Μαθηματική Ανάλυση I

Σημειώσεις από τις παραδόσεις

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
και Φυσικών Επιστημών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Αθήνα – 2024

Περιεχόμενα

1 Οι Πραγματικοί αριθμοί 1

1.1 Φυσικοί αριθμοί, Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής, Καλή Διάταξη του $\mathbb{N}$ 1

1.2 Άνω και κάτω φράγματα, supremum και infimum 3

1.3 Η Ιδιότητα της Πληρότητας του $\mathbb{R}$ και οι συνέπειές της 4

1.3.1 Ύπαρξη του infimum για κάτω φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ 4

1.3.2 Αρχιμήδεια Ιδιότητα του $\mathbb{N}$, Ιδιότητα του Ευδόξου 4

1.3.3 Ακέραιο μέρος ενός πραγματικού αριθμού 5

1.3.4 Πυκνότητα ρητών και αρρήτων στο $\mathbb{R}$ 6

2 Ακολουθίες Πραγματικών Αριθμών 11

2.1 Βασικοί ορισμοί 11

2.2 Συγκλίνουσες ακολουθίες 11

2.3 Το Κριτήριο των Ισοσυγκλινουσών ακολουθιών 13

2.4 Φραγμένες ακολουθίες 14

2.5 Όρια και αλγεβρικές πράξεις 15

2.5.1 Όριο αθροίσματος ακολουθιών 15

2.5.2 Όριο γινομένου ακολουθιών 15

2.5.3 Όριο Πηλίκου ακολουθιών 16

2.5.4 Όριο k-ρίζας ακολουθίας 17

2.6 Δύο χρήσιμες ανισότητες 18

2.7 Κάποια χρήσιμα όρια 19

2.8 Μονότονες ακολουθίες 20

2.8.1 Βασικοί ορισμοί 20

2.8.2 Μονότονες και φραγμένες ακολουθίες 20

2.8.3 Αρχή Κιβωτισμού 21

2.8.4 Το $\mathbb{R}$ δεν γράφεται υπό την μορφή ακολουθίας 22

2.8.5 Απόκλιση ακολουθιών στο άπειρο 23

2.8.6 Μονότονες και μη φραγμένες ακολουθίες 24

2.9 Ο αριθμός Euler 24

2.10 Υπακολουθίες και το Θεώρημα Bolzano–Weierstrass 25

3 Συνέχεια και Όρια Συναρτήσεων 27

3.1 Ορισμός της συνέχειας 27

3.2 Τοπικές ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων 28

3.3 Συνέχεια και ακολουθίες - Αρχή Μεταφοράς 28
3.4 Πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων 30
3.5 Συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες σε διαστήματα του $\mathbb{R}$ 30
3.5.1 Το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών ή Θεώρημα Bolzano 30
3.5.2 Το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής 32
3.6 Συνεχείς και $1-1$ συναρτήσεις 33
3.7 Συνέχεια μονότονων συναρτήσεων 33
3.8 Ομοιόμορφη συνέχεια 35

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Οι Πραγματικοί Αριθμοί

1.1 Φυσικοί αριθμοί, Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής, Καλή Διάταξη του $\mathbb{N}$

Το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι το σύνολο

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Στουω φυσικούς αριθμούς ορίζεται η πράξη της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού καθώς και η σχέση της διάταξης που μπορεί να ορισθεί ως εξής. Αν $n, m \in \mathbb{N}$, θα λέμε ότι ο n είναι *μικρότερος του* m και θα γράφουμε $n < m$, όταν υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $m = n + k$. Άρα

$$n < m \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} \text{ τέτοιος ώστε } m = n + k \tag{1.1.1}$$

Ειδικότερα, αν $k = 1$ τότε ο $m = n+1$ καλείται *αμέσως επόμενος* του n. Παρατηρούμε ότι το σύνολο $\mathbb{N}$ ξεκινάει με την μονάδα, το αμέσως επόμενο στοιχείο του είναι ο $2 = 1+1$, μετά ο $3 = 2+1$ κ.οκ. Ο τρόπος με τον οποίο παράγονται οι φυσικοί αριθμοί αποτελεί μια αρχή που διέπει το σύνολο των φυσικών αριθμών την λεγόμενη *Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής*, την οποία μπορούμε να διατυπώσουμε ως εξής.

Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής : *Έστω $A \subseteq \mathbb{N}$. Αν (α) $1 \in A$ και (β) για κάθε $k \in A$ ισχύει ότι $k + 1 \in A$, τότε $A = N$.*

Η Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής διατυπώνεται ισοδύναμα και ως μέθοδος απόδειξης για ισχυρισμούς που αφορούν φυσικούς αριθμούς. Για να αποδείξουμε ότι ένας ισχυρισμός ισχύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς $n = 1, 2, 3, \dots$, αποδεικνύουμε πρώτα την απλή περίπτωση για $n = 1$ (η οποία λέγεται η **περίπτωση βάσης**) και, στη συνέχεια, δείχνουμε ότι αν υποθέσουμε ότι ο ισχυρισμός είναι αληθής για μια δεδομένη περίπτωση $n = k$, τότε ισχύει και για την επόμενη περίπτωση $n = k + 1$ (η υπόθεση ότι ο Ισξυσρισμός ισχύει για το k καλείται **επαγωγική Υπόθεση** και η διαδικασία που πάμε από το k στο $k + 1$ καλείται **επαγωγικό βήμα**).

Παράδειγμα 1.1.1. Αποδείξτε ότι

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Λύση. Για $n = 1$ έχουμε $1 = 1^2$ και άρα ο ισχυρισμός ισχύει για $n = 1$. Υποθέτουμε τώρα ότι ισχύει για κάποιο $n = k \in \mathbb{N}$, δηλαδή ότι ισχύει

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) = k^2$$

και θα δείξουμε ότι αυτο συνεπάγεται ότι ιχύει και για τον $n = k + 1$, δηλαδή ότι

$$1 + \cdots + (2(k + 1) - 1) = (k + 1)^2$$

Πράγματι,

$$1 + \cdots + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) = (1 + \cdots + (2k - 1)) + (2(k + 1) - 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$$

Από την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής ο ισχυρισμός ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Η διάταξη στο $\mathbb{N}$ όπως ορίσθηκε στην (1.1.1) έχει την εξής ιδιότητα.

Ιδιότητα της Καλής Διάταξης του $\mathbb{N}$: *Κάθε μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}$ έχει ελάχιστο στοιχείο. Δηλαδή αν $A \subseteq \mathbb{N}$ με $A \neq \emptyset$ τότε υπάρχει $n_0 \in A$ τέτοιο ώστε $n_0 \leq n$ για όλα τα $n \in A$.*

Παρατηρείστε ότι η ιδιότητα αυψτή δεν ισχύει στο $\mathbb{R}$. Π.χ. το $A = (0, 1)$ δεν έχει ελάχιστο στοιχείο. Στην πραγματικότητα η ιδιότητα ότι το $\mathbb{N}$ είναι καλά διατεταγμένο είναι μια ισοδύναμη μορφή της Αρχής της Μαθηματικής Επαγωγής.

Θεώρημα 1.1.2. *Η ιδιότητα της Καλής διάταξης των φυσικών αριθμών είναι ισοδύναμη με την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής.*

Απόδειξη. $\Rightarrow$:΄Εστω ότι η Ιδιότητα της Καλής Διάταξης του $\mathbb{N}$ ισχύει. Θα δείξουμε ότι τότε και η Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής ισχύει. Πράγματι έστω $A \subseteq \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε το A περιέχει την μονάδα και τον αμέσως επόμενο κάθε στοιχείου του. Ας υποθέσουμε προς απαγωγή σε άτοπο ότι $A \neq \mathbb{N}$. Τότε το συμπλήρωμα $A^c = \mathbb{N} \setminus A = \{n \in \mathbb{N} : n \notin A\}$ του A στο $\mathbb{N}$ είναι μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Άρα από την ιδιότητα της Καλής Διάταξης του $\mathbb{N}$ υπάρχει το $\min A^c$. Επειδή $1 \in A$, το $1 \notin A^c$ και άρα $\min A^c \neq 1$, οπότε $\min A^c > 1$ (το $\min A^c$ είναι φυσικός αριθμός άρα μεγαλύτερος ή ίσος του 1). Αλλά τότε ο αμέσως προηγούμενος $\min A^c - 1 \in \mathbb{N}$ και επιπλέον ως μικρότερος του $\min A^c$ το $\min A^c - 1 \notin A^c$. Επειδή το $\mathbb{N} = A \cup A^c$, έπεται ότι $\min A^c - 1 \in A$. Αλλά το A περιέχει τον αμέσως επόμενο κάθε στοιχείου του, άρα $(\min A^c - 1) + 1 = \min A^c \in A$. Άτοπο γιατί $\min A^c \in A^c$. Άρα $A = \mathbb{N}$ όταν το A περιέχει την μονάδα και τον αμέσως επόμενο κάθε στοιχείου του.

