Μαθηματική Ανάλυση

Σημειώσεις από τις παραδόσεις

Σχολή Τοπογράφων Μηχανικών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Αθήνα – 2024

Περιεχόμενα

1 ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ TAYLOR 1

1.1 Συμβολισμοί . . . 1

1.2 Πολυώνυμα Taylor . . . 2

1.2.1 Προκαταρκτικά . . . 2

1.2.2 Ορισμός πολυωνύμων Taylor . . . 2

1.3 Το Θεώρημα Taylor . . . 3

1.4 Απόδειξη του Θεωρήματος Taylor για $n = 1$ . . . 5

1.5 Παράρτημα: Αναπτύγματα Taylor . . . 6

2 ΟΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΚΑΙ ΟΙ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ 9

2.1 Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις . . . 9

2.1.1 Η συνάρτηση τόξο εφαπτομένης. . . . 9

2.1.2 Η συνάρτηση τόξο συνημιτόνου. . . . 9

2.1.3 Η συνάρτηση τόξο ημιτόνου. . . . 10

2.1.4 Παράγωγοι των αντίστροφων τριγωνομετρικών . . . 10

2.2 Οι υπερβολικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις . . . 12

2.2.1 Η συνάρτηση υπερβολικό συνημίτονο. . . . 12

2.2.2 Η συνάρτηση υπερβολικό ημίτονο. . . . 13

2.2.3 Η συνάρτηση υπερβολική εφαπτομένη. . . . 14

2.2.4 Αντίστροφες Υπερβολικές Συναρτήσεις . . . 14

3 ΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ 17

3.1 Βασικοί ορισμοί και Ολοκληρώσιμες συναρτήσεις . . . 17

3.1.1 Βασικοί ορισμοί . . . 17

3.1.2 Ολοκληρωσιμότητα συναρτήσεων . . . 18

3.2 Παράγωγος και Ολοκλήρωμα . . . 18

3.2.1 Το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού . . . 18

3.2.2 Το αόριστο Ολοκλήρωμα . . . 20

3.2.3 Συνεχείς συναρτήσεις και ολοκλήρωση . . . 21

3.3 Βασικές ιδιότητες Ολοκληρώματος και Μεθοδοι Ολοκληρωσης . . . 21

3.3.1 Βασικές ιδιότητες . . . 21

3.3.2 Ολοκλήρωση κατά παράγοντες . . . 21

3.3.3 Ολοκλήρωση με αλλαγή μεταβλητής . . . 22

3.4 Μερικές γεωμετρικές Εφαρμογές του ολοκληρώματος 24
3.4.1 Εμβαδά επίπεδων χωρίων 24
3.4.2 Μήκος επίπεδης καμπύλης 25
3.5 Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων 26

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ TAYLOR

Θα λέγαμε ότι οι πιο απλές πραγματικές συναρτήσεις είναι οι *πολυωνυμικές*, δηλαδή οι συναρτήσεις της μορφής

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

όπου $a_0, a_1, \ldots, a_n$ σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Στις πολυωνυμικές συναρτήσεις μπορούμε να βρούμε σχετικά εύκολα τις τιμές τους και γενικά να μελετήσουμε τις ιδιότητές τους. Όμως η πλειονότητα των συναρτήσεων που χρησιμοποιούμε στην πράξη είναι συναρτήσεις που δεν μπορούν να γραφούν ως πολυώνυμα όπως πχ. οι εκθετικές συναρτήσεις a^x, η λογαριθμική συνάρτηση $\ln x$, οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις $\cos x$ (συνημίτονο του x), $\sin x$ (ημίτονο του x) $\tan x$ (εφαπτομένη του x) κλπ. Το Θεώρημα Taylor λέει ότι κάτω από κάποιες προυποθέσεις ότι για πολλές μη πολυωνυμικές συναρτήσεις ορίζεται μια συγκεκριμένη ακολουθία πολυωνύμων που πλησιάζει οσο κοντ·α θέλουμε την συνάρτηση.

1.1 Συμβολισμοί

Ορισμός 1.1.1. *(n παραγοντικό) Για κάθε ακέραιο $n \geq 1$ με $n!$ συμβολίζουμε το γινόμενο όλων των θετικών ακεραίων που είναι μικρότεροι ή ίσοι με το n, δηλαδή*

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \tag{1.1.1}$$

Επίσης ορίζουμε

$$0! = 1 \tag{1.1.2}$$

Πχ. $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, κοκ. Παρατηρείστε ότι για κάθε ακέραιο $n \geq 0$ ισχύει ότι

$$(n+1)! = n!(n+1) \tag{1.1.3}$$

Ορισμός 1.1.2. *(n-τάξης παράγωγος) Αν $f : I \to \mathbb{R}$ είναι μία πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα διάστημα I του $\mathbb{R}$. Για κάθε ακέραιο $n \geq 1$ με $f^{(n)}$ συμβολίζουμε την παράγωγο n-τάξης της f. Επίσης θέτουμε $f^{(0)} = f$.*

Πχ. αν $n \geq 1$ ακέραιος και $f(x) = x^n$ τότε δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι ισχύει ο τύπος

$$f^{(n)}(x) = n! \tag{1.1.4}$$

1.2 Πολυώνυμα Taylor

1.2.1 Προκαταρκτικά

Αν $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ μια πολυωνυμική συνάρτηση τότε μπορεί να δειχθεί ότι οι συντελεστές $a_0, a_1, \ldots, a_n$ του $p(x)$ δίνονται από την σχέση

$$a_k = \frac{p^{(k)}(0)}{k!} \tag{1.2.1}$$

για κάθε $k = 0, \ldots, n$. Δηλαδή,

$$a_0 = p(0),\ a_1 = p'(0),\ a_2 = \frac{p''(0)}{2},\ a_3 = \frac{p'''(0)}{3!} \ldots$$

Συνεπώς το $p(x)$ γράφεται και στην μορφή

$$p(0) + \frac{p'(0)}{1!}x + \frac{p''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n \tag{1.2.2}$$

Γενικότερα αν θεωρήσουμε πολυωνυμικές συναρτήσεις της μορφής

$$p(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n$$

όπου $a \in \mathbb{R}$ σταθερά, τότε αποδεικνύεται ότι ισχύει ότι για κάθε $k = 0, \ldots, n$, ο συντελεστής a_k σχετίζεται με την k-τάξης παράγωγο της p στο a, $p^{(k)}(a)$, μέσω του τύπου

$$a_k = \frac{p^{(k)}(a)}{k!} \tag{1.2.3}$$

Συνεπώς αντίστοιχα το $p(x)$ γράφεται και στην μορφή

$$p(x) = p(a) + \frac{p'(a)}{1!}(x-a) + \frac{p''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{1.2.4}$$

1.2.2 Ορισμός πολυωνύμων Taylor

Γενικεύοντας τον τύπο (1.2.4) θέτοντας στην θέση του $p(x)$ μια n-φορές παραγωγίσιμη πραγματική συνάρτηση $f(x)$ δίνουμε τον εξής ορισμό.

Ορισμός 1.2.1. *Έστω I ανοικτό διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f : I \to \mathbb{R}$. Έστω $n \geq 1$ ακέραιος και έστω ότι η f είναι n- φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Τέλος έστω $a \in I$. Το πολυώνυμο*

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{1.2.5}$$

*καλείται **πολυώνυμο Taylor τάξης** n **της** f **με κέντρο το** a.*

Το σταθερό πολυώνυμο $T_0(x) = f(a)$ θεωρείται ως το πολυώνυμο Taylor τάξης 0 της f με κέντρο το a.

Χρησιμοποιώντας το σύμβολο του αθροίσματος "$\sum$" και τις συμβάσεις $f^{(0)}(x) = f(x)$ και $0! = 1$, το πολυώνυμο Taylor τάξης n της f με κέντρο το a γράφεται σύντομα με τον τύπο

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \tag{1.2.6}$$

Στην ειδική περίπτωση όπου $a = 0$ το πολυώνυμο Taylor τάξης n της f με κέντρο το $a = 0$ παίρνει την πιο απλή μορφή

$$T_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \tag{1.2.7}$$

Όταν μια συνάρτηση είναι απεριόριστα παραγωγίσιμη τότε ορίζονται τα πολυώνυμα Taylor οποιασδήποτε τάξης της f. Παρατηρείστε επίσης ότι από τις (1.2.4) και (1.2.5) έχουμε ότι αν η f είναι πολυωνυμική βαθμού n,

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n$$

τότε τα πολυώνυμα Taylor τάξης n και πάνω με κέντρο το a ταυτίζονται με την f.

Παράδειγμα 1.2.2. Για κάθε ακέραιο $n \geq 1$ το πολυώνυμο Taylor τάξης n της $f(x) = e^x$ με κέντρο $a = 0$ έχει τύπο

$$T_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}. \tag{1.2.8}$$

Πράγματι, $f^{(k)}(x) = e^x$ και άρα $f^{(k)}(0) = 1$, για κάθε $k \geq 0$. Αντικαθιστώντας στην (1.2.7) παίρνουμε την (1.2.8).

