ΣΕΜΦΕ
Μαθηματική Ανάλυση
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 1

Άσκηση 1. Αποδείξτε ότι ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.

Άσκηση 2. Τι λέει η Αρχιμήδεια Ιδιότητα του $\mathbb{N}$; Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα αυτή δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $-n < x < n$. Συμπεράνετε ότι το $\mathbb{Z}$ δεν είναι ούτε άνω φραγμένο ούτε κάτω φραγμένο.

Άσκηση 3. (α) Αποδείξτε ότι κάθε πεπερασμένο μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει μέγιστο και ελάχιστο.

(β) Τι λέει η ιδιότητα της Καλής διάταξης του $\mathbb{N}$; Χρησιμοποιώντας το (α) δώστε μια εναλλακτική απόδειξη της ιδιότητας αυτής.

(*Υπόδειξη: (α) Με επαγωγή στο πλήθος των στοιχείων του συνόλου. (β) Αν $A \subseteq \mathbb{N}$ μη κενό πάρτε ένα τυχαίο $n_0 \in A$ και αποδείξτε ότι* $\min A = \min\{n \in A : n \leq n_0\}$.)

Άσκηση 4. Αποδείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ κάθε σύνολο με n στοιχεία έχει 2^n υποσύνολα.

Άσκηση 5. Έστω A μη κενό σύνολο. Με τον όρο *μετάθεση του* A εννοούμε κάθε απεικόνιση $f : A \to A$ που είναι 1-1 ($a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$) και επί ($f(A) = \{f(a) : a \in A\} = A$). Αποδείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ένα σύνολο με n στοιχεία έχει $n!$ μεταθέσεις (όπου $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$).

Άσκηση 6. Έστω $A \subset \mathbb{R}$ μη κενό και $s \in \mathbb{R}$.

(α) Αν κάθε $s' > s$ είναι άνω φράγμα του A. Δείξτε ότι το s είναι και αυτό άνω φράγμα του A.

(β) Αν επιπλέον κάθε $s' < s$ δεν είναι άνω φράγμα του A δείξτε ότι $s = \sup A$

Άσκηση 7. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και φραγμένο, $s = \sup A$ και $\tau = \inf A$. .

(α) Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $a \in A$ τέτοιο ώστε $s - \varepsilon < a \leq s$.

(β) Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $a \in A$ τέτοιο ώστε $\tau \leq a < \tau + \varepsilon$.

Άσκηση 8. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και φραγμένο. Αν $I = [x, y]$ κλειστό διάστημα του $\mathbb{R}$ με $A \subseteq I$ δείξτε ότι $[\sup A, \inf A] \subseteq I$.

Άσκηση 9. Έστω $A, B \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $a \in A$ και κάθε $b \in B$ ισχύει ότι $a \leq b$. Δείξτε ότι $\sup A \leq \inf B$.

Άσκηση 10. *Έστω $a \in \mathbb{R}$. Χρησιμοποιώντας την πυκνότητα των ρητών αριθμών δείξτε ότι*

$$\sup\{q \in \mathbb{Q} : q < a\} = \inf\{q \in Q : q > a\} = a$$

Άσκηση 11. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και φραγμένο. Θέτουμε $-A = \{-a : a \in A\}$. Δείξτε ότι*

$$\sup(-A) = -\inf A \text{ και } \inf(-A) = -\sup A$$

Άσκηση 12. Έστω A και B δύο μη κενά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών. Θέτουμε

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

Δείξτε ότι αν τα A και B είναι άνω φραγμένα, τότε $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Άσκηση 13. Έστω A και B δύο μη κενά υποσύνολα *θετικών* πραγματικών αριθμών. Θέτουμε

$$A \cdot B = \{a \cdot b : a \in A, b \in B\}$$

Δείξτε ότι αν τα A και B είναι άνω φραγμένα, τότε $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$.