Αντίστροφα τώρα έστω ότι η Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής ισχύει. Θα δείξουμε ότι ισχύει και η Ιδιότητα της Καλής Διάταξης του $\mathbb{N}$. ΄Εστω $A \subseteq \mathbb{N}$ μη κενό. Υποθέτουμε προς απαγωγή σε άτοπο ότι το A δεν έχει ελάχιστο στοιχείο. Ισχυριζόμαστε ότι τότε

$$\{1, \ldots, n\} \cap A = \emptyset \tag{1.1.2}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αυτό σημαίνει ότι $n \notin A$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και άρα $A = \emptyset$, άτοπο. Πράγματι, για να δείξουμε την (1.1.2) θα χρησιμοποιήσουμε Επαγωγή. ΄Εχουμε $1 \notin A$ διότι διαφορετικά το 1 θα ήταν το $\min A$. Άρα $\{1\} \cap A = \emptyset$, δηλαδή η (1.1.2) ισχύει για $n = 1$. ΄Εστω ότι ισχύσει για κάποιο $n = k \in \mathbb{N}$, δηλαδή $\{1, \ldots, k\} \cap A = \emptyset$. Τότε αν το $k + 1 \in A$ θα είχαμε ότι $k + 1 = \min A$ ενώ έχουμε υποθέσει ότι το A δεν έχει ελάχιστο. Άρα $k + 1 \notin A$, οπότε και $\{1, \ldots, k + 1\} \cap A = \emptyset$. Συνπώς η (1.1.2) ισχύει για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και όπως είδανμε αυτό οδηγεί σε άτοπο. Άρα το A έχει ελάχιστο στοιχείο. □

1.2 Άνω και κάτω φράγματα, supremum και infimum

Ορισμός 1.2.1. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Θα λέμε ότι το A είναι* **άνω φραγμένο** *αν υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε*

$$\forall a \in A,\ a \leq M \tag{1.2.1}$$

Κάθε πραγματικός αριθμός M που ικανοποιεί την (1.2.1) θα καλείται **άνω φράγμα** *του A.*

Αντίστοιχα, θα λέμε ότι το A είναι **κάτω φραγμένο** *αν υπάρχει $m \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε*

$$\forall a \in A,\ m \leq a \tag{1.2.2}$$

Κάθε πραγματικός αριθμός m που ικανοποιεί την (1.2.2) θα καλείται **κάτω φράγμα** *του A.*

Τέλος, το A θα καλείται **φραγμένο** *αν είναι και κάτω και άνω φραγμένο.*

Παρατήρηση 1.2.2. Παρατηρείστε ότι ένας $M \in \mathbb{R}$ **δεν** είναι άνω φράγμα του A αν

$$\exists a \in A \text{ τέτοιος ώστε } M < a \tag{1.2.3}$$

και αντίστοιχα ένας $m \in \mathbb{R}$ **δεν** είναι κάτω φράγμα του A αν

$$\exists a \in A \text{ τέτοιος ώστε } a < m \tag{1.2.4}$$

Παρατηρείστε επίσης ότι αν το A είναι άνω φραγμένο από κάποιο $M \in \mathbb{R}$ τότε κάθε αριθμός $M' > M$ είναι πάλι άνω φράγμα του A. Αντίστοιχα, αν το A είναι κάτω φραγμένο από κάποιο $m \in \mathbb{R}$ τότε κάθε αριθμός $m' < m$ είναι πάλι άνω φράγμα του A.

Ορισμός 1.2.3. *Ένας αριθμός $s \in \mathbb{R}$ θα καλείται* **supremum** *του A ή* **ελάχιστο άνω φράγμα** *του A αν (α) O s είναι άνω φράγμα του A και (β) Κάθε $s' < s$ δεν είναι άνω φράγμα του A.*

Αντίστοιχα, ένας αριθμός $t \in \mathbb{R}$ θα καλείται **infimum** *του A ή* **μέγιστο κάτω φράγμα** *του A αν (α) O t είναι κάτω φράγμα του A και (β) Κάθε $t' > t$ δεν είναι κάτω φράγμα του A.*

Είναι εύκολο να δούμε ότι το supremum ενός υποσυνόλου A του $\mathbb{R}$ αν υπάρχει είναι μοναδικό και θα συμβολίζεται με $\sup A$. Όμοια για το infimum το οποίο θα συμβολίζεται με $\inf A$.

Παράδειγμα 1.2.4. Έστω $A = (0, 1)$. Τότε $\sup A = 1$ και $\inf A = 0$. Άρα το supremum ή το infimum ενός συνόλου A δεν ανήκει απαραίτητα στο A.

Πρόταση 1.2.5. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Το A έχει μέγιστο στοιχείο αν και μόνο αν $\sup A \in A$ και στην περίπτωση αυτή $\sup A = \max A$. Αντίστοιχα, το A έχει ελάχιστο στοιχείο αν και μόνο αν $\inf A \in A$ και στην περίπτωση αυτή $\inf A = \min A$.*

Απόδειξη. Έστω ότι το A έχει μέγιστο και έστω $M = \max A$. Τοτε το M είναι άνω φράγμα του A (ως το μεγαλύτερο από όλα τα στοιχεία του A). Επίσης, έστω $M' < M$. Τότε το M' δεν είναι άνω φράγμα του A αφού είναι γνήσια μικρότερο από το στοιχείο $M \in A$. Άρα το M είναι το μικρότερο άνω φράγμα του A δηλαδή είναι το supremum του A. Έστω τώρα ότι $\sup A \in A$. Τότε αφού το $\sup A$ είναι άνω φράγμα του A, έπεται ότι $\forall a \in A$, $\sup A \geq a$ και άρα αφού ανήκει και στο A είναι το μέγιστο στοιχείο του, δηλαδή $\sup A = \max A$. Όμοια για το infimum. □

Δεν έχουν όλα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ μέγιστο στοιχείο ακόμα και αν είναι άνω φραγμένα. Για παράδειγμα, αν $A = (0, 1)$ τότε για κάθε $a \in (0, 1)$ υπάρχει $a' \in A$ με $a' > a$ (πχ. το στοιχείο $a' = \dfrac{a+1}{2}$).

1.3 Η Ιδιότητα της Πληρότητας του $\mathbb{R}$ και οι συνέπειές της

Δεχόμαστε τώρα ότι το $\mathbb{R}$ έχει την παρακάτω ιδιότητα.

Ιδιότητα της Πληρότητας του $\mathbb{R}$ (ή η Ιδιότητα του Ελαχίστου άνω φράγματος): *Κάθε μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει supremum.*

Η ιδιότητα της Πληρότητας του $\mathbb{R}$ έχει πολύ σημαντικές συνέπειες για την δομή των πραγματικών αριθμών τις οποίες αναφέρουμε στην συνέχεια.

1.3.1 Ύπαρξη του infimum για κάτω φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$

Θεώρημα 1.3.1. *Κάθε μη κενό και κάτω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει infimum.*

Απόδειξη. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και κάτω φραγμένο. Θέτουμε

$$K = \{m \in \mathbb{R} : m \text{ κάτω φράγμα του } A\}$$

Το K είναι μη κενό αφού το A είναι εξ υποθέσεως κάτω φραγμένο. Επίσης είναι άνω φραγμένο αφού αν $a \in A$ τότε $m \leq a$ για όλα τα $m \in K$, δηλαδή *κάθε στοιχείο του A είναι άνω φράγμα του K*. Άρα, από την Ιδιότητα της Πληρότητας το K έχει supremum.

Ισχυριζόμαστε τώρα ότι το $\sup K$ είναι κάτω φράγμα του A και άρα ανήκει στο K. Πράγματι,όπως είδαμε παραπάνω οποιοδήποτε στοιχείο a του A είναι άνω φράγμα του K και το $\sup K$ είναι εξ ορισμού *το μικρότερο άνω φράγμα του A*. Άρα $\sup K \leq a$ για όλα τα $a \in A$ οπότε το $\sup K$ είναι κάτω φράγμα του A και άρα εξ ορισμού του K ανήκει στο K.

Άρα $\sup K \in K$ και συνεπώς από Πρόταση 1.2.5 το K έχει μέγιστο, με άλλα λόγια υπάρχει το μέγιστο κάτω φράγμα του A, δηλαδή το $\inf A$. □

1.3.2 Αρχιμήδεια Ιδιότητα του $\mathbb{N}$, Ιδιότητα του Ευδόξου

Θεώρημα 1.3.2. *(**Αρχιμήδεια Ιδιότητα του** $\mathbb{N}$) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $n > x$. Ισοδύναμα το σύνολο των φυσικών αριθμών δεν είναι άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.*

Απόδειξη. Έστω, προς απαγωγή σε άτοπο, ότι η πρόταση δεν είναι αληθής. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \leq x$. Άρα το x είναι ένα άνω φράγμα του $\mathbb{N}$, δηλαδή το $\mathbb{N}$ είναι άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Από την ιδιότητα της Πληρότητας του $\mathbb{R}$ υπάρχει το supremum του $\mathbb{N}$. Έστω $s = \sup \mathbb{N}$.

