**ΣΑΤΜ**
**Μαθηματική Ανάλυση**
**ΦΥΛΛΑΔΙΟ 2**

**Άσκηση 1.** Δείξτε ότι $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

**Λύση.** Έχουμε

$$\begin{aligned}\sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\ &= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y}}{4} + \frac{e^{x+y} - e^{x-y} + e^{-x+y} - e^{-x-y}}{4} \\ &= \frac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{2} = \sinh(x+y)\end{aligned}$$

Επίσης,

$$\sinh(x-y) = \sinh(x + (-y)) = \sinh x \cosh(-y) + \cosh x \sinh(-y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y$$

**Άσκηση 2.** Δείξτε ότι $\lim\limits_{x \to -\infty} \tanh x = -1$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} \tanh x = +1$.

**Λύση.**

$$\lim_{x \to -\infty} \tanh x = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x\left(e^x - e^{-x}\right)}{e^x\left(e^x + e^{-x}\right)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{0-1}{0+1} = -1$$

$$\lim_{x \to -\infty} \tanh x = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}\left(e^x - e^{-x}\right)}{e^{-x}\left(e^x + e^{-x}\right)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

**Άσκηση 3.** Δείξτε ότι $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right) = \frac{4}{5}$.

**Λύση.** Έστω $\theta = \arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)$. Τότε $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos\theta \geq 0$ και $\sin\theta = -\frac{3}{5}$. Οπότε $\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta} = 4/5$.

**Άσκηση 4.** Βρείτε το $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$.

**Λύση.** Έστω $y = \arccos(3/5)$. Τότε $y \in [0, \pi]$ και $\cos y = 3/5$. Άρα $\sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = 4/5$. Οπότε $\sin(\arccos(3/5)) = \sin y = 4/5$.

**Άσκηση 5.** Βρείτε το $\tan\left(\arcsin\frac{12}{13}\right)$.

**Λύση.** Έστω $y = \arcsin(12/13)$. Τότε $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ και $\sin y = 12/13$. Άρα $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = 5/13$. Οπότε

$$\tan\left(\arcsin\frac{12}{13}\right) = \tan y = \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{12}{5}$$

**Άσκηση 6.** Δείξτε ότι αν $x \neq 0$ τότε

$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, \quad \text{αν } x > 0$$

και

$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}, \quad \text{αν } x < 0$$

**Λύση.** Θα δείξουμε την περίπτωση όπου $x > 0$ (Η περίπτωση $x < 0$ αντιμετωπίζεται ανάλογα). Αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

είναι σταθερή και ίση με $\pi/2$. Έχουμε

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

που σημαίνει ότι η $f(x), x > 0$ είναι σταθερή συνάρτηση. Επειδή

$$f(1) = \arctan 1 + \arctan 1 = 2 \arctan 1 = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

έπεται ότι $f(x) = f(1) = \pi/2$ δηλαδή $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$.

**Άσκηση 7.** Βρείτε το πολυώνυμο Taylor $T_2(x)$, της συνάρτησης $f(x) = e^x \cosh x$ τάξης $n = 2$ με κέντρο το $a = 0$.

**Λύση.** Έχουμε $f(0) = 1$, $f'(x) = e^x \cosh x + e^x \sinh x = e^x(\cosh x + \sinh x) = e^x \cdot e^x = e^{2x} \Rightarrow f'(0) = 1$, $f''(x) = 2e^{2x} \Rightarrow f''(0) = 2$. Άρα

$$T_2(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{2}{2!}x^2 = 1 + x + x^2.$$

**Άσκηση 8.** Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in [-1, 1]$,

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2} \tag{1}$$

**Λύση.** Θεωρούμε την συνάρτηση $F(x) = \arccos x + \arcsin x$, $x \in [-1, 1]$. Για κάθε $x \in (-1, 1)$ έχουμε

$$F'(x) = (\arccos x + \arcsin x)' = (\arccos x)' + (\arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

Από γνωστή συνέπεια του Θεωρήματος Μέσης Τιμής έπεται ότι η $F$ είναι σταθερή. Επειδή

$$F(0) = \arccos 0 + \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$$

έπεται ότι $F(x) = \dfrac{\pi}{2}$ για κάθε $x \in [-1, 1]$.

