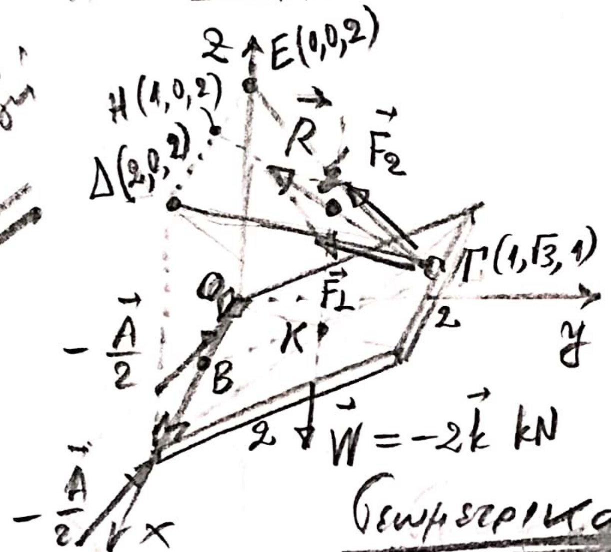
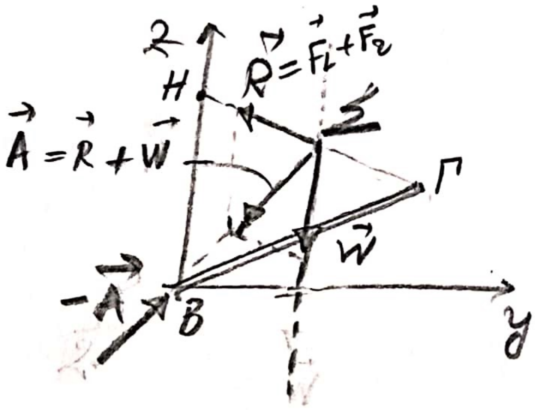
ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΥΝΙΣΤΑΜΕΝΗΣ ΔΥΝΑΜΗΣ

(μόνο για συντρέχουσες δυνάμεις, αφού όχι ύπαρξη ροπής)

Παράδειγμα ισορροπίας στον χώρο (Δίνεται γεωμετρία και $\vec{W}$, ζητούνται $\vec{F}_1, \vec{F}_2$)

Συμμετρία, ώστε αποφυγή ροπής

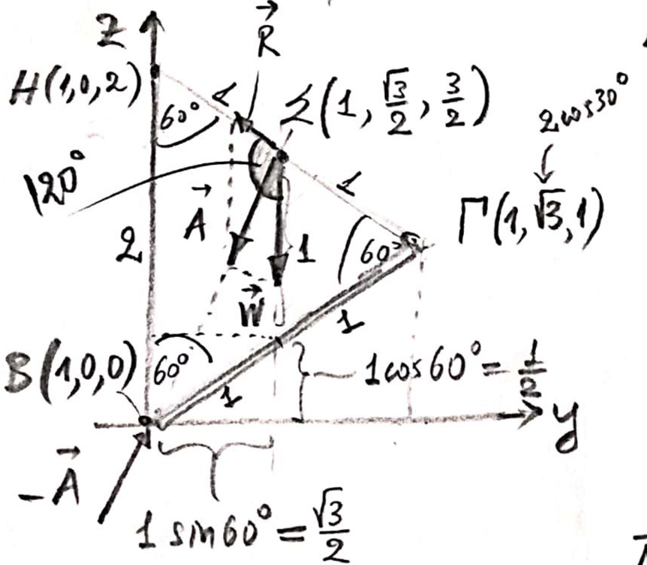




Γεωμετρικά: καθορίζουμε την αίσθηση της σύνθεσης των δυνάμεων στο χώρο, και αν χρειάζεται και της ισορροπίας:

$$\frac{\vec{A}}{2}+\frac{\vec{A}}{2}-\vec{A}=\vec{0}$$

Πάμε να το δούμε **Αλγεβρικά**, με τις συνιστώσες των δυνάμεων:



