ΣΑΤΜ
Μαθηματική Ανάλυση
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 1

♣ Ο γενικός τύπος του πολυωνύμου Taylor με κέντρο το $a = 0$ είναι

$$T_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

♠ Με $\cos x$ συμβολίζουμε το *συνημίτονο του* x και με $\sin x$ το *ημίτονο του* x.

Άσκηση 1. Βρείτε τα πολυώνυμα Taylor έως και τάξης $n \leq 4$ της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $x \in (-1, 1)$ με κέντρο το $a = 0$.

Λύση. Έχουμε

$$f'(x) = (1-x)^{-2}, \quad f''(x) = 2(1-x)^{-3} \quad f^{(3)}(x) = 3!(1-x)^{-4}, \quad f^{(4)}(x) = 4!(1-x)^{-4}$$

και άρα

$$f'(0) = 1,\ f''(0) = 2,\ f^{(3)}(0) = 3!,\ f^{(4)}(0) = 4!$$

Οπότε

$$T_0(x) = 1,\ T_1(x) = 1 + x,\ T_2(x) = 1 + x + x^2,\ T_3(x) = 1 + x + x^2 + x^3,\ T_4(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$$

Γενικά

$$T_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

Άσκηση 2. Βρείτε τα πολυώνυμα Taylor έως και τάξης $n \leq 4$ της συνάρτησης $f(x) = \ln(1 + x)$, για $x \in (-1, +\infty)$ με κέντρο το $a = 0$

Λύση. Έχουμε $f'(x) = (1+x)^{-1}$, $f''(x) = -(1+x)^{-2}$, $f^{(3)}(x) = -2(1+x)^{-3}$, $f^{(4)}(x) = 2 \cdot 3(1+x)^{-4} = 3!(1+x)^{-4}$. Άρα $f'(0) = 1$, $f''(0) = -1$, $f^{(3)}(0) = -2$ και $f^{(4)}(0) = 3!$. Συνεπώς, τα πολυώνυμα Taylor της $f(x) = \ln(x+1)$, $x \in (-1, +\infty)$ με κέντρο το $a = 0$ είναι τα εξής:

$$T_0(x) = 0, \quad T_1(x) = \frac{x}{1}, \quad T_2(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2}, \quad T_3(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}, \quad \ldots$$

Γενικά, αποδεικνύεται ότι για $n \geq 1$,

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n (n-1)!(1+x)^{-n}$$

Άρα

$$f^{(n)}(0) = (-1)^n (n-1)!$$

και συνεπώς το πολυώνυμο Taylor της συνάρτησης $f(x) = \ln(x+1)$ τάξης n με κέντρο το $a = 0$ δίνεται από τον γενικό τύπο

$$T_n(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}. \tag{1}$$

Άσκηση 3. (α) Βρείτε τα πολυώνυμα Taylor $T_n(x)$ έως και τάξης $n \leq 5$ της συνάρτησης $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$ με κέντρο το $a = 0$.

(β) Δείξτε ότι $|\cos x - T_5(x)| \leq \dfrac{|x|^6}{6!}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση. (α) Έχουμε, $f'(x) = (\cos x)' = -\sin x$, $f''(x) = (-\sin x)' = -\cos x$, $f^{(3)}(x) = (-\cos x)' = \sin x$, $f^{(4)}(x) = (\sin x)' = \cos x = f(x)$, $f^{(5)}(x) = -\sin x$ και άρα $f(0) = \cos 0 = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$, $f^{(3)}(0) = 0$, $f^{(4)}(0) = 1 = f(0)$, $f^{(5)}(0) = 0$. Συνεπώς,

$$T_0(x) = T_1(x) = 1, \quad T_2(x) = T_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2}, \quad T_4(x) = T_5(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

Γενικά, αποδεικνύεται ότι τα πολυώνυμα Taylor της $f(x) = \sin x$ τάξης n με κέντρο το $a = 0$ δίνονται από τον γενικό τύπο

$$T_{2n}(x) = T_{2n+1}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \tag{2}$$

(β) Από τον Τύπο Taylor για $n = 5$ έχουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει ξ μεταξύ του 0 και x τέτοιο ώστε

$$f(x) = T_5(x) + \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!} x^6$$

Επειδή $f^{(5)}(x) = -\sin x \Rightarrow f^{(6)}(x) = -\cos x$. Άρα

$$|\cos x - T_5(x)| = \Big| -\frac{\cos\xi}{6!} x^6 \Big| \leq \frac{|x|^6}{6!}$$

Άσκηση 4. (α) Βρείτε τα πολυώνυμα Taylor $T_n(x)$ έως και τάξης $n \leq 4$ της συνάρτησης $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ με κέντρο το $a = 0$.

(β) Δείξτε ότι $|\sin x - T_4(x)| \leq \frac{|x|^5}{5!}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση. (α) Βλέπουμε ότι $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f^{(3)}(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$. Άρα

$$T_0(x) = 0, \quad T_1(x) = T_2(x) = \frac{x}{1!} = x, \quad T_3(x) = T_4(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} = x - \frac{x^3}{6}$$

Γενικά, αποδεικνύεται ότι τα πολυώνυμα Taylor της $f(x) = \sin x$ τάξης n με κέντρο το $a = 0$ δίνονται από τον γενικό τύπο

$$T_{2n+1}(x) = T_{2n+2}(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{3}$$

(β) Από τον Τύπο Taylor για $n = 4$ έχουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει ξ μεταξύ του 0 και x τέτοιο ώστε

$$f(x) = T_4(x) + \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} x^5 \Rightarrow \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{\cos\xi}{5!} x^5$$

Άρα

$$|\sin x - T_4(x)| = \Big|\frac{\cos\xi}{5!} x^5\Big| \leq \frac{|x|^5}{120}$$

Άσκηση 5. *(α) Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{cx}$ όπου $c \in \mathbb{R}$ σταθερά με $c \neq 0$. Δώστε τον γενικό τύπο του πολυωνύμου Taylor της f με κέντρο το $a = 0$.*

(β) Δώστε τον τύπο του πολυωνύμου Taylor της συνάρτησης $f(x) = e^{-x}$ τάξης n με κέντρο το $a = 0$.