Θεωρούμε τώρα τον αριθμό $s-1$. Επειδή $s-1 < s$ και το s είναι το supremum του A (δηλαδή το s είναι το ***μικρότερο*** άνω φράγμα του A) ο $s-1$ ως γνήσια μικρότερος του s δεν είναι άνω φράγμα του A. Άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$s - 1 < n_0$$

Αλλά τότε

$$s < n_0 + 1$$

και επειδή $n_0 + 1 \in \mathbb{N}$, το s δεν είναι άνω φράγμα του $\mathbb{N}$, άτοπο. □

Πόρισμα 1.3.3. *Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ με $k < x$. Ισοδύναμα, το $\mathbb{Z}$ δεν είναι κάτω φραγμένο.*

Απόδειξη. Έστω $x \in \mathbb{R}$. Από το Θεώρημα 1.3.2 υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $n > -x \Leftrightarrow -n < x$. Θέτοντας $k = -n$ έχουμε το συμπέρασμα. □

Πόρισμα 1.3.4. *(<u>**Ιδιότητα του Ευδόξου**</u>) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $0 < \dfrac{1}{n} < \varepsilon$*

Απόδειξη. Αν θεωρήσουμε τον αριθμό $x = \frac{1}{\varepsilon}$ τότε από το Θεώρημα 1.3.2 υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

□

1.3.3 Ακέραιο μέρος ενός πραγματικού αριθμού

Στην απόδειξη του επόμενου θεωρήματος θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι αν $k \neq k'$ δύο διαφορετικοί ακέραιοι αριθμοί τότε $|k - k'| \geq 1$, δηλαδή η απόσταση δύο διαφορετικών ακεραίων είναι τουλάχιστον 1.

Θεώρημα 1.3.5. *Κάθε μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{Z}$ έχει μέγιστο στοιχείο.*

Απόδειξη. Έστω $A \subseteq \mathbb{Z}$ άνω φραγμένο και έστω $s = \sup A$. Αρκεί να δειχθεί ότι $s \in A$ γιατί τότε το s θα είναι το μέγιστο στοιχείο του A. Ας υποθέσουμε ότι $s \notin A$. Όπως και στην απόδειξη της Πρότασης 1.3.1 θεωρούμε τον αριθμό $s-1$. Επειδή ο $s-1$ είναι γνήσια μικρότερος του s και ο s είναι το *ελάχιστο* άνω φράγμα του A, ο $s-1$ δεν είναι άνω φράγμα του A και συνεπώς υπάρχει ένα στοιχείο $k \in A$ τέτοιο ώστε

$$s - 1 < k_1 \tag{1.3.1}$$

Επειδή $s = \sup A$ έχουμε $k \leq s$. Επειδή $k \in A$ και υποθέσαμε ότι $s \notin A$ αποκλείεται να έχουμε $k = s$ και άρα

$$k < s \tag{1.3.2}$$

Συνεπώς και ο k δεν είναι άνω φράγμα του A. Άρα υπάρχει $k' \in A$ τέτοιος ώστε

$$k < k' \tag{1.3.3}$$

Επειδή $k' \in A$ και $s = \sup A$ έχουμε ότι $k' \leq s$ και όπως και με τον k, επειδή $k' \in A$ και $s \notin A$,

$$k' < s \tag{1.3.4}$$

Από τις (1.3.1)–(1.3.4) έχουμε

$$s - 1 < k < k' < s$$

που σημαίνει ότι

$$|k - k'| < 1$$

άτοπο, αφού k, k' ακέραιοι. □

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$Z_x = \{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$$

δηλαδή Z_x είναι το υποσύνολο του $\mathbb{Z}$ που αποτελείται από όλους τους ακέραιους που είναι μικρότεροι ή ίσοι του x. Π.χ. αν $x = -3,2$ τότε $Z_x = \{\ldots, -5, -4\}$, αν $x = 3,2$ τότε $Z_x = \{\ldots, 0, 1, 2, 3\}$.

Πόρισμα 1.3.6. *Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ το $Z_x = \{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ έχει μέγιστο στοιχείο.*

Απόδειξη. Από το Πόρισμα 1.3.3 το Z_x δεν είναι κενό. Επίσης εξ ορισμού το Z_x είναι άνω φραγμένο (π.χ. από το x). Άρα από το Θεώρημα 1.3.5 το Z_x έχει μέγιστο στοιχείο. □

Ορισμός 1.3.7. *(**Ακέραιο μέρος**) Έστω $x \in \mathbb{R}$. Ονομάζουμε ακέραιο μέρος του x το μέγιστο στοιχείο του $Z_x = \{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$.*

Το ακέραιο μέρος ενός πραγματικού αριθμού θα συμβολίζεται με $[x]$.

Πρόταση 1.3.8. *Έστω $x \in \mathbb{R}$. Τότε το ακέραιο μέρος του x είναι ο μοναδικός ακέραιος k_0 με την ιδιότητα*

$$k_0 \leq x < k_0 + 1 \tag{1.3.5}$$

Απόδειξη. Έχουμε $[x] = \max Z_x = \max\{k \in Z : k \leq x\}$. Άρα $[x] \leq x$ διότι $[x] \in Z_x$. Επίσης $[x] + 1 \notin Z_x$ αφού $[x] + 1 > [x] = \max Z_x$. Άρα εξ ορισμού του Z_x θα πρέπει $[x] + 1 > x$. Συνεπώς $[x] \leq x < [x] + 1$. Αν τώρα έχουμε έναν ακέραιο $k \in \mathbb{Z}$ με $k \leq x < k + 1$ τότε

$$x - 1 < k \leq x$$

Αλλά αυτό θα ισχύει και για $k = [x]$ δηλαδή,

$$x - 1 < [x] \leq x$$

Άρα $|k - [x]| < 1 \Rightarrow k = [x]$. □

1.3.4 Πυκνότητα ρητών και αρρήτων στο $\mathbb{R}$

Μια ιδιότητα των ακεραίων που είναι συνέπεια της ύπαρξης του ακεραίου μέρους είναι η παρακάτω.

Λήμμα 1.3.9. *Έστω $a < b$ πραγματικοί αριθμοί. Αν $b - a > 1$ τότε υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ τέτοιος ώστε*

$$a < k < b$$

Με άλλα λόγια, κάθε ανοικτό διάστημα του $\mathbb{R}$ με μήκος γνήσια μεγαλύτερο του 1 περιέχει κάποιον ακέραιο.

Απόδειξη. Έχουμε

$$[a] \leq a < [a] + 1 \leq a + 1 < b$$

Συνεπώς, ο ακέραιος $k = [a] + 1$ ικανοποιεί το ζητούμενο. □

Παρατήρηση 1.3.10. Το Λήμμα 1.3.9 δεν ισχύει αν $b - a \leq 1$. Πχ. το ανοικτό διάστημα $(1, 2)$ έχει μήκος 1 και δεν περιέχει κανένα ακέραιο.

Μια από τις σημαντικότερες συνέπειες της Πληρότητας για τους ρητούς είναι η εξής.

Θεώρημα 1.3.11. *(**Πυκνότητα ρητών στο $\mathbb{R}$**) Έστω $a < b$ πραγματικοί αριθμοί. Τότε υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ τέτοιος ώστε*

$$a < q < b$$

Με άλλα λόγια κάθε ανοικτό διάστημα του $\mathbb{R}$ περιέχει ρητό αριθμό.

Απόδειξη. Αν $b - a > 1$ το συμπέρασμα έπεται από το Λήμμα 1.3.9, αφού κάθε ακέραιος είναι και ρητός. Έστω λοιπόν ότι $b - a \leq 1$. Επιλέγουμε $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$nb - na > 1 \tag{1.3.6}$$

Αυτό είναι εφικτό από την Αρχιμήδεια Ιδιότητα (Θεώρημα 1.3.2). Πράγματι, για τον πραγματικό αριθμό $\frac{1}{b-a}$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με

$$n > \frac{1}{b-a} \Rightarrow n(b-a) = nb - na > 1$$

Από το Λήμμα 1.3.9 (για $''a = na''$ και $''b = nb''$), υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ με

$$na < k < nb \Rightarrow a < \frac{k}{n} < b$$

και άρα ο ρητός $q = \frac{k}{n}$ ικανοποιεί το συμπέρασμα. □

Πόρισμα 1.3.12. ***(Πυκνότητα ρητών στο $\mathbb{R}$, β′ μορφή)*** *Μεταξύ δύο πραγματικών αριθμών $a < b$ υπάρχουν άπειροι ρητοί.*

Απόδειξη. Έστω $a < b$. Μεταξύ των a και b υπάρχει ένας ρητός $a < q_1 < b$, μεταξύ των a και q_1 υπάρχει ρητός $a < q_2 < q$, ομοίως υπάρχει $q_3 \in \mathbb{Q}$ με $a < q_3 < q_2$ κ.ο.κ. □

Θεώρημα 1.3.13. ***(Υπαρξη τετραγωνικής ρίζας θετικού αριθμού)*** *Για κάθε $a > 0$ υπάρχει ένας μοναδικός θετικός πραγματικός αριθμός s τέτοιος ώστε $s^2 = a$.*

Ο θετικός αριθμός s με την ιδιότητα $s^2 = a$ καλείται <u>τετραγωνική ρίζα του</u> a και συμβολίζεται με $\sqrt{a}$.

