλά τότε $q \in B \Rightarrow \inf B \leq q$ (αφού $q \in \mathbb{Q}$ και $a < q$). Άτοπο, αφού ταυτόξρονα $\inf B < q$.

Άσκηση 11. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και φραγμένο. Θέτουμε $-A = \{-a : a \in A\}$. Δείξτε ότι

$$\sup(-A) = -\inf A \text{ και } \inf(-A) = -\sup A$$

Λύση. Δείχνουμε πρώτα ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει η ισοδυναμία

$$\text{Το } x \text{ είναι κάτω φράγμα του } A \Leftrightarrow \text{ Το } -x \text{ είναι άνω φράγμα του } -A \tag{1}$$

Πράγματι, x κάτω φράγμα του $A \Leftrightarrow x \leq a \; \forall a \in A \Leftrightarrow -x \geq -a, \; \forall a \in A \Leftrightarrow -x$ άνω φράγμα του $-A$.

Η (1) διατυπώνεται και ισοδύναμα με αρνήσεις ως εξής

$$\text{Το } x \text{ δεν είναι κάτω φράγμα του } A \Leftrightarrow \text{ Το } -x \text{ δεν είναι άνω φράγμα του } -A \tag{2}$$

Από την (1) και (2) μπορούμε να δούμε ότι

$$\text{Το } x \in \mathbb{R} \text{ είναι το μεγαλύτερο κάτω φράγμα του } A \Leftrightarrow \text{ Το } -x \text{ είναι το μικρότερο άνω φράγμα του } -A$$

Με άλλα λόγια $x = \inf A \Leftrightarrow -\inf A = \sup(-A) \Leftrightarrow \sup(-A) = -\inf A$ Θέτοντας $-A$ στην θέση του A παίρνουμε $\sup(-(-A)) = -\inf(-A) \Rightarrow \sup A = -\inf(-A) \Rightarrow \inf(-A) = -\sup A$.

Άσκηση 12. Έστω A και B δύο μη κενά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών. Θέτουμε

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

Δείξτε ότι αν τα A και B είναι άνω φραγμένα, τότε $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Λύση. Επειδή $a \leq \sup A$ για κάθε $a \in A$ και ομοίως $b \leq \sup B$ για κάθε $b \in B$ έχουμε ότι

$$a + b \leq \sup A + \sup B$$

για κάθε $a \in A$ και κάθε $b \in B$ και άρα το $\sup A + \sup B$ είναι άνω φράγμα του $A + B$. Μένει να δειχθεί ότι το $\sup A + \sup B$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του $A + B$, ισοδύναμα για κάθε $\epsilon > 0$ το $\sup A + \sup B - \epsilon$ δεν είναι άνω φράγμα του $A + B$.

Έστω $\epsilon > 0$. Επειδή $\sup A - \dfrac{\epsilon}{2} < \sup A$ υπάρχει $a \in A$ με $\sup A - \dfrac{\epsilon}{2} < a$. Ομοίως υπάρχει $b \in B$ με $\sup B - \dfrac{\epsilon}{2} < b$. Άρα

$$a + b > \left(\sup A - \frac{\epsilon}{2}\right) + \left(\sup B - \frac{\epsilon}{2}\right) = \sup A + \sup B - \epsilon$$

Υπάρχει συνεπώς στοιχείο του $A+B$ γνήσια μεγαλύτερο του $\sup A+\sup B-\epsilon$, δηλαδή το $\sup A+\sup B-\epsilon$ δεν είναι άνω φράγμα του $A+B$. Αποδείξαμε λοιπόν ότι το $\sup A+\sup B$ είναι άνω φράγμα του $A+B$ και κάθε αριθμός μικρότερος του $\sup A+\sup B$ δεν είναι. Άρα το $\sup A+\sup B$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του $A+B$, δηλαδή $\sup A+\sup B=\sup(A+B)$.

Άσκηση 13. Έστω A και B δύο μη κενά υποσύνολα *θετικών* πραγματικών αριθμών. Θέτουμε

$$A\cdot B=\{a\cdot b : a\in A, b\in B\}$$

Δείξτε ότι αν τα A και B είναι άνω φραγμένα, τότε $\sup(A\cdot B)=\sup A\cdot\sup B$.

Λύση. Επειδή $0<a\leq\sup A$ για κάθε $a\in A$ και ομοίως $0<b\leq\sup B$ για κάθε $b\in B$ έχουμε ότι $ab\leq\sup A\cdot\sup B$ για κάθε $a\in A$ και κάθε $b\in B$ και άρα το $\sup A\cdot\sup B$ είναι άνω φράγμα του $A\cdot B$. Μένει να δειχθεί ότι το $\sup A\cdot\sup B$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του $A\cdot B$, ισοδύναμα για κάθε $\epsilon>0$ το $\sup A\cdot\sup B-\epsilon$ δεν είναι άνω φράγμα του $A\cdot B$.

Έστω $\epsilon>0$ και έστω $\epsilon'=\dfrac{\epsilon}{\sup A+\sup B}$. Επιλέγουμε $a\in A$ με $a>\sup A-\epsilon'$ και $b\in B$ με $b>\sup B-\epsilon'$. Άρα $0<\sup A-a<\epsilon'$ και $0<\sup B-b<\epsilon'$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\sup A\cdot\sup B-ab&=\sup A\cdot\sup B-a\sup B+a\sup B-ab\\&=(\sup A-a)\sup B+a(\sup B-b)\\&<\epsilon'\sup B+a\epsilon'\\&\leq\epsilon'\sup B+\epsilon'\sup A\\&=(\sup B+\sup A)\epsilon'=\epsilon\end{aligned}$$

Άρα $\sup A\cdot\sup B-\epsilon<ab$, δηλαδή κάθε αριθμός μικρότερος του $\sup A\cdot\sup B$ δεν είναι άνω φράγμα του $A\cdot B$.