1.3 Το Θεώρημα Taylor

Η συνάρτηση f και τα πολυώνυμα Taylor της f όταν η f δεν είναι πολυώνυμο είναι αναγκαστικά διαφορετικές συναρτήσεις. Μια εκτίμηση για το πόσο διαφέρουν δίνεται από το Θεώρημα Taylor που θα παρουσιάσουμε στην συνέχεια. Το Θεώρημα Taylor καλείται και ***Θεώρημα Μέσης Τιμής ανώτερης τάξης*** γιατί στην ουσία όπως θα δούμε είναι μια γενίκευση του κλασσικού Θεω΄ρηματος Μέσης Τιμής. Θυμίζουμε ότι το Θεώρημα Μέσης Τιμής λέει το εξής.

Θεώρημα 1.3.1. ***(Θεώρημα Μέσης Τιμής)*** *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση τέτοια ώστε:*

(α) Η f συνεχής στο $[a,b]$.

(β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a,b).

Τότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τέτοιος ώστε

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi) \tag{1.3.1}$$

Για να διατυπώσουμε το Θεώρημα Taylor θα χρειασθούμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 1.3.2. *Έστω $n \geq 0$ ακέραιος και I διάστημα του $\mathbb{R}$. Αν $n \geq 1$ με $C^n(I)$ θα συμβολίζουμε το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f : I \to \mathbb{R}$ που έχουν συνεχείς παραγώγους στο I τουλάχιστον έως και τάξης n. Αν $n = 0$ με $C^0(I)$ θα συμβολίζουμε το σύνολο όλων των συνεχών συναρτήσεων $f : I \to \mathbb{R}$.*

Θεώρημα 1.3.3. (***Θεώρημα Taylor***) *Έστω $n \geq 0$ ακέραιος και $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση τέτοια ώστε:*

(α) $f \in C^n([a,b])$.

(β) *Η $f^{(n)}$ είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a,b), δηλαδή η $f^{(n+1)}(x)$ ορίζεται για κάθε $x \in (a,b)$.*

Τότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τέτοιος ώστε

$$\frac{f(b) - T_n(b)}{(b-a)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \tag{1.3.2}$$

όπου T_n το πολυώνυμο Taylor τάξης n της f με κέντρο το a. Ισοδύναμα, αν θέσουμε

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

τότε

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \tag{1.3.3}$$

Το $R_n(x)$ καλείται ***υπόλοιπο Taylor τάξης*** n ***της*** f ***με κέντρο το*** a. Στην περίπτωση $n = 0$ το Θεώρημα 1.3.3 είναι ουσιαστικά το κλασσικό Θεώρημα Μέσης Τιμής. Πράγματι, $T_0(x) = f(a)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και άρα $f(b) - T_0(b) = f(b) - f(a)$. Ένα άμεσο πόρισμα του Θεωρήματος 1.3.3, που χρησιμοποιείται συνήθως στην πράξη αντί του Θεωρήματος 1.3.3 είναι και το εξής:

Πόρισμα 1.3.4. *Έστω $n \geq 0$ ακέραιος, I διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f : I \to \mathbb{R}$ μια $(n+1)$-φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Έστω $a \in I$ και έστω T_n το πολυώνυμο Taylor τάξης n της f με κέντρο το a. Τότε για κάθε $x \in I$ υπάρχει ένας αριθμός ξ στο ανοικτό διάστημα με άκρα τα a και x τέτοιος ώστε*

$$\frac{f(x) - T_n(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \tag{1.3.4}$$

ή ισοδύναμα,

$$f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{1.3.5}$$

Ειδικότερα για $n = 1$ έχουμε το εξής πόρισμα:

Πόρισμα 1.3.5. *Έστω I διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f : I \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Έστω επίσης $a \in I$ και έστω $T_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ το πολυώνυμο Taylor πρώτης τάξης της f με κέντρο το a.*

Τότε για κάθε $x \in I$ με $x \neq a$ υπάρχει ξ στο ανοικτό διάστημα με άκρα τα a και x τέτοιος ώστε

$$\frac{f(x) - T_1(x)}{(x-a)^2} = \frac{f''(\xi)}{2} \tag{1.3.6}$$

ή ισοδύναμα

$$f(x) = T_1(x) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)^2 = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)^2 \tag{1.3.7}$$

Στην επόμενη παράγραφο θα δώσουμε μια απόδειξη του Πορίσματος 1.3.5 που στηρίζεται σε μια γενίκευση του Θεωρήματος Μέσης Τιμής (το λεγόμενο *Γενικευμένο Θεώρημα Μέσης Τιμής*).

Στο επόμενο παράδειγμα δίνουμε μια εφαρμογή του θεωρήματος 1.3.3 για την συνάρτηση e^x.

Παράδειγμα 1.3.6. Για κάθε $n \geq 1$ και κάθε $0 < x \leq 1$, ισχύει ότι

$$T_n(x) < e^x < T_n(x) + \frac{3}{(n+1)!} \tag{1.3.8}$$

όπου $T_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ είναι το πολυώνυμο Taylor τάξης n της $f(x) = e^x$ με κέντρο το $a = 0$ (Παράδειγμα 1.2.2).

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε ένα $n \geq 1$ και ένα $x \in (0,1]$. Από το Θεώρημα 1.3.3 υπάρχει $\xi \in (0,x)$ τέτοιο ώστε

$$e^x = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} = T_n(x) + \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1} \tag{1.3.9}$$

Επειδή η $f(x) = e^x > 0$ και $0 < x \leq 1$ έχουμε ότι $e^\xi > 0$ και άρα από την (1.3.9) προκύπτει ότι

$$e^x > T_n(x) \tag{1.3.10}$$

Από την άλλη μεριά η $f(x) = e^x$ είναι γνησίως αύξουσα και επειδή $0 < \xi < x \leq 1$ έχουμε ότι $1 < e^\xi < e^x \leq e < 3$ και άρα

$$\frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1} < \frac{3}{(n+1)!}$$

Συνεπώς από την (1.3.9) παίρνουμε ότι

$$e^x < T_n(x) + \frac{3}{(n+1)!}. \tag{1.3.11}$$

Από τις (1.3.10) και (1.3.11) προκύπτει η (1.3.8). □

Παρατήρηση 1.3.7. Απο την ανισότητα (1.3.8) για $n = 9$ και $x = 1$ μπορούμε με πράξεις να συμπεράνουμε ότι

$$2,718281 < e < 2,718282 \tag{1.3.12}$$

που είναι μια πολύ καλή προσέγγιση του e.

1.4 Απόδειξη του Θεωρήματος Taylor για $n = 1$

Εδώ δίνουμε μια απόδειξη του Θεωρήματος Taylor για την περίπτωση $n = 1$ (Πόρισμα 1.3.5). Στην ουσία όπως θα δούμε η περίπτωση $n = 1$ ανάγεται στην περίπτωση $n = 0$ που είναι το Θεώρημα Μέσης Τιμής. Θα χρειασθούμε το εξής:

Θεώρημα 1.4.1. ***(Γενικευμένο Θεώρημα Μέσης Τιμής)*** *Έστω $F, G : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμες στο (a,b). Έστω επίσης ότι $G'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a,b)$. Τότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τέτοιο* *ώστε*

$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} \tag{1.4.1}$$

Απόδειξη. Επειδή $G'(x)\neq 0$ για κάθε $x\neq 0$ από το Θεώρημα Rolle (ή και από το καλσσικό Θεώρημα Μέσης Τιμής) έπεται ότι $G(a)\neq G(b)\Leftrightarrow G(b)-G(a)\neq 0$. Έστω $\lambda=\dfrac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}$ και $H(x)=F(x)-\lambda G(x)$ για κάθε $x\in[a,b]$. Παρατηρούμε ότι η H είναι συνεχής στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο (a,b). Άρα από το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει $\xi\in(a,b)$ τέτοιο ώστε $\dfrac{H(b)-H(a)}{b-a}=H'(\xi)$. Από τον ορισμό της συνάρτησης H εύκολα βλέπουμε ότι $H(b)-H(a)=0$ και άρα

$$0=H'(\xi)=F'(\xi)-\lambda G'(\xi)\Rightarrow\lambda=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$$

□

Παρατήρηση 1.4.2. Το Θεώρημα 1.4.1 δίνει το κλασικό Θεώρημα Μέσης Τιμής αν θέσουμε $G(x)=x$.

Απόδειξη του Πορίσματος 1.3.5. Θα δείξουμε ότι για κάθε $x\in I$ με $x\neq a$ υπάρχει ξ στο ανοικτό διάστημα με άκρα τα a και x τέτοιος ώστε

$$\frac{f(x)-T_1(x)}{(x-a)^2}=\frac{f''(\xi)}{2} \tag{1.4.2}$$

Για κάθε $x\in I$, θέτουμε $F(x)=f(x)-T_1(x)$ και $G(x)=(x-a)^2$.