$\vec{A}=A\vec{e}_{\Sigma B}$, $\vec{e}_{\Sigma B}=\dfrac{\vec{\Sigma B}}{|\vec{\Sigma B}|}$

$$\vec{\Sigma B}=(1-1)\vec{i}+\left(0-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\vec{j}+\left(0-\frac{3}{2}\right)\vec{k}=$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}-\frac{3}{2}\vec{k}$$

$$|\vec{\Sigma B}|=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{9}{4}}=\sqrt{3}$$

$$\vec{e}_{\Sigma B}=-\frac{1}{2}\vec{j}-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{k}$$

$\vec{A}=A\left(-\frac{1}{2}\vec{j}-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{k}\right)$, θα βρω το A από το ότι η γωνία$(\vec{R},\vec{W})=120°$.

$$\vec{R}=\vec{A}-\vec{W}=-\frac{A}{2}\vec{j}-\frac{A\sqrt{3}}{2}\vec{k}+2\vec{k}=-\frac{A}{2}\vec{j}+\left(\frac{4}{2}-\frac{A\sqrt{3}}{2}\right)\vec{k}$$

(12)

$$\vec{R}\cdot\vec{W} = |\vec{R}||\vec{W}|\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}|\vec{R}||\vec{W}| =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\cancel{2}\cdot\sqrt{\frac{A^2}{4}+\frac{16+3A^2-8\sqrt{3}A}{4}} = -\frac{1}{2}\sqrt{4A^2+\underset{(4\cdot4)}{16}-\underset{(2\cdot4)}{8\sqrt{3}A}} =$$

$$= -\sqrt{A^2-2\sqrt{3}A+4}$$

$$\vec{R}\cdot\vec{W} = \left(-\frac{A}{2}\vec{j}+\frac{4-A\sqrt{3}}{2}\vec{k}\right)\cdot(-2\vec{k}) = A\sqrt{3}-4 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{A^2-2\sqrt{3}A+4} = 4-A\sqrt{3} \xrightarrow{(\dots)^2}$$

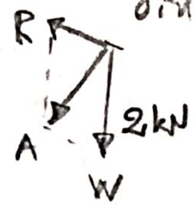
$$\Rightarrow A^2-2\sqrt{3}A+4 = 16+3A^2-8\sqrt{3}A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2A^2-6\sqrt{3}A+12=0 \Rightarrow A^2-3\sqrt{3}A+6=0$$

$$A = \frac{3\sqrt{3}\pm\sqrt{27-4\cdot6}}{2} = \frac{3\sqrt{3}\pm\sqrt{3}}{2}$$

(+) $2\sqrt{3} = \cancel{3.46\ kN}$ απορρ.

(−) $\sqrt{3} = 1.73\ kN$ δεκτή



Άρα $\vec{A} = \sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}\vec{j}-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{k}\right) \Rightarrow$

$$\boxed{\vec{A} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}-\frac{3}{2}\vec{k}}\ kN$$

Άρα $\boxed{\vec{R}} = \vec{A}-\vec{W} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}-\frac{3}{2}\vec{k}-(-2)\vec{k} = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}+\frac{1}{2}\vec{k}}$ kN

$$\vec{F}_1 = F_1\vec{e}_{\Gamma\Delta}, \quad \vec{e}_{\Gamma\Delta} = \frac{\vec{\Gamma\Delta}}{|\vec{\Gamma\Delta}|}, \quad \vec{\Gamma\Delta} = (2-1)\vec{i}+(0-\sqrt{3})\vec{j}+(2-1)\vec{k} =$$

$$= \vec{i}-\sqrt{3}\vec{j}+\vec{k}$$

$$|\vec{\Gamma\Delta}| = \sqrt{1+3+1} = \sqrt{5}$$

$$\vec{e}_{\Gamma\Delta} = \frac{\vec{i}}{\sqrt{5}}-\sqrt{\frac{3}{5}}\vec{j}+\frac{\vec{k}}{\sqrt{5}}, \quad \vec{F}_1 = F_1\left(\frac{\vec{i}}{\sqrt{5}}-\sqrt{\frac{3}{5}}\vec{j}+\frac{\vec{k}}{\sqrt{5}}\right)\ kN$$

$$\vec{F}_2 = F_2\vec{e}_{\Gamma E}, \quad \vec{e}_{\Gamma E} = \frac{\vec{\Gamma E}}{|\vec{\Gamma E}|}, \quad \vec{\Gamma E} = (0-1)\vec{i}+(0-\sqrt{3})\vec{j}+(2-1)\vec{k} =$$

$$= -\vec{i}-\sqrt{3}\vec{j}+\vec{k}$$

$$|\vec{\Gamma E}| = \sqrt{5}$$

$$\vec{e}_{\Gamma E} = -\frac{\vec{i}}{\sqrt{5}}-\sqrt{\frac{3}{5}}\vec{j}+\frac{\vec{k}}{\sqrt{5}}, \quad \vec{F}_2 = F_2\left(-\frac{\vec{i}}{\sqrt{5}}-\sqrt{\frac{3}{5}}\vec{j}+\frac{\vec{k}}{\sqrt{5}}\right)\ kN$$