Για την απόδειξη του θεωρήματος 1.3.13 θα χρειασθούμε το εξής λήμμα.

Λήμμα 1.3.14. *Έστω s, a θετικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $s^2 \neq a$. Έστω*

$$0 < \varepsilon < \min\left\{1, \frac{|s^2 - a|}{2s+1}\right\} \tag{1.3.7}$$

(α) Αν $s^2 < a$ τότε $(s+\varepsilon)^2 < a$.

(β) Αν $s^2 > a$ τότε $s - \varepsilon > 0$ και $(s-\varepsilon)^2 > a$

Απόδειξη. (α) Έστω $s^2 < a$. Έχουμε

$$\begin{aligned}(s+\varepsilon)^2 &= s^2 + 2s\varepsilon + \varepsilon^2 \\ &= s^2 + (2s+\varepsilon)\varepsilon \\ &< s^2 + (2s+1)\varepsilon \\ &< s^2 + (a - s^2) = a\end{aligned}$$

(β) Έστω $s^2 > a$. Έχουμε

$$\begin{aligned}(s-\varepsilon)^2 &= s^2 - 2s\varepsilon + \varepsilon^2\\ &> s^2 - 2s\varepsilon - \varepsilon\\ &= s^2 - (2s+1)\varepsilon\\ &> s^2 - (s^2 - a) = a\end{aligned}$$

Επίσης εύκολα βλέπουμε ότι

$$s - \varepsilon > 0 \Leftrightarrow s > \varepsilon \Leftrightarrow s > \frac{s^2 - a}{2s+1} \Leftrightarrow 2s^2 + s > s^2 - a \Leftrightarrow s^2 + s + a > 0$$

που ισχύει αφού $s, a > 0$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 1.3.13. Έστω $a > 0$. Θεωρούμε το σύνολο $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < a\}$. Το A είναι μη κενό, αφού $0 \in A$. Επίσης το A είναι άνω φραγμένο. Πράγματι ο αριθμός $M = a + 1$ είναι άνω φράγμα του A (αν υπήρχε $x \in A$ με $x > a + 1 > 1$, τότε $x^2 > (a+1)^2 > a + 1 > a$, άτοπο.

Άρα, από την ιδιότητα της Πληρότητας του $\mathbb{R}$, υπάρχει το $s = \sup A$. Έχουμε ότι $s > 0$. Πράγματι, από την Ιδιότητα Ευδόξου (Πόρισμα 1.3.4, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{n} < a$. Επειδή

$$\left(\frac{1}{n}\right)^2 \leq \frac{1}{n} < a$$

έπεται ότι $\frac{1}{n} \in A$ και άρα $s = \sup A \geq \frac{1}{n} > 0$.

Θα δείξουμε ότι $s^2 = a$ αποκλείοντας τις περιπτώσεις $s^2 < a$ και $s^2 > a$. Πράγματι, αν $s^2 < a$ από το Λήμμα 1.3.14 θα υπήρχε $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό με $(s+\varepsilon)^2 < a$. Αλλά τότε από τον ορισμό του A θα είχαμε $s + \varepsilon \in A$, άτοπο αφού $s + \varepsilon > s = \sup A$. Αντίστοιχα, αν $s^2 > a$, πάλι από το Λήμμα 1.3.14 θα υπήρχε $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό με $s - \varepsilon > 0$ και $(s-\varepsilon)^2 > a$. Άρα $(s-\varepsilon)^2 > a > x^2$ για κάθε $x \in A$ που σημαίνει ότι $s - \varepsilon > x$ για κάθε $x \in A$. Άρα το $s - \varepsilon$ είναι άνω φράγμα του A, άτοπο αφού $s - \varepsilon < s = \sup A$ και κάθε αριθμός μικρότερος του $\sup A$ δεν είναι άνω φράγμα του A. □

Ορισμός 1.3.15. *Κάθε πραγματικός αριθμός που δεν είναι ρητός καλείται* ***άρρητος****.*

Πρόταση 1.3.16. *Για κάθε ρητό αριθμό q, $q^2 \neq 2$.*

Απόδειξη. Άσκηση. □

Πόρισμα 1.3.17. *(**Υπαρξη αρρήτων αριθμών**) Ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος και άρα υπάρχουν άρρητοι αριθμοί.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 1.3.13 υπάρχει $x > 0$ με $x^2 = 2$. Από την Πρόταση 1.3.16 ο $x \notin \mathbb{Q}$. Άρα $x = \sqrt{2}$ είναι άρρητος. □

Πρόταση 1.3.18. *Έστω $q \in \mathbb{Q}$ με $q \neq 0$ και $a \in \mathbb{R}$ άρρητος. Τότε οι αριθμοί qa, $\frac{q}{a}$, $\frac{a}{q}$ είναι άρρητοι.*

Απόδειξη. Αν ο $qa = q' \in \mathbb{Q}$ τότε $a = \frac{q'}{q} \in \mathbb{Q}$ ως πηλίκο ρητών, άτοπο. Ομοίως και για τους $\frac{q}{a}$ και $\frac{a}{q}$ □

Θεώρημα 1.3.19. ***(Πυκνότητα αρρητών στο*** $\mathbb{R}$*)* *Έστω $a < b$ πραγματικοί αριθμοί. Τότε υπάρχει ξ άρρητος τέτοιος ώστε*

$$a < \xi < b$$

Με άλλα λόγια κάθε ανοικτό διάστημα του $\mathbb{R}$ περιέχει έναν άρρητο.

Απόδειξη. Έστω $a < b$ στο $\mathbb{R}$. Θεωρούμε τους $a' = \sqrt{2}a$ και $b' = \sqrt{2}b$. Έχουμε $a' < b'$ και άρα από την Πυκνότητα των ρητών αριθμών (Θεώρημα 1.3.11) υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ τέτοιος ώστε $a' < q < b'$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $q \neq 0$ (αν $q = 0$ επιλέγουμε έναν άλλο ρητό q' με $a' < q' < 0 < b'$). Άρα

$$\sqrt{2}a < q < \sqrt{2}b \Rightarrow a < \frac{q}{\sqrt{2}} < b$$

Επειδή ο q είναι ρητός διάφορος του 0 και ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος (Πόρισμα 1.3.17) , από Πρόταση 1.3.18, ο $\frac{q}{\sqrt{2}}$ είναι άρρητος. Συνεπώς, ο $\xi = \frac{q}{\sqrt{2}}$ ικανοποιεί το συμπέρασμα της πρότασης. □

Πόρισμα 1.3.20. ***(Πυκνότητα αρρητών στο*** $\mathbb{R}$***, β΄ μορφή)*** *Μεταξύ δύο πραγματικών αριθμών $a < b$ υπάρχουν άπειροι άρρητοι.*

Απόδειξη. Ανάλογα όπως το Πόρισμα 1.3.20 □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Ακολουθίες Πραγματικών αριθμών

2.1 Βασικοί ορισμοί

Κάθε συνάρτηση $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{N}$ και τιμές στο $\mathbb{R}$ θα καλείται ***ακολουθία*** πραγματικών αριθμών. Αν $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ μια ακολουθία τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η τιμή της συνάρτησης a στο n θα συμβολίζεται με a_n αντί για $a(n)$, δηλαδή η μεταβλητή n μετατρέπεται σε δείκτη. Έτσι γράφουμε a_1 αντί για $a(1)$, a_2 αντί για $a(2)$, a_3 αντί για $a(3)$ κ.ο.κ. Ο a_1 καλείται ο *πρώτος όρος*, ο a_2 *δεύτερος όρος* και γενικά, ο a_n καλείται ο *n-οστός* (ή *γενικός*) όρος της ακολουθίας. Τον δείκτη n στον όρο a_n θα τον καλούμε πολλές φορές και *τάξη* του όρου.