Έχουμε $F(a)=f(a)-T_1(a)=0$ και ομοίως $G(a)=0$. Επίσης $G'(x)=2(x-a)\neq 0$ για κάθε $x\neq a$ και $F'(x)=f'(x)-T_1'(x)=f'(x)-f'(a)$ (παρατηρείστε ότι $T_1'(x)=f'(a)$).

Σταθεροποιούμε τώρα ένα $x\neq a$. Έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-T_1(x)}{(x-a)^2}&=\frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)}\\&=\frac{F'(\xi')}{G'(\xi')}\quad(\text{Θεώρημα 1.4.1 με } \xi' \text{ μεταξύ των } x \text{ και } a)\\&=\frac{1}{2}\frac{f'(\xi')-f'(a)}{\xi'-a}\\&=\frac{f''(\xi)}{2}\quad(\text{Θεώρημα Μέσης Τιμής για την } f' \text{ με } \xi \text{ μεταξύ των } \xi' \text{ και } a).\end{aligned}$$

□

1.5 Παράρτημα: Αναπτύγματα Taylor

Έστω $f:I\to\mathbb{R}$ απεριόριστα παραγωγίσιμη συνάρτηση, $a\in I$ και έστω $T_n(x)$ το πολυώνυμο Taylor τάξης n της f με κέντρο το a. Αν $x\in I$ θα λέμε ότι το $f(x)$ είναι το ***όριο*** των $T_n(x)$ και θα γράφουμε

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}T_n(x) \tag{1.5.1}$$

αν οι τιμές $T_0(x)$, $T_1(x)$, $T_2(x)$, $T_3(x)$, ..., που δίνουν τα πολυώνυμα Taylor στο x, πλησιάζουν, όσο μεγαλώνει το n, την τιμή $f(x)$.

Επειδή $T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f''(a)}{n!}(x-a)^n$, τον τύπο 1.5.1 τον γράφουμε συνήθως ως εξής

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots \tag{1.5.2}$$

Η παράσταση

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$

γράφεται και με την μορφή

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f''(a)}{n!}(x-a)^n$$

και καλείται ***ανάπτυγμα (ή σειρά) Taylor*** της f με κέντρο το a.

Δεν ισχύει πάντα ο τύπος 1.5.1 (ή ισοδύναμα ο 1.5.2). Οι απεριόριστα παραγωγίσιμες συναρτήσεις για τις οποίες αποτελούν μια ειδική κλάση συναρτήσεων (καλούνται ***αναλυτικές*** συναρτήσεις) που θα μπορούσαμε να πούμε είναι σαν πολυώνυμα απείρου βαθμού. Όμως με χρήση του Θεωρήματος Taylor αποδεικνύεται ότι οι εκθετικές, οι τριγωνομετρικές και άλλες συναρτήσεις είναι όντως αναλυτικές συναρτήσεις.

Θεώρημα 1.5.1. *(α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι*

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \tag{1.5.3}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \tag{1.5.4}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \tag{1.5.5}$$

(β) Για κάθε $x \in (-1, 1)$, ισχύει ότι

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \tag{1.5.6}$$

(γ) Για κάθε $x \in (-1, 1]$ ισχύει ότι

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \tag{1.5.7}$$

Παρατήρηση 1.5.2. Ο τύπος (1.5.3) για $x = 1$ δίνει ότι

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \tag{1.5.8}$$

που σημαίνει ότι $e = \lim_{n\to\infty} s_n$ όπου $s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΟΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΚΑΙ ΟΙ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

2.1 Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

2.1.1 Η συνάρτηση τόξο εφαπτομένης.

Έστω

$$f(x) = \tan x, \;\; x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Η f είναι συνεχής, γνησίως αύξουσα και με σύνολο τιμών όλο το $\mathbb{R}$. Άρα ορίζεται η αντίστροφή της που την καλούμε *τόξο εφαπτομένης* x και την συμβολίζουμε με $\arctan x$ (ή $\tan^{-1} x$), . Συνεπώς, η συνάρτηση $\arctan x$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, σύνολο τιμών το $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα.

Η $\arctan x$ αντιστοιχεί σε κάθε $x \in \mathbb{R}$ το μοναδικό τόξο $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ με εφαπτομένη x. Πχ. $\arctan 0 = 0$, $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$, $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

2.1.2 Η συνάρτηση τόξο συνημιτόνου.

Έστω

$$f(x) = \cos x, \;\; x \in [0, \pi]$$

Η f είναι συνεχής, γνησίως φθίνουσα και με σύνολο τιμών το $[-1, 1]$. Άρα ορίζεται η αντίστροφή της που την συμβολίζουμε με $\arccos x$, (διαβάζεται "τόξο συνημιτόνου x"). Η συνάρτηση $\arccos x$ έχει πεδίο ορισμού το $[-1, 1]$, σύνολο τιμών το $[0, \pi]$, είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα.

Η συνάρτηση $\arccos x$ αντιστοιχεί σε κάθε $x \in [-1, 1]$ το μοναδικό $y \in [0, \pi]$ με $\cos y = x$. Πχ. $\arccos 0 = \pi/2$, $\arccos(-1) = \pi$, $\arccos 1 = 0$, $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$.

2.1.3 Η συνάρτηση τόξο ημιτόνου.

Έστω

$$f(x) = \sin x, \;\; x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Η f είναι συνεχής, γνησίως αύξουσα και με σύνολο τιμών το $[-1,1]$. Άρα ορίζεται η αντίστροφή της που την συμβολίζουμε με $\arcsin x$, (διαβάζεται "τόξο ημιτόνου x"). Η συνάρτηση $\arcsin x$ έχει πεδίο ορισμού το $[-1,1]$, σύνολο τιμών το $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα.

Η συνάρτηση $\arcsin x$ αντιστοιχεί σε κάθε $x \in [-1,1]$ το μοναδικό τόξο $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ με $\sin y = x$. Πχ. $\arcsin 0 = 0$, $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$, $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$.

2.1.4 Παράγωγοι των αντίστροφων τριγωνομετρικών

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι παράγωγοι των αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων που υπολογίζονται σύμφωνα με το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.1.1. ***(Θεώρημα Παραγώγου Αντίστροφης Συνάρτησης)*** *Έστω I διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f : I \to \mathbb{R}$ γνησίως μονότονη και συνεχής. Έστω $J = f[I] = \{f(x); x \in I\}$ το σύνολο τιμών της f και έστω $f^{-1} : J \to I$ η αντίστροφη συνάρτηση της f. Έστω $y_0 \in J$ και $x_0 \in I$ τέτοιο ώστε $y_0 = f(x_0)$ (ή ισοδύναμα $x_0 = f^{-1}(y_0)$). Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $f'(x_0) \neq 0$ τότε η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο y_0 και ισχύει ότι $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.*

Πρόταση 2.1.2. *Για κάθε $y \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $(\arctan y)' = \frac{1}{1+y^2}$.*

Απόδειξη. Έστω $y_0 \in \mathbb{R}$ και $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ με $y_0 = f(x_0) = \tan x_0$. Επειδή

$$\begin{aligned} f'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= 1 + \tan^2 x = 1 + f^2(x) \end{aligned}$$

έχουμε $f'(x_0) = 1 + y_0^2 \neq 0$. Άρα, από το Θεώρημα 2.1.1, για την παράγωγο της $f^{-1} = \arctan$ στο y_0 θα έχουμε

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{1+y_0^2}$$

Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $y_0 \in \mathbb{R}$ έπεται ότι $(\arctan y)' = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$. □

Παρατηρείστε ότι από την Πρόταση 2.1.2 έχουμε και την εξής συνέπεια στον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων.

Πόρισμα 2.1.3.

$$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan x + c \tag{2.1.1}$$

Άρα

$$\int_a^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x\Big|_a^b = \arctan b - \arctan a. \tag{2.1.2}$$

Παράδειγμα 2.1.4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x\Big|_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}.$

Πρόταση 2.1.5. *Για κάθε* $y \in (-1,1)$ *ισχύει ότι* $(\arccos y)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

Απόδειξη. Έστω $y_0 \in (-1,1)$ και $x_0 \in (0,\pi)$ με $y_0 = f(x_0) = \cos x_0$. Για κάθε $x \in (0,\pi)$ έχουμε $-1 < \sin x < 0$. Οπότε

$$f'(x) = (\cos x)' = \sin x = -\sqrt{1-\ cos^2 x} \neq 0$$

και άρα από το Θεώρημα 2.1.1, για την $(f^{-1})'(y_0)$ παίρνουμε

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x_0}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y_0^2}}$$

Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $y_0 \in (-1,1)$ έχουμε ότι $(\arccos y)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ για κάθε $y \in (-1,1)$. □

Από την Πρόταση 2.1.5 έχουμε το παρακάτω πόρισμα.