Προφανώς, λόγω συμμετρίας $F_2 = F_1 = F$

13

Και αφού $\vec{R}=\vec{F_1}+\vec{F_2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}+\frac{1}{2}\vec{k} = F\left[\cancel{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}^{0}\vec{i} -2\sqrt{\frac{3}{5}}\vec{j}+\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{k}\right] =$$

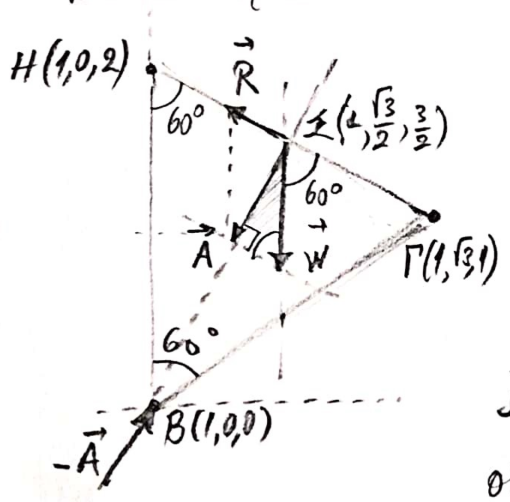
$$= F\left(-2\sqrt{\frac{3}{5}}\vec{j}+\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{k}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\vec{j}) & F\,2\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow F=\frac{\sqrt{5}}{4}\ kN \\ (\vec{k}) & F\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{2} \Rightarrow F=\frac{\sqrt{5}}{4}\ (\text{ok}) ✓ \end{cases}$$

Άρα $\boxed{\vec{F_1} = \frac{\sqrt{5}}{4}\left(\frac{\vec{i}}{\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\vec{j}+\frac{\vec{k}}{\sqrt{5}}\right)} = \boxed{\frac{\vec{i}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}\vec{j}+\frac{\vec{k}}{4}\ kN}$

$$\boxed{\vec{F_2} = \frac{\sqrt{5}}{4}\left(-\frac{\vec{i}}{\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\vec{j}+\frac{\vec{k}}{\sqrt{5}}\right)} = \boxed{-\frac{\vec{i}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}\vec{j}+\frac{\vec{k}}{4}\ kN}$$

Ευκολότερος τρόπος υπολογισμού $|\vec{A}|=A$, $\vec{R}$, $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$



Νόμος ημιτόνων

$$\frac{W}{\sin 90^\circ} = \frac{A}{\sin 60^\circ} \Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{A}{\sqrt{3}/2} \Rightarrow \underline{A=\sqrt{3}}$$

$$\frac{W}{\sin 90^\circ} = \frac{R}{\sin 30^\circ} \Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{R}{1/2} \Rightarrow \underline{R=1},$$

οπότε το A θα μπορούσε μην είχε υπολογισθεί καθόλου και να υπολογισθεί αμέσως το $\vec{R}$. Θα ήταν $\vec{R}=R\vec{e}_{ΓΗ}$

$\vec{e}_{ΓΗ} = \frac{\vec{ΓΗ}}{|\vec{ΓΗ}|}$, $\vec{ΓΗ} = (1-1)\vec{i}+(0-\sqrt{3})\vec{j}+(2-1)\vec{k} = -\sqrt{3}\vec{j}+\vec{k}$

$|\vec{ΓΗ}| = \sqrt{\sqrt{3}^2+1^2} = 2$, $\vec{e}_{ΓΗ} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}+\frac{\vec{k}}{2}$

$\vec{R} = \underline{1}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}+\frac{\vec{k}}{2}\right)$ ✓, … $\vec{F_1}=\dots$, $\vec{F_2}=\dots$