(γ) Δώστε τον τύπο του πολυωνύμου Taylor της συνάρτησης $f(x) = \sqrt[3]{e^x}$ τάξης n με κέντρο το $a = 0$.

Λύση. (α) Παρατηρούμε ότι $f'(x) = ce^x$, $f''(x) = c^2 e^x$ και γενικά $f^{(n)}(x) = c^n e^x$ για κάθε $n \geq 0$. Άρα $f^{(n)}(x) = c^n$, οπότε το πολυώνυμο Taylor τάξης n της συνάρτησης $f(x) = e^{cx}$ με κέντρο το $a = 0$, δίνεται από τον τύπο

$$T_n(x) = 1 + \frac{c}{1!} x + \frac{c^2}{2!} x^2 + \cdots + \frac{c^n}{n!} x^n$$

(β) Από το (α) για $c = -1$ έχουμε

$$T_n(x) = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^n}{n!}$$

(γ) Έχουμε $f(x) = e^{\frac{x}{3}}$ και άρα $f^{(n)}(x) = \dfrac{1}{3^n} f(x)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (εδώ είναι $c = 1/3$). Ειδικότερα, $f^{(n)}(0) = \dfrac{1}{3^n}$ και άρα

$$T_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = 1 + \frac{x}{3 \cdot 1!} + \frac{x^2}{3^2 \cdot 2!} + \cdots + \frac{x^n}{3^n \cdot n!}$$

Άσκηση 6. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ απεριόριστα παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν το πολυώνυμο Taylor της f τάξης n με κέντρο το $x_0 = 0$ δίνεται από τον τύπο $T_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n$ υπολογίστε την $f^{(n)}(0)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ποιά είναι η $f^{(2024)}(0)$?

Λύση. Το πολυώνυμο Taylor της f τάξης n με κέντρο το $x_0 = 0$ δίνεται από τον τύπο

$$T_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Άρα $T_n(x) = f(0) + \dfrac{f'(0)}{1!}x + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n$ και συνεπώς $f(0) = 1,\quad \dfrac{f'(0)}{1!} = 2,\ \dfrac{f''(0)}{2!} = 3, \ldots$ και γενικά

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = n + 1$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα

$$f^{(n)}(0) = n!(n+1) = (n+1)!$$

Ειδικότερα, $f^{(2024)}(0) = 2025!$.

Άσκηση 7. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τρείς φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Βρείτε το πολυώνυμο Taylor τάξης $n = 3$ και κέντρου $x_0 = 0$ της συνάρτησης $g = f^2$ (δηλαδή της συνάρτησης $g(x) = f^2(x) = f(x) \cdot f(x)$), αν το αντίστοιχο πολυώνυμο της f είναι $T(x) = 1 + x + x^2 + x^3$.

Λύση. Έχουμε $T_2(x) = 1 + x + x^2 + x^3 = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$ και άρα

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 2, \quad \text{και } f'''(0) = 3! = 6$$

Επιπλέον $g' = (f^2)' = 2ff'$,
$g'' = (g')' = (2ff')' = 2f'f' + 2ff'' = 2(f')^2 + 2ff''$,
$g''' = (g'')' = (2(f')^2 + 2ff')' = 4f'f'' + (2ff'')' = 4f'f'' + 2f'f'' + 2ff'''$
και άρα

$$g(0) = f(0)f(0) = 1,\ g'(0) = 2,\ g''(0) = 6,\ g'''(0) = 8 + 4 + 12 = 24$$

Συνεπώς, το πολυώνυμο Taylor τάξης $n = 3$ και κέντρου $x_0 = 0$ της συνάρτησης $g = f^2$ είναι το πολυώνυμο

$$1 + 2x + \frac{6}{2}x^2 + \frac{24}{3!}x^3 = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$$

Άσκηση 8. (α) Έστω $n \geq 0$ και $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $n+1$-φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν $T_{n+1}(x)$ είναι το πολυώνυμο Taylor τάξης n της f με κέντρο ένα $a \in \mathbb{R}$ δείξτε ότι η παράγωγος $T'_{n+1}(x)$ του $T_{n+1}(x)$ είναι το πολυώνυμο Taylor τάξης n της f' με κέντρο το a.

Λύση. Έχουμε

$$T_{n+1}(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

και άρα

$$\begin{aligned} T'_{n+1}(x) &= 0 + \frac{f'(a)}{1!} + 2\cdot\frac{f''(a)}{2!}(x-a) + \cdots + (n+1)\cdot\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^n \\ &= f'(a) + \frac{f''(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n+1)}(a)}{n!}(x-a)^n \end{aligned}$$

Θέτοντας $g = f'$ παρατηρούμε ότι $g^{(k)} = f^{(k+1)}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και άρα

$$T'_{n+1}(x) = g(a) + \frac{g'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{g^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

δηλαδή η παράγωγος $T'_{n+1}(x)$ του $T_{n+1}(x)$ είναι το πολυώνυμο Taylor τάξης n της $g = f'$ με κέντρο το a.