Πόρισμα 2.1.6.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\arccos x + c \tag{2.1.3}$$

και άρα για κάθε $-1 \le a < b \le 1$,

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos a - \arccos b \tag{2.1.4}$$

Πρόταση 2.1.7. *Για κάθε* $y \in (-1,1)$ *ισχύει ότι* $(\arcsin y)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

Απόδειξη. Έστω $y_0 \in (-1,1)$ και $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ με $f(x_0) = \sin x_0 = y_0$. Για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε $0 < \cos x < 1$ και άρα

$$f'(x) = \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} \neq 0$$

Άρα από το Θεώρημα 2.1.1, παίρνουμε

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x_0}} = \frac{1}{\sqrt{1-y_0^2}}$$

Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $y_0 \in (-1,1)$ και η $f^{-1} = \arcsin$ έχουμε ότι $(\arcsin y)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ για κάθε $y \in (-1,1)$. □

Από την Πρόταση 2.1.7 έχουμε το εξής πόρισμα.

Πόρισμα 2.1.8.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c \tag{2.1.5}$$

Άρα για κάθε $-1 \le a < b \le 1$,

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x|_a^b = \arcsin b - \arcsin a \tag{2.1.6}$$

2.2 Οι υπερβολικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις

2.2.1 Η συνάρτηση υπερβολικό συνημίτονο.

Η συνάρτηση

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{2.2.1}$$

καλείται *υπερβολικό συνημίτονο* και ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση $\cosh x$ είναι *άρτια* συνάρτηση δηλαδή

$$\cosh(-x) = \cosh x, \;\; \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.2.2}$$

αφού,

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh x$$

Επίσης,

$$\cosh x \ge 1, \;\; \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.2.3}$$

αφού αν θέσουμε $y = e^x$ τότε $y > 0$ και

$$\cosh x = \frac{y + \frac{1}{y}}{2} = \frac{y^2+1}{2y} \ge 1 \Leftrightarrow y^2 + 1 \ge 2y \Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 \ge 0 \Leftrightarrow (y-1)^2 \ge 0$$

Ακόμη, επειδή ο μέσος όρος δύο πραγματικών αριθμών είναι πάντα μεταξύ των αριθμών αυτών έχουμε ότι

$$e^{-x} < \cosh x < e^x, \;\; \forall x > 0 \tag{2.2.4}$$

και αντίστοιχα

$$e^x < \cosh x < e^{-x}, \;\; \forall x < 0 \tag{2.2.5}$$

Επίσης,

$$(\cosh x)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{2.2.6}$$

Παρατηρούμε ότι $(\cosh x)' < 0$ για $x < 0$ και $(\cosh x)' > 0$ για $x > 0$. Άρα η $\cosh x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ με $\cosh(0) = 1$ να είναι η ελάχιστη τιμή της. Επιπλέον είναι εύκολο να δούμε ότι

$$\lim_{x\to-\infty} \cosh x = \lim_{x\to+\infty} \cosh x = +\infty. \tag{2.2.7}$$

και άρα το σύνολο τιμών της $\cosh x$ (δηλαδή το σύνολο $\{\cosh x : x \in \mathbb{R}\}$) είναι το $[1, +\infty)$. Η καμπύλη που σχηματίζει η γραφική παράσταση της $\cosh x$ μοιάζει με παραβολή (δηλαδή σαν αυτήν της συνάρτησης x^2) και καλείται *αλυσσοειδής* γιατί είναι το σχήμα που παίρνει μια αλυσίδα όταν την κρεμάσουμε οριζόντια από τα δύο άκρα της.

2.2.2 Η συνάρτηση υπερβολικό ημίτονο.

Η συνάρτηση

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{2.2.8}$$

καλείται *υπερβολικό ημίτονο* και ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση $\sinh x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι *περιττή* συνάρτηση δηλαδή

$$\sinh(-x) = -\sinh x \tag{2.2.9}$$

Έχουμε

$$(\sinh x)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x \tag{2.2.10}$$

και άρα η $\sinh x$ είναι γνησίως αύξουσα. Επειδή επιπλέον

$$\lim_{x\to-\infty} \sinh x = -\infty \text{ και } \lim_{x\to+\infty} \sinh x = +\infty \tag{2.2.11}$$

το σύνολο τιμών της είναι όλο το $\mathbb{R}$. Η γραφική της παράσταση μοιάζει με της συνάρτησης $f(x) = x^3$.

Παρατηρείστε ότι από την (2.2.6) έχουμε

$$(\cosh x)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x \tag{2.2.12}$$

Επίσης είναι εύκολο να επαληθεύσουμε με πράξεις την εξής ταυτότητα

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \ \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.2.13}$$

Παρατήρηση 2.2.1. Η (2.2.13), δείχνει την σχέση των συναρτήσεων $\cosh x$ και $\sinh x$ με την ισοσκελή υπερβολή, δηλαδή την καμπύλη του επιπέδου που αποτελείται από όλα τα σημεία (x, y) που ικανοποιούν την σχέση $x^2 - y^2 = 1$. Πράγματι, αποδεικνύεται ότι ένα σημείο (x, y) του επιπέδου ανήκει στον δεξί κλάδο της ισοσκελούς υπερβολής αν και μόνο αν τα x, y γράφονται υπό την μορφή

$$\begin{cases} x = \cosh t \\ y = \sinh t \end{cases} \tag{2.2.14}$$

όπου $t \in \mathbb{R}$. Αυτό το γεγονός έρχεται σε αναλογία με τα σημεία (x, y) του μοναδιαίου κύκλου του οποίου τα σημεία δίνονται από τις εξισώσεις

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \tag{2.2.15}$$

2.2.3 Η συνάρτηση υπερβολική εφαπτομένη.

Η συνάρτηση

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \ \ x \in \mathbb{R} \tag{2.2.16}$$

καλείται *υπερβολική εφαπτομένη.* Η $\tanh x$ είναι περιττή,

$$\tanh(-x) = -\tanh x, \ \ \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.2.17}$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι

$$\begin{aligned} (\tanh x)' = \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)' &= \frac{(\sinh x)' \cosh x - \sinh x (\cosh x)'}{\cosh^2 x} \\ &= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} \\ &= \frac{1}{\cosh^2 x} > 0 \end{aligned} \tag{2.2.18}$$

και άρα η $\tanh x$ είναι γνησίως αύξουσα. Επίσης,

$$\lim_{x \to +\infty} \tanh x = +1 \tag{2.2.19}$$

Πράγματι

$$\lim_{x \to +\infty} \tanh x = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1$$

Παρόμοια, έχουμε

$$\lim_{x \to -\infty} \tanh x = -1 \tag{2.2.20}$$

Με άλλα λόγια οι ευθείες $y = \pm 1$ αποτελούν οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης της $\tanh x$. Η γραφική παράσταση της $\tanh x$ μοιάζει με αυτήν της $\arctan x$.

2.2.4 Αντίστροφες Υπερβολικές Συναρτήσεις

Όπως είδαμε η συνάρτηση $\sinh x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μια γνησίως αύξουσα και άρα αντιστρέψιμη συνάρτηση. Η αντίστροφή της συμβολίζεται με $\sinh^{-1} x$.

Πρόταση 2.2.2. *(1) Η αντίστροφη της συνάρτησης* $\sinh x$ *δίνεται από τον τύπο*

$$\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right), \ \ \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.2.21}$$

(2) Η συνάρτηση $\sinh^{-1} x$, $x \in \mathbb{R}$ *είναι παραγωγίσιμη και ισχύει ότι*

$$\left(\sinh^{-1} x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \tag{2.2.22}$$

Συνεπώς,

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = \sinh^{-1} x + c = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + c \tag{2.2.23}$$

Απόδειξη. (1) Έστω $x \in \mathbb{R}$ και έστω

$$y = \sinh^{-1} x \tag{2.2.24}$$

Άρα $x = \sinh y = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$. Θέτοντας $w = e^y$, έχουμε

$$x = \frac{w - \frac{1}{w}}{2} = \frac{w^2-1}{2w} \Leftrightarrow w^2 - 2xw - 1 = 0 \tag{2.2.25}$$

Η (2.2.25) έχει λύσεις

$$w_{1,2} = x \pm \sqrt{x^2+1}$$

Επειδή $w = e^y > 0$ και $x - \sqrt{x^2+1} < 0$ παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} w = x + \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow e^y &= x + \sqrt{x^2+1} \\ \Leftrightarrow y &= \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \end{aligned}$$

(2) Από τον κανόνα παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης έχουμε

$$\begin{aligned} \left(\sinh^{-1} x\right)' &= \left(\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right)' \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)' \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot (x^2+1)'\right) \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x\right) \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}. \end{aligned}$$

□

Η συνάρτηση $\cosh x$, $x \in \mathbb{R}$ ως άρτια δεν είναι $1-1$ και άρα δεν αντιστρέφεται. Όμως αν περιοριστούμε στα $x \geq 0$ η $\cosh x$ είναι μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση από το $[0, +\infty)$ στο $[1, +\infty)$. Αν συμβολίσουμε με $\cosh^{-1} x$ την αντίστροφη της $\cosh x$ στο διάστημα $[0, +\infty)$ παίρνουμε την εξής πρόταση.