Μια ακολουθία $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ θα την συμβολίζουμε συνήθως με (a_n) ή και με αναγραφή των πρώτων όρων της δηλαδή $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Πολλές φορές μια ακολουθία δίνεται απο ένα *κλειστό* τύπο πχ. λέμε η ακολουθία $a_n = 1/n$, και εννούμε την ακολουθία $1, 1/2, 1/3, \ldots$, η λέμε η *σταθερή* ακολουθία $a_n = 1$ και εννοούμε την ακολουθία $1, 1, 1, \ldots$ όπου όλοι οι όροι είναι ίσοι με 1. Άλλες φορές η ακολουθία δίνεται με κάποιον *αναδρομικό* τύπο, δηλαδή μας δίνουν τον πρώτο ή και άλλους αν χρειάζεται όρους της ακολουθίας και ύστερα ένα τύπο που μας λέει πώς προκύπτει ο n-οστός όρος από τους προηγούμενούς του. Χαρακτηριστικό παράδειγμα εδώ είναι η ακολουθία Fibonacci $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ που είναι η ακολουθία με $a_1 = a_2 = 1$ και $a_n = a_{n-1} + a_{n-1}$ για κάθε $n \geq 3$. Τέλος ορίζονται και ακολουθίες για τις οποίες δεν μπορούμε να βρούμε ούτε κλειστό ούτε αναδρομικό τύπο. Πχ. η ακολουθία (a_n) όπου ο a_n είναι το n-οστό δεκαδικό ψηφίο του αριθμού π.

2.2 Συγκλίνουσες ακολουθίες

Με απλά λόγια θα λέγαμε ότι μία ακολουθία συγκλίνει σε ένα πραγματικό αριθμό αν οι όροι της πλησιάζουν τον αριθμό αυτόν καθώς η τάξη τους μεγαλώνει. Ο ακριβής ορισμός είναι ο εξής.

Ορισμός 2.2.1. *Έστω (a_n) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών και $a \in \mathbb{R}$. Θα λέμε ότι η (a_n)* ***συγκλίνει στο*** *a αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει ότι $|a_n - a| < \varepsilon$.*

Όταν η (a_n) συγκλίνει στο a θα γράφουμε $a_n \to a$. Μια ακολουθία (a_n) καλείται ***συγκλίνουσα*** αν υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ με $a_n \to a$.

Ορισμός 2.2.2. *Έστω $a \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$. Το ανοικτό διάστημα $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ καλείται ε-περιοχή του a ή απλά περιοχή του a. Το ε καλείται ακτίνα της περιοχής.*

Επειδή

$$x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \Leftrightarrow |x-a| < \varepsilon$$

έχουμε ότι η περιοχή $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ αποτελείται από όλα τα $x \in \mathbb{R}$ που απέχουν από το a απόσταση μικρότερη του ε (θυμηθείτε ότι το απόλυτο της διαφοράς δύο αριθμών εκφράζει την απόσταση των αριθμών αυτών). Ο Ορισμός 2.2.1 λέει ότι $a_n \to a \in \mathbb{R}$ αν *κάθε* περιοχή του a περιέχει *τελικά όλους* τους όρους της ακολουθίας (δηλαδή από κάποια τάξη και μετά).

Πρόταση 2.2.3. *Αν $a_n = c$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε $a_n \to c$.*

Απόδειξη. Επειδή $|a_n - c| = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε κατά τετριμμένο τρόπο ότι $|a_n - c| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq 1$. Συνεπώς για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ (το $n_0 = 1$) για το οποίο για όλα τα $n \geq n_0$ ισχύει ότι $|a_n - c| < \varepsilon$. Άρα $a_n \to c$. □

Παράδειγμα 2.2.4. Η ακολουθία $a_n = \dfrac{1}{n}$ συγκλίνει στο μηδέν.

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $n_0 > \dfrac{1}{\varepsilon}$ (αυτό μπορεί να γίνει λόγω Αρχιμήδειας ιδιότητας του $\mathbb{N}$. Εναλλακτικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ακέραιο μέρος του $\dfrac{1}{\varepsilon}$ και να θέσουμε $n_0 = [\dfrac{1}{\varepsilon}]+1$.) Τότε για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $n \geq n_0 \Rightarrow n \geq n_0 > \dfrac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{n_0} < \varepsilon \Rightarrow \dfrac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow |a_n - 0| < \varepsilon$. □

Δεν είναι όλες οι ακολουθίες συγκλίνουσες.

Παράδειγμα 2.2.5. Η ακολουθία $a_n = (-1)^n$ δεν είναι συγκλίνουσα.

Απόδειξη. Παρατηρούμε καταρχάς ότι η απόσταση δύο οποιωνδήποτε διαδοχικών όρων της (a_n) είναι ίση με 2, δηλαδή

$$|a_{n+1} - a_n| = 2 \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N} \tag{2.2.1}$$

Πράγματι, αν ο n είναι άρτιος τότε $a_n = 1$ και $a_{n+1} = -1$ ενώ αν ο n είναι περιττός τότε $a_n = -1$ και $a_{n+1} = 1$. Παρατηρούμε επίσης ότι αν μια ακολουθία είναι συγκλίνουσα τότε οι όροι της όσο μεγαλώνει η τάξη τους έρχονται ολοένα και κοντά στο όριο της ακολουθίας και κατά συνέπεια θα πρέπει να έρχονται ολοένα πιο κοντά και μεταξύ τους. Πιο συγκεκριμένα στην περίπτωσή μας, αν η $a_n = (-1)^n$ συνέκλινε σε κάποιο $a \in \mathbb{R}$ τότε από τον ορισμό της σύγκλισης θα μπορούσαμε να βρούμε ένα $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|a_n - a| < 1/2$ για όλα τα $n \geq n_0$. Ειδικότερα, για $n = n_0$ θα είχαμε

$$|a_{n_0} - a| < \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad |a_{n_0+1} - a| < \frac{1}{2}$$

Όμως τότε από την τριγωνική ανισότητα θα είχαμε

$$|a_{n_0+1} - a_{n_0}| \leq |a_{n_0+1} - a| + |a - a_{n_0}| < 1$$

το οποίο έρχεται σε αντίφαση με την (2.2.1). □

Πρόταση 2.2.6. *Αν μια ακολουθία συγκλίνει τότε το όριό της είναι μοναδικό.*

Απόδειξη. Έστω ότι μια ακολουθία (a_n) είχε δύο διαφορετικά όρια a, a' και έστω $a < a'$. Επιλέγοντας κατάλληλα μικρό $\varepsilon > 0$ (πχ. $\varepsilon = \dfrac{a' - a}{10}$) έχουμε ότι $a + \varepsilon < b - \varepsilon$ και άρα οι περιοχές

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \quad \text{και} \quad (a' - \varepsilon, a' + \varepsilon)$$

των a και a' είναι ξένες μεταξύ τους δηλαδή δεν έχουν κοινά σημεία. Από την άλλη μεριά, αφού $a_n \to a$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \ \forall n \geq n_0$$

και ομοίως, αφού $a_n \to a'$, υπάρχει $n'_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$a_n \in (a' - \varepsilon, a' + \varepsilon) \ \forall n \geq n'_0$$

Αλλά τότε για $n = \max\{n_0, n'_0\}$ θα είχαμε ότι ο a_n θα περιεχόταν και στις δύο περιοχές, πράγμα αδύνατον αφού τις έχουμε επιλέξει έτσι ώστε να είναι ξένες. □

Αν η (a_n) είναι συγκλίνουσα τότε ο μοναδικός αριθμός a στον οποίο η (a_n) συγκλίνει θα καλείται **το όριο** της (a_n) και θα συμβολίζεται με $\lim_n a_n$.

2.3 Το Κριτήριο των Ισοσυγκλινουσών ακολουθιών

Το παρακάτω θεώρημα καλείται *Κριτήριο των Ισοσυγκλινουσών ακολουθιών* (ή *Κριτήριο Παρεμβολής*) και αποτελεί ένα πολύ χρήσιμο κριτήριο για την εύρεση του ορίου μιας ακολουθίας.

Θεώρημα 2.3.1. *Έστω (b_n) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Αν υπάρχουν ακολουθίες (a_n) και (γ_n) στο $\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε*

(α) Υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε

$$a_n \leq b_n \leq \gamma_n \tag{2.3.1}$$

για όλα τα $n \geq m_0$.

(β) Οι (a_n) και (γ_n) είναι συγκλίνουσες και $\lim_n a_n = \lim_n \gamma_n = \ell$.

Τότε η (b_n) είναι συγκλίνουσα και $\lim_n b_n = \ell$.

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $a_n \to \ell$ υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$n \geq n_1 \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon \Rightarrow \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon \tag{2.3.2}$$

Ομοίως αφού $\gamma_n \to \ell$ υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$n \geq n_2 \Rightarrow |\gamma_n - \ell| < \varepsilon \Rightarrow \ell - \varepsilon < \gamma_n < \ell + \varepsilon \tag{2.3.3}$$

Θέουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2, m_0\}$. Τότε για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε ότι $n \geq n_1$ και $n \geq n_2$ και άρα ισχύουν ταυτόχρονα και οι (2.3.2) και η (2.3.3). Επίσηως $n \geq n_0 \Rightarrow n \geq m_0$ και άρα ισχύει και η (2.3.1).