Άρα, $\arccos x + \arcsin x = \dfrac{\pi}{2}$, για κάθε $x \in [-1, 1]$.

**Άσκηση 9.** (α) Βρείτε τον τύπο του πολυωνύμου Taylor της συνάρτησης $f(x) = \cosh x$ τάξης $n = 4$ με κέντρο το $a = 0$.

(β) Βρείτε τον τύπο του πολυωνύμου Taylor της συνάρτησης $f(x) = \sinh x$ τάξης $n = 5$ με κέντρο το $a = 0$.

**Λύση.** Έχουμε $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ και άρα $f'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$, $f''(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$, $f^{(3)}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$ και $f^{(4)}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$. Συνεπώς, $f(0) = f''(0) = f^{(4)}(0) = 1$, και $f'(0) = f^{(3)}(0) = 0$. Άρα

$$T_4(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

Γενικά, για κα'θε $n \geq 0$, $T_{2n} = T_{2n+1}$ και

$$T_{2n}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

(β) Ανάλογα βρίσκουμε ότι

$$T_5(x) = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

Γενικά για κάθε $n \geq 0$, $T_{2n+1} = T_{2n+2}$ και

$$T_{2n+1}(x) = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

**Άσκηση 10.** (α) Βρείτε το πολυώνυμο Taylor $T_6(x)$ τάξης $n = 6$ με κέντρο το $a = 0$ της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

(β) Αντικαθιστώντας στο $T_6(x)$ το $x$ με το $x^2$ βρείτε το πολυώνυμο Taylor τάξης $n = 12$ με κέντρο το $a = 0$ της συνάρτησης $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(γ) Βρείτε το πολυώνυμο Taylor τάξης $n = 13$ με κέντρο το $a = 0$ της συνάρτησης $\arcsin x$.

**Λύση.** (α) Έχουμε

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-1/2}$$

Άρα

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1-x)^{-3/2},\ f''(x) = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}(1-x)^{-5/2},\ f^{(3)}(x) = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 2\cdot 2}(1-x)^{-7/2}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}(1-x)^{-9/2},\ f^{(5)}(x) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}(1-x)^{-11/2}\ f^{(6)}(x) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}(1-x)^{-13/2}$$

Συνεπώς,

$$f(0) = 1,\ f'(0) = \frac{1}{2},\ f''(0) = \frac{1\cdot 3}{2^2},\ f^{(3)}(0) = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3}$$

$$f^{(4)}(0) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^4},\ f^{(5)}(0) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2^5},\ f^{(6)}(0) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{2^6}$$

Οπότε το πολυώνυμο Taylor τάξης $n = 6$ με κέντρο το $a = 0$ της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ δίνεται από τον τύπο

$$T_6(x) = 1 + \frac{1}{2\cdot 1!}x + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^4\cdot 4!}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2^5\cdot 5!}x^5 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{2^6\cdot 6!}x^6$$

Επειδή

$$2^n \cdot n! = (2\cdot 2\cdot 2\cdot \cdots \cdot 2)\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot n) = 2\cdot 4\cdot 6\cdot \cdots \cdot (2n)$$

έχουμε τελικά

$$T_6(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot x^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot x^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}x^5 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12}x^6$$

(β) Αντικαθιστούμε το $x$ με το $x^2$ και παίρνουμε το πολυώνυμο

$$1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^8 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}x^{10} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12}x^{12}$$

(γ) Επειδή $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ η παράγωγος του πολυωνύμου Taylor τάξης $n$ της συνάρτησης $g(x) = \arcsin x$ είναι το πολυώνυμο Taylor τάξης $n-1$ της συνάρτησης $g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (δείτε και σχετική άσκηση στο Φυλλάδιο 1). Άρα, από το (β), το πολυώνυμο που ζητάμε είναι το

$$x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\frac{x^9}{9} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}\frac{x^{11}}{11} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12}\frac{x^{13}}{13}$$