Πρόταση 2.2.3. *(1) Η αντίστροφη της συνάρτησης* $\cosh x$ *στο διάστημα* $[0, +\infty)$*, δίνεται από τον τύπο*

$$\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right), \quad \forall x \in [1, +\infty) \tag{2.2.26}$$

(2) Η συνάρτηση $\cosh^{-1} x$*,* $x \in [1, +\infty)$ *είναι παραγωγίσιμη και ισχύει ότι*

$$\left(\cosh^{-1} x\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \tag{2.2.27}$$

Συνεπώς,

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}\, dx = \cosh^{-1} x + c = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) + c \tag{2.2.28}$$

Η απόδειξη της Πρότασης 2.2.3 είναοι ανάλογη με εκείνη της Πρότασης 2.2.2 και αφήνεται ως άσκηση.

Τέλος, όπως είδαμε η $\tanh x$ είναι μια γνησιως αύξουσα συνάρτηση από το $\mathbb{R}$ στο $(-1, 1)$. Η αντίστροφή της συμβολίζεται με $\tanh^{-1} x$ και είναι μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση από το $(-1, 1)$ στο $\mathbb{R}$.

Πρόταση 2.2.4. *(1) Η αντίστροφη της συνάρτησης* $\cosh x$ *στο διάστημα* $[0, +\infty)$*, δίνεται από τον τύπο*

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right), \quad \forall x \in (-1, 1) \tag{2.2.29}$$

(2) Η συνάρτηση $\tanh^{-1} x$*,* $x \in (-1, 1)$ *είναι παραγωγίσιμη και ισχύει ότι*

$$\left(\tanh^{-1} x\right)' = \frac{1}{1 - x^2} \tag{2.2.30}$$

Απόδειξη. (1) Έστω $x \in \mathbb{R}$. Τότε

$$\begin{aligned}
y = \tanh^{-1} x \Leftrightarrow x = \tanh y &= \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1} \\
\Leftrightarrow e^{2y} &= \frac{1 + x}{1 - x} \\
\Leftrightarrow y &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\left(\tanh^{-1} x\right)' &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)' \\
&== \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - x}{1 + x} \cdot \left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)' \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - x}{1 + x} \cdot \frac{2}{(1 - x)^2} = \frac{1}{1 - x^2}
\end{aligned}$$

□

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

3.1 Βασικοί ορισμοί και Ολοκληρώσιμες συναρτήσεις

3.1.1 Βασικοί ορισμοί

Για τους επόμενους ορισμούς σταθεροποιούμε ένα κλειστο φραγμένο διάστημα $[a, b]$ του $\mathbb{R}$.

Ορισμός 3.1.1. *Κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του $[a, b]$ που περιέχει τα άκρα a, b του $[a, b]$ θα καλείται* ***διαμέριση*** *του $[a, b]$.*

Έστω $n \in \mathbb{N}$ και έστω

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$$

μια διαμέριση του $[a, b]$ με $n + 1$ σημεία. Η P χωρίζει το διάστημα $[a, b]$ σε n διαστήματα

$$\begin{aligned} [a, b] &= [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \cdots \cup [x_{n-1}, x_n] \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i] \end{aligned}$$

Για κάθε $i = 1, \ldots, n$, με Δx_i συμβολίζουμε το ***μήκος*** του διαστήματος $[x_{i-1}, x_i]$, δηλαδή

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

Ορισμός 3.1.2. *Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ μια διαμέριση του $[a, b]$ με $n + 1$ σημεία. Ένα υποσύνολο $T = \{t_1, \ldots, t_n\}$ του $[a, b]$ τέτοιο ώστε $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$ θα καλείται* ***επιλογή ενδιάμεσων σημείων ως προς την*** *P.*

Ορισμός 3.1.3. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ μια διαμέριση του $[a, b]$ και $T = \{t_1, \ldots, t_n\}$ επιλογή ενδιάμεσων σημείων ως προς την P. Το άθροισμα*

$$S(f, P, T) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i = f(t_1)(x_1 - x_0) + f(t_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(t_n)(x_n - x_{n-1})$$

καλείται ***άθροισμα Riemann της*** *f* ***ως προς την διαμέριση*** *P* ***και την επιλογή*** *T.*

Ορισμός 3.1.4. *Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ μια διαμέριση του $[a, b]$. Η* ***λεπτότητα*** *της P*

ορίζεται να είναι το ***μέγιστο*** *από τα μήκη Δx_i και συμβολίζεται με $\lambda(P)$, δηλαδή,*

$$\lambda(P) = \max\{\Delta x_i : i = 1, \ldots, n\}$$

3.1.2 Ολοκληρωσιμότητα συναρτήσεων

Μία συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ καλείται **ολοκληρώσιμη** αν υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός I τέτοιος ώστε

$$I = \lim_{\lambda(P)\to 0} S(f, P, T) \tag{3.1.1}$$

Ο αριθμός I με την παραπάνω ιδιότητα θα καλείται **ολοκλήρωμα** της f και συμβολίζεται με $\int_a^b f(x)\,dx$.

Η σχέση (3.1.1) σημαίνει ότι το ολοκλήρωμα της f είναι το όριο των αθροισμάτων Riemann καθώς η λεπτότητα των διαμερίσεων τείνει προς στο μηδέν και ανεξατήτως των επιλογών ενδιάμεσων σημείων. Σε πιο αυστηρά μαθηματική γλώσσα η (3.1.1) σημαίνει το εξής: Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε διαμέριση P του $[a, b]$ με $\lambda(P) < \delta$ και για οποιαδήποτε επιλογή T ενδιάμεσων σημείων ως προς την P, έχουμε ότι

$$|S(f, P, T) - I| < \varepsilon$$

Ένα σημαντικό αποτέλεσμα στην θεωρία ολοκλήρωσης είναι το εξής.

Θεώρημα 3.1.5. *Κάθε συνεχής συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη.*

Παρατήρηση 3.1.6. Το Θεώρημα 3.1.5 λέει ότι η κλάση των ολοκληρωσίμων συναρτήσεων περιλαμβάνει όλες τις συνεχείς συναρτήσεις. Δεν είναι όμως μόνο οι συνεχείς συναρτήσεις ολοκληρώσιμες. Για παράδειγμα, αποδεικνύεται ότι κάθε μονότονη συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη ασχέτως αν είναι συνεχής ή όχι.

Επίσης, υπάρχουν συναρτήσεις που δεν είναι ολοκληρώσιμες. Για παράδειγμα η συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ αν } x \text{ ρητός} \\ 0 \text{ αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$$

αποδεικνύεται ότι δεν είναι ολοκληρώσιμη. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι τα αθροίσματα Riemann δεν συγκλίνουν καθώς η λεπτότητα των διαμερίσεων τείνει στο μηδέν.

3.2 Παράγωγος και Ολοκλήρωμα

3.2.1 Το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού

Το επόμενο θεώρημα συνδέει την Ολοκλήρωση με την Διαφόριση και παίζει καθοριστικό ρόλο στους υπολογισμούς ολοκληρωμάτων.

Θεώρημα 3.2.1. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αν υπάρχει $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής με $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in (a, b)$ τότε*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \tag{3.2.1}$$

Μια συνεχής συνάρτηση $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ με $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in (a,b)$ θα καλείται ***αρχική*** (ή ***παράγουσα***) της f. Αν μια συνάρτηση f έχει μια αρχική F τότε αυτή θα είναι στην ουσία μοναδική με την έννοια ότι όλες οι άλλες αρχικές της f θα είναι της μορφής $F + c$ όπου c σταθερά (πράγματι, αν F_1, F_2 δύο αρχικές της f τότε $F_1' = F_2' = f$ και άρα $(F_2 - F_1)' = F_2' - F_1' = 0 \Rightarrow F_2 - F_1 = c$). Ως συνέπεια έχουμε ότι η διαφορά $F(b) - F(a)$ στην (3.2.1) είναι η ίδια για κάθε αρχική της f. Την διαφορά $F(b) - F(a)$ θα την συμβολίζουμε στην συνέχεια με $[F(x)]_a^b$.

Η απόδειξη του θεωρήματος 3.2.1 στηρίζεται στην επόμενη πρόταση που είναι συνέπεια του θεωρήματος Μέσης Τιμής.