Συνδυάζοντας τις (2.3.1), (2.3.2) και (2.3.3) παίρνουμε

$$\begin{aligned} n \geq n_0 &\Rightarrow \ell - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq \gamma_n < \ell + \varepsilon \\ &\Rightarrow \ell - \varepsilon < b_n < \ell + \varepsilon \Rightarrow |b_n - \ell| < \varepsilon \end{aligned}$$

Άρα για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει ότι $|b_n - \ell| < \varepsilon$, ισοδύναμα $\lim_n b_n = \ell$. □

Πόρισμα 2.3.2. *Αν $(b_n), (\gamma_n)$ ακολουθίες θετικών αριθμών τέτοιες ώστε $b_n \leq \gamma_n$ και $\gamma_n \to 0$. Τότε και $b_n \to 0$.*

Απόδειξη. Έχουμε $0 \leq b_n \leq \gamma_n$ οπότε το συμπέρασμα προκύπτει από το Θεώρημα 2.3.1 για $a_n = 0$. □

Παράδειγμα 2.3.3. $\dfrac{n^2}{n^3 + 2n^2 + 1} \to 0$. Πράγματι,

$$0 < \frac{n^2}{n^3 + 2n^2 + 1} = \frac{1}{n + 2 + \frac{1}{n^2}} \leq \frac{1}{n} \to 0$$

2.4 Φραγμένες ακολουθίες

Ορισμός 2.4.1. *Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών.*

*(α) Η (a_n) λέγεται **άνω φραγμένη** αν υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $a_n \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Κάθε αριθμός $M \in \mathbb{R}$ με αυτή την ιδιότητα θα καλείται **άνω φράγμα** της (a_n).*

*(β) Η (a_n) λέγεται **κάτω φραγμένη** αν υπάρχει $m \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $m \leq a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Κάθε αριθμός m με αυτή την ιδιότητα θα καλείται **κάτω φράγμα** της (a_n).*

*(γ) Η (a_n) θα λέγεται **φραγμένη** αν είναι άνω και κάτω φραγμένη.*

Παραδείγματα 2.4.2. (1) Η ακολουθία (a_n) με $a_n = n$ είναι κάτω φραγμένη, αφού ο $m = 0$ είναι ένα κάτω φράγμα της. Η (a_n) όμως δεν είναι άνω φραγμένη. Πράγματι, για κάθε $M \in \mathbb{R}$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $M < n = a_n$.

(2) Η ακολουθία $a_n = 1/n$ είναι φραγμένη. Πχ. ο $m = 0$ είναι ένα κάτω φράγμα της και ο $M = 1$ είναι ένα άνω φράγμα της.

Πρόταση 2.4.3. *Μια ακολουθία (a_n) είναι φραγμένη αν και μόνο αν υπάρχει $K \geq 0$ με $|a_n| \leq K$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

Απόδειξη. Έστω ότι η (a_n) είναι φραγμένη και έστω $m, M \in \mathbb{R}$ με $m \leq a_n \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $K = \max\{|m|, |M|\}$. Τότε $|a_n| \leq K$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Αντίστροφα αν $|a_n| \leq K$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε $-K \leq a_n \leq K$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ δηλαδή η (a_n) είναι φραγμένη. □

Πρόταση 2.4.4. *Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.*

Απόδειξη. Έστω $a_n \to a$. Άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < 1 \Rightarrow |a_n| \leq |a| + 1$$

Θέτουμε $K = \max\{|a_1|, \ldots, |a_{n_0-1}|, |a| + 1\}$. Τότε $K \geq |a_n|$ για κα΄θε $1 \leq n \leq n_0 - 1$ και $K \geq |a| + 1 \geq |a_n|$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα $|a_n| \leq K$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή η (a_n) είναι φραγμένη. □

2.5 Όρια και αλγεβρικές πράξεις

2.5.1 Όριο αθροίσματος ακολουθιών

Πρόταση 2.5.1. *Έστω $a_n \to a$ και $b_n \to b$. Τότε $a_n + b_n \to a + b$.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Θέλουμε να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει ότι

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon$$

Παρατηρούμε ότι

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \tag{2.5.1}$$

Άρα αρκεί να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \underline{\text{και}} \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.5.2}$$

Για την εύρεση του n_0 εργαζόμαστε ως εξής. Αφού $a_n \to a$ υπάρχει ένα $n_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$n \geq n_1 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.5.3}$$

Ομοίως, αφού $b_n \to b$, υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$n \geq n_2 \Rightarrow |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.5.4}$$

Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Τότε για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $n \geq n_1$ και $n \geq n_2$ και άρα ισχύει και η (2.5.3) και η (2.5.4), δηλαδή η (2.5.2). □

2.5.2 Όριο γινομένου ακολουθιών

Πρόταση 2.5.2. *Έστω $a_n \to a$ και $b_n \to b$. Τότε $a_n b_n \to ab$.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Παρατηρούμε ότι

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a b_n + a b_n - ab| \leq |b_n| \cdot |a_n - a| + |a| \cdot |b_n - b| \tag{2.5.5}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή $b_n \to b$ έπεται ότι η (b_n) είναι φραγμένη. Έστω $K > 0$ με $|b_n| \leq K$ και έστω $\Lambda = \max\{|a|, K\} > 0$. Από την (2.5.4) έχουμε

$$|a_n b_n - ab| \leq \Lambda \left(|a_n - a| + |b_n - b|\right) \tag{2.5.6}$$

Τώρα, όπως και στην Πρόταση 2.5.1, βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2\Lambda} \quad \underline{\text{και}} \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2\Lambda}$$

□

Πόρισμα 2.5.3. *Έστω $a_n \to a$, $b_n \to b$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ Τότε $\lambda a_n + \mu b_n \to \lambda a + \mu b$.*

Απόδειξη. Θεωρώντας τα λ και μ ως σταθερές ακολουθίες, από την Πρόταση 2.5.2 έχουμε ότι $\lambda a_n \to \lambda a$ και $\mu b_n \to \mu b$. Άρα από Πρόταση 2.5.1 έπεται ότι $\lambda a_n + \mu b_n \to \lambda a + \mu b$. □

Πόρισμα 2.5.4. *Έστω $a_n \to a$ και $k \in \mathbb{N}$. Τότε $a_n^k \to a^k$.*

Απόδειξη. Με επαγωγή στο $k \in \mathbb{N}$. Για $k = 1$ ισχύει τετριμμένα. Έστω ότι ισχύει για κάποιο $k \in \mathbb{N}$. Τότε $a_n^{k+1} = a_n^k a_n \to a^k a = a^{k+1}$. □

2.5.3 Όριο Πηλίκου ακολουθιών

Πρόταση 2.5.5. *Έστω $a_n \to a$, $b_n \to b$ με $b \neq 0$ και $b_n \neq 0$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Τότε $\dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{a}{b}$.*

Για την απόδειξη της Πρότασης 2.5.5 θα χρειασθούμε το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 2.5.6. *Έστω $b_n \to b$ με $b \neq 0$. Τότε υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|b_n| \geq \dfrac{|b|}{2}$ για κάθε $n \geq n_1$.*

Απόδειξη. Αφού $b \neq 0 \Rightarrow |b| > 0$ και αφού $b_n \to b$ για τον θετικό $\varepsilon = \dfrac{|b|}{2}$ υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$n \geq n_1 \Rightarrow |b_n - b| < \frac{|b|}{2} \tag{2.5.7}$$

Επειδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\big||b_n| - |b|\big| \leq |b_n - b|$$

από την (2.5.7) παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} n \geq n_1 &\Rightarrow \big||b_n| - |b|\big| < \frac{|b|}{2} \\ &\Rightarrow -\frac{|b|}{2} < |b_n| - |b| \\ &\Rightarrow |b| - \frac{|b|}{2} < |b_n| \\ &\Rightarrow \frac{|b|}{2} < |b_n| \end{aligned}$$

□

Απόδειξη της Πρότασης 2.5.5. Αρκεί να δειχθεί ότι $\dfrac{1}{b_n} \to \dfrac{1}{b}$. Από το Λήμμα 2.5.6 παίρνουμε ότι υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|b_n| \geq \dfrac{|b|}{2}$ για κάθε $n \geq n_1$ και άρα

$$n \geq n_1 \Rightarrow \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b| \cdot |b_n|} \leq \frac{2}{|b|^2} \cdot |b_n - b| = C|b_n - b| \tag{2.5.8}$$

όπου $C = 2/|b|^2$.

