

ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
2ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Ασκηση 1. Αποδείξτε ότι τα σύνολα

$$A = \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$
$$B = \left\{ \frac{n}{2n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

είναι φραγμένα και βρείτε το supremum και το infimum τους. Εξετάστε αν έχουν μέγιστο ή ελάχιστο στοιχείο. Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Ασκηση 2. Αποδείξτε ότι το σύνολο

$$A = \{ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} : n \geq 1 \}$$

είναι φραγμένο και βρείτε τα $\sup A$ και $\inf A$. Εξετάστε αν το A έχει μέγιστο ή ελάχιστο στοιχείο. Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Ασκηση 3. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή ή λανθασμένη κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις:

- (α) Ένα μη κενό πεπερασμένο υποσύνολο του \mathbb{R} περιέχει πάντα το supremum του.
- (β) Αν $x < M$ για κάθε στοιχείο του μη κενού συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$, τότε $\sup A < M$.
- (γ) Αν A και B είναι μη κενά υποσύνολα του \mathbb{R} και ισχύει ότι $\alpha < \beta$ για κάθε $\alpha \in A$ και $\beta \in B$, τότε $\sup A < \inf B$.
- (δ) Αν A και B είναι μη κενά υποσύνολα του \mathbb{R} και ισχύει ότι $\sup A \leq \sup B$, τότε υπάρχει στοιχείο του B που είναι άνω φράγμα του συνόλου A .

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Ασκηση 4. (α) Έστω $A \neq \emptyset$ κάτω φραγμένο υποσύνολο του \mathbb{R} και $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

- (i) $x = \inf A$.
- (ii) ο x είναι κάτω φράγμα του A και για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $a \in A$ τέτοιο ώστε $a < x + \epsilon$.
- (iii) ο x είναι κάτω φράγμα του A και υπάρχει ακολουθία (a_n) στοιχείων του A τέτοια ώστε $a_n \rightarrow x$.

Ασκηση 5. Έστω A, B μη κενά φραγμένα υποσύνολα του \mathbb{R} τέτοια ώστε $A \cup B = (0, 1)$. Αποδείξτε ότι τουλάχιστον ένας από τους $\inf A$ και $\inf B$ είναι ίσος με 0.

Ασκηση 6. Έστω A, B μη κενά, φραγμένα σύνολα πραγματικών αριθμών με $\sup A = \inf B$. Αποδείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν $\alpha \in A$ και $\beta \in B$, τέτοια ώστε $\beta - \alpha < \epsilon$.

[Υπόδειξη: να χρησιμοποιήσετε τον χαρακτηρισμό για τα supremum και infimum ενός υποσυνόλου του \mathbb{R} .]

Ασκηση 7. Έστω A, B μη κενά, άνω φραγμένα υποσύνολα του \mathbb{R} με την εξής ιδιότητα: για κάθε $a \in A$ υπάρχει $b \in B$ ώστε $a < b$. Αποδείξτε ότι $\sup A \leq \sup B$.

Δώστε παράδειγμα στο οποίο ικανοποιείται η υπόθεση και ισχύει $\sup A = \sup B$.