Πρόταση 3.2.2. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ και έστω F μια αρχική της f. Τότε για κάθε διαμέριση P υπάρχει επιλογή ενδιάμεσων σημείων T_P τέτοια ώστε*

$$S(f, P, T_P) = F(b) - F(a) \tag{3.2.2}$$

Απόδειξη. Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$ μια διαμέριση του $[a,b]$. Καταρχάς παρατηρούμε ότι

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} (F(x_i) - F(x_{i-1})) \tag{3.2.3}$$

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, για κάθε $i = 1, \ldots, n$, υπάρχει $t_i \in (x_{i-1}, x_i)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = F'(t_i) = f(t_i)$$

και άρα

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(t_i)\Delta x_i$$

Θέτουμε $T_P = \{t_1, \ldots, t_n\}$ και παρατηρούμε ότι το T_P αποτελεί μια επιλογή ενδιάμεσων σημείων ως προς την διαμέριση P.

Τώρα από την (3.2.3) έχουμε

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} (F(x_i) - F(x_{i-1})) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i = S(f, P, T_P)$$

□

Η απόδειξη του θεωρήματος 3.2.1 είναι σχεδόν άμεση από την Πρόταση 3.2.2. Πράγματι, από τον ορισμό του ολοκληρώματος έχουμε ότι

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\lambda(P) \to 0} S(f, P, T)$$

Επειδή το όριο αυτό είναι ανεξάρτητο της επιλογής T χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $T = T_P$, με άλλα λόγια

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\lambda(P) \to 0} S(f, P, T_P)$$

Όμως κάθε άθροισμα Riemann $S(f, P, T_P)$ είναι σταθερό και ίσο με $F(b) - F(a)$ όποια και αν είναι η P.

Συνεπώς $\lim_{\lambda(P)\to 0} S(f,P,T_P) = F(b)-F(a)$ και άρα $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$.

Παράδειγμα 3.2.3. $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$. Γενικότερα, για κάθε $k\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 x^k\,dx = \left[\frac{x^k}{k+1}\right]_0^1 = \frac{1}{k+1}$

$$\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

3.2.2 Το αόριστο Ολοκλήρωμα

Το Θεώρημα 3.2.1 λέει ότι για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ μιας συνάρτησης f αρκεί να βρούμε μια αρχική της, δηλαδή μια συνάρτηση F με $F' = f$ και τότε το ολοκλήρωμα που θέλουμε να υπολογίσουμε είναι απλώς η διαφορά των τιμών της συνάρτησης F στα άκρα a και b του διαστήματος ολοκλήρωσης. Άρα ο υπολογισμός ενός ολοκληρώματος ανάγεται στην ουσία σε μια διαδικασία που είναι αντίστροφη σε αυτή της παραγώγου.

Ορισμός 3.2.4. *Το **αόριστο ολοκλήρωμα** (ή **γενικό ολοκλήρωμα**) μιας συνάρτησης $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ορίζεται να είναι το σύνολο όλων των αντιπαραγώγων της f. Το αόριστο ολοκλήρωμα της f θα συμβολίζεται με $\int f(x)\,dx$.*

Επειδή δύο αρχικές της f διαφέρουν κατά σταθερά, έχουμε ότι

$$\int f(x)\,dx = \{F + c : c\in\mathbb{R}\}$$

όπου F είναι μια αρχική της f. Στα επόμενα για απλότητα θα γράφουμε

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c \quad \text{ή πιο απλά} \quad \int f(x)\,dx = F(x)$$

Παράδειγμα 3.2.5.

$$\int x^a\,dx = \frac{x^a}{a+1}, \text{ για όλα τα } a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x$$

Παρατήρηση 3.2.6. Το Θεώρημα 3.2.1 είναι πολύ σημαντικό και χρήσιμο αλλά υπάρχουν και κάποιες περιπτώσεις που δεν μπορεί να εφαρμοσθεί. Ο λόγος είναι ότι δεν έχουν όλες οι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις αρχική. Για παράδειγμα, αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{αν } x < 0 \\ 1 & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

είναι ολοκληρώσιμη αλλά δεν έχει αρχική.

3.2.3 Συνεχείς συναρτήσεις και ολοκλήρωση

Για συνεχείς συναρτήσεις έχουμε το εξής θεώρημα.

Θεώρημα 3.2.7. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ **συνεχής** συνάρτηση. Τότε η συνάρτηση $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ με $F(a) = 0$ και*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

για κάθε $x \in (a,b]$ είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και ισχύει ότι $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$.

Παρατήρηση 3.2.8. Παρατηρείστε ότι το Θεώρημα 3.2.7 συνεπάγεται το Θεώρημα 3.2.1 όταν η f είναι συνεχής συνάρτηση. Επίσης έχει ως συνέπεια ότι κάθε συνεχής συνάρτηση έχει αρχική.

3.3 Βασικές ιδιότητες Ολοκληρώματος και Μεθοδοι Ολοκληρωσης

3.3.1 Βασικές ιδιότητες

Αποδεικνύεται ότι το ολοκλήρωμα έχει τις επόμενες τρείς βασικές ιδιότητες.

Πρόταση 3.3.1. *(**Προσθετικότητα**) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση και $c \in (a,b)$. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στα $[a,c]$ και $[c.b]$ και ισχύει ότι*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Πρόταση 3.3.2. *(**Μονοτονία**) Έστω $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Αν $f(x) \le g(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$ τότε*

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

Πρόταση 3.3.3. *(**Γραμμικότητα**) Έστω $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$. Τότε η συνάρτηση $\lambda f + \mu g$ είναι ολοκληρώσιμη και*

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx$$

3.3.2 Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Η πρώτη μέθοδος Ολοκλήρωσης είναι το ανάλογο του κανόνα παραγώγισης του γινομένου δύο συναρτήσεων

$$(fg)' = f'g + fg'$$

και καλείται *Ολοκλήρωση κατά παράγοντες*.

Θεώρημα 3.3.4. *Έστω $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες με συνεχή παράγωγο. Τότε*

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx \tag{3.3.1}$$

ή με τον συμβολισμό του αορίστου ολοκληρώματος

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx \tag{3.3.2}$$

Απόδειξη. Επειδή $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ έχουμε ότι $f' \cdot g = (f \cdot g)' - f \cdot g'$. Άρα από την γραμμικότητα του ολοκληρώματος,

$$\begin{aligned} \int_a^b f'(x)g(x)\, dx &= \int_a^b (f(x)g(x))'\, dx - \int_a^b f(x) \cdot g'(x)\, dx \\ &= [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x)\, dx. \end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 3.3.5.

$$\begin{aligned} \int_1^e \ln x\, dx = \int_1^e (x)' \ln x\, dx &= [x \ln x]_1^e - \int_1^e x(\ln x)'\, dx \\ &= [x \ln x]_1^e - \int_1^e x\frac{1}{x}\, dx \\ &= [x \ln x]_1^e - \int_1^e 1\, dx \\ &= [x \ln x]_1^e - [x]_1^e = [x \ln x - x]_1^e = [x(\ln x - 1)]_1^e \end{aligned}$$

3.3.3 Ολοκλήρωση με αλλαγή μεταβλητής

Η δεύτερη μέθοδος ολοκλήρωσης είναι το αντίστοιχο του κανόνα παραγώγισης της σύνθεσης δύο συναρτήσεων (κανόνας αλυσίδας):

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t)$$

και καλείται *ολοκλήρωση με αντικατάσταση* (ή *ολοκλήρωση με αλλαγή μεταβλητής*). Θα χρειασθούμε και τον εξής συμβολισμό.

Θεώρημα 3.3.6. *Έστω $\varphi : [c, d] \to \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο. Έστω I διάστημα του $\mathbb{R}$ με $\varphi(t) \in I$ για κάθε $t \in [c, d]$ και έστω $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε*

$$\int_c^d f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(u)\, du \tag{3.3.3}$$

Απόδειξη. Έστω $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ μια αρχική της f (υπάρχει από Θεώρημα 3.2.7). Τότε, από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού (Θεώρημα 3.2.1),

$$\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x)\, dx = F(\varphi(d)) - F(\varphi(c)) = F \circ \varphi\ (d) - F \circ \varphi\ (c) \tag{3.3.4}$$

Από την άλλη μεριά, από τον κανόνα παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_c^d f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt &= \int_c^d F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt \\ &= \int_c^d (F \circ \varphi)'(t)\, dx \\ &= F \circ \varphi\ (d) - F \circ \varphi\ (c) \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

Από (3.3.4) και (3.3.5) έπεται το συμπέρασμα. □

Στην πράξη για να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 3.3.6, θέτουμε

$$\text{“}u = \varphi(t)\text{” και “}du = \varphi'(t)\ dt\text{”}$$

Παράδειγμα 3.3.7.

$$\int_a^b \varphi(t)\varphi'(t)\ dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} u\ du = \left[\frac{u^2}{2}\right]_a^b = \left[\frac{\varphi^2(x)}{2}\right]_a^b$$

όπου θέσαμε $u = \varphi(t)$, $du = \varphi'(t)\ dt$. Π.χ.