Έστω τώρα $\varepsilon > 0$. Αφού $b_n \to b$ για $\varepsilon' = \varepsilon/C$ υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$n \geq n_2 \Rightarrow |b_n - b| < \varepsilon/C \tag{2.5.9}$$

Άρα αν $n_0 = \max\{n_1, n_1'\}$ τότε για $n \geq n_0$ θα ισχύει και η (2.5.8) και η (2.5.9) οπότε

$$n \geq n_0 \Rightarrow \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| < C \cdot \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon$$

□

2.5.4 Όριο k-ρίζας ακολουθίας

Πρόταση 2.5.7. *Έστω $a_n \to a$. Αν $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε $a \geq 0$.*

Απόδειξη. Έστω προς απαγωγή σε άτοπο ότι $a < 0$. Αφού $a_n \to a$ για $\varepsilon = |a|/2$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$, $|a_n - a| < |a|/2$. Αλλά τότε για κάθε $n \geq n_0$ θα είχαμε

$$a_n < a + \frac{|a|}{2} = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} < 0 \Rightarrow a_n < 0$$

άτοπο. □

Πρόταση 2.5.8. *Έστω $a_n \geq 0$, $a_n \to a$ και $k \in \mathbb{N}$ με $k \geq 2$. Τότε $\sqrt[k]{a_n} \to \sqrt[k]{a}$.*

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε ένα $k \in \mathbb{N}$ με $k \geq 2$ και έστω $a_n \to a$ με $a_n \geq 0$. Από την Πρόταση 2.5.7 έχουμε ότι $a \geq 0$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις για το a:

Περίπτωση 1: $a = 0$.

Έστω ότι $a_n \to 0$. Θα δείξουμε ότι τότε $\sqrt[k]{a_n} \to 0$ δηλαδή ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|\sqrt[k]{a_n} - 0| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$. Θέτουμε $\varepsilon' = \varepsilon^k$. Αφού $a_n \to 0$ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε

$$n \geq n_0 \Rightarrow a_n < \varepsilon' = \varepsilon^k \Rightarrow \sqrt[k]{a_n} < \varepsilon$$

Περίπτωση 2 : $a = 1$.

Έστω $a_n \to 1$. Θα δείξουμε ότι $\sqrt[k]{a_n} \to 1$, δηλαδή ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|\sqrt[k]{a_n} - 1| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Έστω $\varepsilon > 0$. Χωρίς βλα΄βη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 < \varepsilon < 1$. Αφού $a_n \to 1$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$, $|a_n - 1| < \varepsilon$, ισοδύναμα

$$1 - \varepsilon < a_n < 1 + \varepsilon \tag{2.5.10}$$

Επειδή υποθέσαμε ότι $0 < \varepsilon < 1$ έχουμε

$$0 < 1 - \varepsilon < 1 < 1 + \varepsilon$$

και άρα αφού $k \in \mathbb{N}$ με $k \geq 2$ έπεται ότι

$$(1 - \varepsilon)^k < 1 - \varepsilon < 1 < 1 + \varepsilon < (1 + \varepsilon)^k \tag{2.5.11}$$

Συνδυάζοντας τις (2.5.10) και (2.5.11) παίρνουμε ότι αν $n \geq n_0$ τότε

$$0 < (1 - \varepsilon)^k < a_n < (1 + \varepsilon)^k \Leftrightarrow 1 - \varepsilon < \sqrt[k]{a_n} < 1 + \varepsilon \Leftrightarrow \left|\sqrt[k]{a_n} - 1\right| < \varepsilon$$

Περίπτωση 3 : $a > 0$ και $a \neq 1$.

Ορίζουμε την ακολουθία $b_n = \dfrac{a_n}{a}$. Τότε $b_n \to \frac{a}{a} = 1$ και άρα από την Περίπτωση 2, $\sqrt[k]{b_n} \to 1$. Επειδή $a_n = a \cdot b_n$ έχουμε $\sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}\sqrt[k]{b_n} \to \sqrt[k]{a} \cdot 1 = \sqrt[k]{a}$. □

2.6 Δύο χρήσιμες ανισότητες

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε δύο ανισότητες την ανισότητα Bernoulli και την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου. Τις ανισότητες αυτές θα τις χρησιμοποιήσουμε στην επόμενη παράγραφο για να υπολογίσουμε κάποια βασικά όρια.

Πρόταση 2.6.1. ***(ανισότητα Bernoulli)*** *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $a > -1$ ισχύει ότι*

$$(1+a)^n \geq 1 + na \tag{2.6.1}$$

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με Μαθηματική Επαγωγή. Για $n = 1$ ισχύει τετριμμένα. Υποθέτουμε τώρα ότι η (2.6.1) ισχύει για κάποιο $n = k$ και δείχνουμε ότι ισχύει για $n = k+1$. Έστω λοιπόν ότι $(1+a)^k \geq 1 + ka$. Επειδή $1 + a > 0$, πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη παίρνουμε

$$\begin{aligned} (1+a)^k \geq 1 + ka &\Rightarrow (1+a)^k(1+a) \geq (1+ka)(1+a) \\ &\Rightarrow (1+a)^{k+1} \geq 1 + a + ka + a^2 \geq 1 + ka + a = 1 + (k+1)a \end{aligned}$$

□

Παρατήρηση 2.6.2. Η ανισότητα Bernoulli στην ουσία ισχύει πιο αυστηρά, δηλαδή

$$(1+a)^n > 1 + na \tag{2.6.2}$$

για κάθε $n \geq 2$ και για κάθε $a > -1$ με $a \neq 0$. Η (2.6.2) αποδεικνύεται όπως και η (2.6.1) με επαγωγή. Η (2.6.2) χρησιμοποιείται όταν θέλουμε να δείξουμε γνήσιες ανισότητες (πχ. δείτε τον ορισμό του αριθμού e παρακάτω).

Πόρισμα 2.6.3. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $x > 0$ ισχύει ότι*

$$x^n \geq 1 + n(x-1) \tag{2.6.3}$$

Απόδειξη. Επειδή $x = 1 + (x-1)$, θέτοντας $a = x - 1$ στην (2.6.1) παίρνουμε την (2.6.3). □

Ορισμός 2.6.4. *Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $a_1, \ldots, a_n$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Θέτουμε*

$$A_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \quad \text{και} \quad G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot \cdots \cdot a_n}$$

Ο A_n καλείται ***αριθμητικός μέσος*** *και ο G_n* ***γεωμετρικός μέσος*** *των $a_1, \ldots, a_n$.*

Λήμμα 2.6.5. *Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $a_1, \ldots, a_n$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Για κάθε $n \geq 2$ ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις*

$$nA_n = (n-1)A_{n-1} + a_n \tag{2.6.4}$$

και

$$A_n^n \geq A_{n-1}^{n-1} a_n \tag{2.6.5}$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε μόνο την (2.6.5) (η (2.6.4) είναι άμεση). Έστω $n \geq 2$. Από την (2.6.3) για $x = A_n/A_{n-1} > 0$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} A_n^n = A_{n-1}^n \left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right)^n &\overset{(2.6.3)}{\geq} A_{n-1}^n \left(1 + n\left(\frac{A_n}{A_{n-1}} - 1\right)\right) \\ &= A_{n-1}^n \frac{A_{n-1} + nA_n - nA_{n-1}}{A_{n-1}} \\ &= A_{n-1}^n \frac{nA_n - (n-1)A_{n-1}}{A_{n-1}} \overset{(2.6.4)}{=} A_{n-1}^{n-1} a_n \end{aligned}$$

□

Πρόταση 2.6.6. ***(ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού Μέσου)*** *Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $a_1, \ldots, a_n$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Τότε $A_n \geq G_n$.*

Απόδειξη. Πράγματι, για $n = 1$, $A_1 = G_1 = a_1$ και η ανισότητα είναι τετριμμένη. Έστω ότι για κάποιο $n = k$ ισχύει ότι $A_k \geq G_k$. Τότε από την (2.6.5) για $n = k + 1$ έχουμε

$$A_{k+1}^{k+1} \geq A_k^k a_{k+1} \geq G_k^k a_{k+1} = G_{k+1}^{k+1} \Rightarrow A_{k+1}^{k+1} \geq G_{k+1}^{k+1} \Rightarrow A_{k+1} \geq G_{k+1}$$

□

Παρατήρηση 2.6.7. Από την απόδειξη της Πρότασης 2.6.6 βλέπουμε ότι η η ανισότητα Bernoulli συνεπάγεται την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου. Μπορεί να δειχθεί και η αντίστροφη συνεπαγωγή και άρα στην ουσία οι δύο ανισότητες είναι ισοδύναμες μεταξύ τους. Επίσης αποδεικνύεται ότι η ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου είναι γνήσια αν και μόνο αν $n \geq 2$ και οι $a_1, \ldots, a_n$ δεν είναι όλοι ίσοι μεταξύ τους.

2.7 Κάποια χρήσιμα όρια

Πρόταση 2.7.1. (i) *Έστω $0 < \lambda < 1$. Τότε $\lambda^n \to 0$.*

(ii) *Έστω $a > 0$. Τότε $\sqrt[n]{a} \to 1$.*

(iii) $\sqrt[n]{n} \to 1$.