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \cos t \sin t\ dt &= \int_0^{\pi/2} \sin t (\sin t)'\ dt \\ &= \int_{\sin 0}^{\sin(\pi/2)} u\ du = \frac{\sin^2(\pi/2) - \sin^2 0}{2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.3.8. Έστω $\varphi : [c, d] \to (0, +\infty)$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο. Τότε

$$\int_c^d \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\ dt = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} \frac{du}{u}\ du = [\ln u]_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} = \ln \varphi(d) - \ln \varphi(c)$$

Πχ.

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/3} \tan t\ dt = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin t}{\cos t}\ dt &= -\int_0^{\pi/3} \frac{(\cos t)'}{\cos t}\ dt \\ &\overset{u=\cos t}{=} -\int_1^{1/2} \frac{du}{u} = \int_{1/2}^1 \frac{du}{u} = [\ln u]_{1/2}^1 = -\ln\frac{1}{2} = \ln 2\end{aligned}$$

Ο τύπος (3.3.3), χρησιμοποιείται και ως εξής: Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε ένα ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\ dx$. Αν $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ γνησίως αύξουσα με $\varphi(c) = a$ και $\varphi(d) = b$ τότε ο τύπος (3.3.3) γράφεται υπό την μορφή

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt \tag{3.3.6}$$

Στην πράξη, θέτουμε

$$x = \varphi(t) \text{ και } dx = \varphi'(t)\ dt$$

Το δύσκολο εδώ είναι να βρούμε την κατάλληλη συνάρτηση $\varphi : [c, d] \to [a, b]$.

Παράδειγμα 3.3.9. Χρησιμοποιώντας ότι $\displaystyle\int \cos^2 t\ dt = \frac{\cos t \cdot \sin t + t}{2}$ δείξτε ότι

$$\int \sqrt{1 - x^2}\ dx = \frac{x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x}{2}$$

Απόδειξη. Θέτουμε $x = \sin t \Leftrightarrow t = \arcsin x$, $t \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Τότε

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}\, dx &= \int \sqrt{1-\sin^2 t}\, (\sin t)'\, dt \\
&= \int \cos^2 t\, dt \\
&= \frac{1}{2}(\cos t \cdot \sin t + t) \\
&= \frac{1}{2}(\cos(\arcsin x) \cdot \sin(\arcsin x) + \arcsin x) \\
&= \frac{1}{2}(x\cos(\arcsin x) + \arcsin x) \\
&= \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x)
\end{aligned}$$

διότι $\sin(\arcsin x) = x$ και $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2}$. □

3.4 Μερικές γεωμετρικές Εφαρμογές του ολοκληρώματος

3.4.1 Εμβαδά επίπεδων χωρίων

Όπως είδαμε ο ορισμός του ολοκληρώματος συνδέεται άμεσα με τον υπολογισμό του εμβαδού του υπογραφήματος μιας μη αρνητικής συνάρτησης. Πιο συγκεκριμμένα έχουμε το εξής.

Θεώρημα 3.4.1. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής και μη αρνητική συνάρτηση. Έστω*

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ και } 0 \leq y \leq f(x)\}$$

το υπογράφημα της f, δηλαδή το χωρίο του επιπέδου που περιορίζεται από το γράφημα της συνάρτησης, τον άξονα x και τις δύο κάθετες στον άξονα x στα σημεία $x = a$ και $x = b$. Τότε το εμβαδό του S ισούται με $\int_a^b f(x)\, dx$.

Παράδειγμα 3.4.2. Το εμβαδό E ενός κύκλου ακτίνας R δίνεται από τον τύπο $E = \pi R^2$.

Απόδειξη. Ο κύκλος του $\mathbb{R}^2$ με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα R αποτελείται από όλα τα σημεία (x,y) που ικανοποιούν την σχέση

$$x^2 + y^2 = R^2 \tag{3.4.1}$$

Θεωρώντας το άνω ημικύκλιο, δηλαδή τα σημεία (x,y) με $y > 0$ και λύνοντας την (3.4.1) ως προς y βλέπουμε ότι αυτό είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad -R \leq x \leq R$$

Παρατηρούμε ότι το εμβαδό του κύκλου με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα R είναι το διπλάσιο του εμβαδού του ημικυκλίου, το οποίο με την σειρά του είναι το εμβαδό του υπογραφήματος της συνάρτησης f. Συνεπώς, από το Θεώρημα 3.4.1, έχουμε

$$E = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} = 2R\int_{-R}^{R} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2}\, dx \tag{3.4.2}$$

και κάνωντας την αντικατάσταση $y = x/R\ dy = dx/R$ παίρνουμε

$$E = 2R^2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2}\, dy \tag{3.4.3}$$

Από το Παράδειγμα 3.3.9 έχουμε $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2}\, dy = \pi/2$ και άρα

$$E = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-x^2} = 2R^2\frac{\pi}{2} = \pi R^2$$

□

3.4.2 Μήκος επίπεδης καμπύλης

Με τον όρο *(επίπεδη) καμπύλη* θα εννοούμε ένα υποσύνολο του C του $\mathbb{R}^2$ για το οποίο υπάρχουν δύο συνεχείς συναρτήσεις

$$x(t), y(t) : I \to \mathbb{R}$$

όπου I ένα διάστημα του $\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = x(t) \quad \text{και } y = y(t),\ t \in [a,b]\}$$

Το ζεύγος $(x(t), y(t))$, $t \in [a,b]$ αποτελεί όπως λέμε *μια παραμετρική αναπαράσταση* της καμπύλης (δεν είναι μοναδική). Αν οι συναρτήσεις $x(t), y(t)$ είναι επιπλέον και παραγωγίσιμες ως προς t με συνεχείς παραγώγους τότε η καμπύλη θα καλείται *συνεχώς διαφορίσιμη*. Αν $I = [a,b]$ τότε τα *άκρα* της καμπύλης ορίζονται να είναι τα σημεία $A = (x(a), y(a))$ και $B = (x(b), y(b))$. Αν τα άκρα ταυτίζονται η καμπύλη καλείται *κλειστή*. Αν για κάθε σημείο (x,y) της καμπύλης εκτός ίσως των άκρων υπάρχει μοναδικό $t \in (a,b)$ με $x = x(t)$ και $y = y(t)$ τότε η καμπύλη καλείται *απλή*.

Το *μήκος* της C ορίζεται μέσω των τεθλασμένων γραμμών με κορυφές σημεία της καμπύλης. Αποδεικνύεται ότι αν μια καμπύλη C έχει μια παραμετρική αναπαράσταση $(x(t), y(t))$ $t \in [a,b]$ είναι απλή και συνεχώς διαφορίσιμη τότε το μήκος $L(C)$ της καμπύλης δίνεται από τον τύπο

$$L(C) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt \tag{3.4.4}$$

Στην περίπτωση όπου η C είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο τότε μια παραμετρική αναπαράσταση της C δίνεται από τους τύπους $x(t) = t$ και $y(t) = f(t)$ για κάθε $t \in [a,b]$ και άρα η (3.4.4) παίρνει την μορφή

$$L(C) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx \tag{3.4.5}$$

Παράδειγμα 3.4.3. Η περιφέρεια L ενός κύκλου ακτίνας $R > 0$ δίνεται από τον τύπο $L = 2\pi R$.

Απόδειξη. Πράγματι, οι συναρτήσεις

$$x(t) = R\cos t, \quad y(t) = R\sin t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

αποτελούν παραμετρικές εξισώσεις ενός κύκλου ακτίνας $R > 0$ και κέντρου $(0,0)$. Άρα, από τον τύπο

(3.4.4), έχουμε

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t}\; dt = R^2 \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\; dt = R^2 \int_0^{2\pi} dt = 2\pi R.$$

□

3.5 Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

Με τον όρο *ρητή συνάρτηση* εννοούμε μια συνάρτηση της μορφής $\frac{P(x)}{Q(x)}$ όπου $P(x), Q(x)$ πολυώνυμα με πραγματικο'υς συντελεστές. Αν ο βαθμός του πολυωνύμου $P(x)$ που βρίσκεται στον αριθμητή είναι γνήσια μεγαλύτερος από τον βαθμό του πολυωνύμου $Q(x)$ που είναι στον παρονομαστή τότε από την ταυτότητα της διαίρεσης των πολυωνύμων υπάρχουν δύο μοναδικά πολυώνυμα $\Pi(x)$ (*το πηλίκο*) και $R(x)$ (*το υπόλοιπο*) με τον βαθμό του $R(x)$ να είναι γνήσια μικρότερος του βαθμού του $Q(x)$ τέτοια ώστε $P(x) = \Pi(x) \cdot Q(x) + R(x)$ και άρα

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \Pi(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Οπότε,

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\; dx = \int \Pi(x)\; dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\; dx \tag{3.5.1}$$

Επειδή το ολοκλήρωμα ενός πολυωνύμου υπολογίζεται εύκολα,

$$\begin{aligned}\int \left(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0\right)\; dx &= a_n \int x^n\; dx + \cdots + a_1 \int x\; dx + a_0 \int dx \\ &= \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \cdots + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x\end{aligned}$$

από την σχέση (3.5.1) βλέπουμε ότι η ολοκλήρωση μιας ρητής συνάρτησης ανάγεται στην ολοκλήρωση μιας ρητής συνάρτησης όπου ο βαθμός του αριθμητή είναι *γνήσια μικρότερος* του βαθμού του παρονομαστή. Τέτοιες ρητές συναρτήσεις τις καλούμε *γνήσιες*.

Για να ολοκληρώσουμε μια γνήσια ρητή συνάρτηση χρησιμοποιούμε μια μέθοδο που καλείται *διάσπαση σε απλά κλάσματα*. Το πρώτο βήμα αυτής της μεθόδου είναι η παραγοντοποίηση του παρονομαστή.

Αποδεικνύεται ότι ένα πολυώνυμο $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ με πραγματικούς συντελεστές και συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου $a_{n+1} = 1$ παραγοντοποιείται με μοναδικό τρόπο σε ένα γινόμενο πρωτοβαθμίων όρων της μορφής $x - \rho$, όπου $\rho \in \mathbb{R}$ και σε ένα γινόμενο δευτεροβαθμίων όρων (τριωνύμων) της μορφής $x^2 + bx + c$, τα οποία δεν έχουν πραγματικές ρίζες, με άλλα λόγια η διακρίνουσά τους είναι αρνητική. Πιο συγκεκριμένα έχουμε το εξής.

Θεώρημα 3.5.1. *Κάθε πολυώνυμο $Q(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ με πραγματικούς συντελεστές και συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου $a_{n+1} = 1$ γράφεται στην μορφή*

$$Q(x) = Q_1(x) \cdot Q_2(x)$$

όπου

$$Q_1(x) = \prod_{i=1}^{m}(x-\rho_i)^{n_i} \text{ και } Q_2(x) = \prod_{j=1}^{\ell}(x^2+b_jx+c_j)^{k_j} \tag{3.5.2}$$

όπου $n_i, k_j \in \mathbb{N}$, $\rho_i, b_j, c_j \in \mathbb{R}$ *και* $\Delta_j = b_j^2 - 4c_j < 0$.

Την μορφή $Q(x) = Q_1(x) \cdot Q_2(x)$ με $Q_1(x), Q_2(x)$ όπως στην (3.5.2) θα την καλούμε *ανάλυση του* $Q(x)$. Αντιστοιχεί κατά κάποιο τρόπο στην γνωστή ανάλυση των ακεραίων σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Όπως οι πρώτοι αριθμοί δεν γράφονται ως γινόμενο μικρότερων αριθμών, τα πρωτοβάθμια πολυώνυμα καθώς και τα δευτεροβάθμια με αρνητική διακρίνουσα είναι τα μοναδικά πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές που δεν μπορούν να αναλυθούν σε γινόμενο άλλων απλούστερης μορφής.

Η διάσπαση τώρα μιας ρητής συνάρτησης σε απλά κλάσματα περιγράφεται στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 3.5.2. *Έστω* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *μία γνήσια ρητή συνάρτηση.*

(i) *Αν* $Q(x) = (x-\rho)^n \cdot G(x)$, *όπου* $\rho \in \mathbb{R}$ *και το* $x-\rho$ *δεν διαιρεί το* $G(x)$ *(ισοδύναμα* $G(\rho) \neq 0$*) τότε υπάρχουν μοναδικοί* $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{R}$ *τέτοιοι ώστε*

$$\frac{P(x)}{(x-\rho)^n \cdot G(x)} = \frac{A_1}{x-\rho} + \cdots + \frac{A_n}{(x-\rho)^n} + \frac{R(x)}{G(x)} \tag{3.5.3}$$

όπου ο βαθμός του $R(x)$ *είναι γνήσια μικρότερος του βαθμού του* $G(x)$.

(ii) *Αν* $Q(x) = (x^2+bx+c)^k \cdot G(x)$ *με* $\Delta = b^2 - 4c < 0$ *και το* x^2+bx+c *δεν διαιρεί το* $G(x)$, *τότε υπάρχουν μοναδικοί* $B_1, C_1, \ldots, B_k, C_k \in \mathbb{R}$ *τέτοιοι ώστε*

$$\frac{P(x)}{(x^2+bx+c)^k \cdot G(x)} = \frac{B_1x+C_1}{x^2+bx+c} + \cdots + \frac{B_kx+C_k}{(x^2+bx+c)^k} + \frac{R(x)}{G(x)} \tag{3.5.4}$$

όπου ο βαθμός του $R(x)$ *είναι γνήσια μικρότερος του βαθμού του* $G(x)$.

Παράδειγμα 3.5.3. Υπάρχουν μοναδικοί $A_1, \ldots, A_5 \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)^2(x^2+2x+5)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{A_3}{(x+1)^2} + \frac{A_4x+A_5}{x^2+2x+5}$$

Από το Θεώρημα 3.5.2 έχουμε ότι η ολοκλήρωση των γνήσια ρητών συναρτήσεων ανάγεται στην ολοκλήρωση κλασμάτων της μορφής

$$\frac{1}{(x-\rho)^n} \quad \text{και} \quad \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^k} \text{ με } b^2-4c<0$$

Παράδειγμα 3.5.4. Να αναλυθεί η συνάρτηση $\dfrac{10x}{(x+1)(x^2+9)}$ σε απλά κλάσματα και να βρεθεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int \frac{10x}{(x+1)(x^2+9)}\,dx$..

Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.5.2 έχουμε

$$\frac{10x}{(x+1)(x^2+9)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+9} \tag{3.5.5}$$

όπου $A, B, C \in \mathbb{R}$.

Για να βρούμε τις σταθερές A, B, C εργαζόμαστε ως εξής: Κάνοντας ομώνυμα τα κλάσματα και εκτελώντας τις πράξεις στο δεξί μέλος της (3.5.5) παίρνουμε

$$\begin{aligned}\frac{10x}{(x+1)(x^2+9)} &= \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+9}\\ &= \frac{A(x^2+9)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2+9)}\\ &= \frac{(A+B)x^2+(B+C)x+9A+C}{(x+1)(x^2+9)}\end{aligned}$$

και άρα

$$(A+B)x^2+(B+C)x+9A+C = 10x$$

Συνεπώς έχουμε το σύστημα

$$A+B=0, B+C=10, 9A+C=0$$

απ΄ όπου συμπεραίνουμε ότι

$$A=-1, B=1, C=9$$

Άρα

$$\frac{10x}{(x+1)(x^2+9)} = -\frac{1}{x+1} + \frac{x+9}{x^2+9}$$

Οπότε

$$\int \frac{10x}{(x+1)(x^2+9)}\,dx = -\int \frac{1}{x+1}\,dx + \int \frac{x+9}{x^2+9}\,dx \tag{3.5.6}$$

Έχουμε

$$\int \frac{1}{x+1}\,dx = \ln|x+1|$$

και

$$\begin{aligned}\int \frac{x+9}{x^2+9}\,dx &= \frac{1}{9}\int \frac{x+9}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}\,dx\\ &\overset{t=x/3, dx=3dt}{=} \frac{1}{9}\int \frac{3t+9}{t^2+1}\,3\,dt\\ &= \int \frac{t+3}{t^2+1}\,dt\\ &= \int \frac{t}{t^2+1}\,dt + \int \frac{3}{t^2+1}\,dt\\ &\overset{u=t^2+1, du=2t\ dt}{=} \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} + 3\int \frac{1}{t^2+1}\,dt\\ &= \frac{1}{2}\ln|u| + 3\arctan t = \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + 3\arctan t\\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2}{9}+1\right) + 3\arctan\left(\frac{x}{3}\right) = \ln\sqrt{\frac{x^2}{9}+1} + 3\arctan\left(\frac{x}{3}\right).\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned}\frac{10x}{(x+1)(x^2+9)} &= -\ln|x+1| + \ln\sqrt{\frac{x^2}{9}+1} + 3\arctan\left(\frac{x}{3}\right)\\ &= \ln\left(\frac{\sqrt{\frac{x^2}{9}+1}}{|x+1|}\right) + 3\arctan\left(\frac{x}{3}\right)\end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.5.5. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx$.

Έχουμε

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx &= \int \frac{1}{x^2+2x+1-1+5}\\ &= \int \frac{1}{(x+1)^2+4}\\ &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}\,dx\\ &\overset{t=\frac{x+1}{2},\ dt=dx/2}{=} \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\arctan t\\ &= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right).\end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.5.6. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{x^3+x}\,dx$.

Έχουμε

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^3+x}\,dx &= \int \frac{1}{x(x^2+1)}\,dx\\ &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)dx\\ &= \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx\\ &= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\end{aligned}$$