Απόδειξη. (1) Από την (2.6.3) για $x = \dfrac{1}{\lambda}$ παίρνουμε

$$x^n \geq 1 + n(x-1) > n(x-1) \tag{2.7.1}$$

Επειδή $x = 1/\lambda > 1$, θέτοντας $a = x - 1$ έχουμε ότι $a > 0$ και από την (2.7.1) έχουμε

$$0 < \lambda^n < \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{n} \tag{2.7.2}$$

Από την (2.7.2) και το Θεώρημα των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών παίρνουμε ότι $\lambda^n \to 0$.

(2) Από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου, έχουμε

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a} &= \sqrt[n]{a \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \cdots \cdot 1}_{(n-1)-\text{φορές}}} \\ &\leq \frac{a + (n-1)}{n} = \frac{a}{n} + 1 - \frac{1}{n} < 1 + \frac{a}{n} \end{aligned}$$

Αν $a \geq 1$ τότε

$$1 \leq \sqrt[n]{a} \leq 1 + \frac{a}{n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή

$$\lim_n \frac{a}{n} = a \lim_n \frac{1}{n} = 0$$

από το Θεώρημα των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών έχουμε $\lim_n \sqrt[n]{a} = 1$.

Αν τώρα $0 < a < 1$ θέτουμε $\beta = 1/a$. Τότε $\beta > 1$ και άρα, από την περίπτωση που μόλις αποδείξαμε, $\sqrt[n]{\beta} \to 1$. Άρα,

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{\beta}} \to \frac{1}{1} = 1$$

(3) Από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου, έχουμε

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{n} &= \sqrt[n]{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \cdots \cdot 1}_{(n-2)-\text{φορές}}} \\ &\leq \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n} + (n-2)}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}} + 1 - \frac{2}{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\end{aligned}$$

Επειδή επιπλέον $\sqrt[n]{n} \geq 1$ (άμεσο αφού $n \geq 1$) για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} \tag{2.7.3}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή

$$\lim_n \frac{2}{\sqrt{n}} = 2 \lim_n \frac{1}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{\lim_n \frac{1}{n}} = 0$$

από το Θεώρημα των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών έχουμε $\lim_n \sqrt[n]{n} = 1$. □

2.8 Μονότονες ακολουθίες

2.8.1 Βασικοί ορισμοί

Ορισμός 2.8.1. *Μια ακολουθία (a_n) θα λέγεται* ***αύξουσα*** *αν $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots$ και* ***γνησίως αύξουσα*** *αν $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$. Αντίστοιχα, η (a_n) θα λέγεται* ***φθίνουσα*** *αν $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots$ και* ***γνησίως φθίνουσα*** *αν $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$.*

Αν μια ακολουθία είναι αύξουσα ή φθίνουσα τότε καλείται ***μονότονη***. Ειδικότερα αν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα τότε καλείται ***γνησίως μονότονη***.

Παρατήρηση 2.8.2. Συνήθως για να αποδείξουμε ότι μια ακολουθία (a_n) είναι π.χ. αύξουσα δείχνουμε με Μαθηματική Επαγωγή ότι $a_{n+1} \geq a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Εναλλακτικά στην περίπτωση όπου η (a_n) είναι ακολουθία θετικών αριθμών μπορούμε να θεωρήσουμε τα πηλίκα $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ π.χ. αν ισχύει ότι $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε η (a_n) είναι αύξουσα.

Παραδείγματα 2.8.3. Η $a_n = 1/n$ είναι γνησίως φθίνουσα, η $a_n = n$ είναι γνησίως αύξουσα.

2.8.2 Μονότονες και φραγμένες ακολουθίες

Ορισμός 2.8.4. *Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών.*

(α) *Με* $\sup a_n$ *συμβολίζουμε το ελάχιστο άνω φράγμα του συνόλου των όρων της* (a_n)*, δηλαδή* $\sup a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

(β) *Με* $\inf a_n$ *συμβολίζουμε το μέγιστο κάτω φράγμα του συνόλου των όρων της* (a_n)*, δηλαδή* $\inf a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Όπως έχουμε δεί αν μια ακολουθία είναι φραγμένη τότε δεν έπεται απαραίτητα ότι είναι και συγκλίνουσα (κλασσικό παράδειγμα η $a_n = (-1)^n$). Τα πράγματα όμως είναι πιο ομαλά στις μονότονες ακολουθίες. Το επόμενο θεώρημα είναι στην ουσία η Αρχή Πληρότητας του $\mathbb{R}$ διατυπωμένη με ακολουθίες.

Θεώρημα 2.8.5. *Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία είναι συγκλίνουσα. Πιο συγκεκριμένα ισχύουν τα εξής.*

(α) *Αν* (a_n) *αύξουσα και άνω φραγμένη τότε* $\lim a_n = \sup a_n$.

(β) *Αν* (a_n) *φθίνουσα και κάτω φραγμένη ακολουθία τότε* $\lim a_n = \inf a_n$.

Απόδειξη. Θα δείξουμε μόνο το (α) (το (β) αποδεικνύεται ομοίως). Έστω (a_n) αύξουσα και άνω φραγμένη ακολουθία και έστω $s = \sup a_n$. (Το s είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του συνόλου των όρων της (a_n) και υπάρχει από το αξίωμα της πληρότητας του $\mathbb{R}$.)

Θα δείξουμε ότι $a_n \to s$. Σύμφωνα με τον ορισμό της σύγκλισης ακολουθίας αυτό σημαίνει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ θα πρέπει να βρούμε ένα $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|a_n - s| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Έστω λοιπόν ένα $\varepsilon > 0$. Τότε $s - \varepsilon < s$ και άρα το $s - \varepsilon$ δεν είναι άνω φράγμα της (a_n) (αφού είναι γνήσια μικρότερο του ελαχίστου άνω φράγματος της (a_n)). Συνεπώς δεν είναι όλοι οι όροι της (a_n) μικρότεροι ή ίσοι του $s - \varepsilon$ δηλαδή υπάρχει όρος γνήσια μεγαλύτερος του $s - \varepsilon$. Άρα θα ισχύει

$$s - \varepsilon < a_{n_0} \leq s$$

για κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$. Επειδή η (a_n) είναι αύξουσα έχουμε $a_{n_0} \leq a_n$ για κάθε $n \geq n_0$ και άρα

$$s - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq s$$

για όλα τα $n \geq n_0$. Συνεπώς

$$|a_n - s| < \varepsilon, \text{ για κάθε } n \geq n_0.$$

Άρα $a_n \to s$. □

2.8.3 Αρχή Κιβωτισμού

Ένα σημαντικό πόρισμα του Θεωρήματος 2.8.5 είναι το επόμενο θεώρημα γνωστό και ως **η αρχή του κιβωτισμού**.

Θεώρημα 2.8.6. *Έστω* $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq [a_3, b_3] \supseteq \ldots$ *φθίνουσα ακολουθία κλειστών και φραγμένων διαστημάτων του* $\mathbb{R}$*. Τότε η τομή* $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$ *είναι μη κενή. Αν επιπλέον* $b_n - a_n \to 0$ *τότε η τομή* $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$ *είναι μονοσύνολο.*

Απόδειξη. Η υπόθεση $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq [a_3, b_3] \supseteq \ldots$ συνεπάγεται ότι

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1$$

Με άλλα λόγια η (a_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη και η (b_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη. Από το Θεώρημα 2.8.5 έχουμε ότι οι (a_n) και (b_n) είναι συγκλίνουσες με $\lim_n a_n = \sup a_n$ και $\lim_n b_n = \inf b_n$. Έστω $a = \lim a_n = \sup a_n$ και $b = \lim b_n = \inf b_n$. Επειδή $a_n < b_n \Rightarrow \lim a_n \leq \lim b_n$ και άρα $a \leq b$.

Ισχυριζόμαστε ότι

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] = [a, b] \tag{2.8.1}$$

Πράγματι $a_n \leq a$ και $b \leq b_n$. Συνεπώς, $a_n \leq a \leq b \leq b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Με άλλα λόγια $[a, b] \subseteq [a_n, b_n]$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα

$$[a, b] \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] \tag{2.8.2}$$

Από την άλλη μεριά αν $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$ τότε $x \in [a_n, b_n] \Leftrightarrow a_n \leq x \leq b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αυτό σημαίνει ότι το x είναι άνω φράγμα της (a_n) και το y είναι κάτω φράγμα της (b_n) και άρα $\sup a_n = a \leq x \leq \inf b_n = b \Leftrightarrow x \in [a, b]$. Συνεπώς,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] \subseteq [a, b] \tag{2.8.3}$$

Από τις (2.8.2) και (2.8.3) έπεται η (2.8.1). Αν τώρα $\lim_n(b_n - a_n) = 0 \Rightarrow \lim a_n - \lim b_n = 0 \Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow a = b$ και από την (2.8.1) η τομή $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$ είναι το κοινό όριο των (a_n) και (b_n). □

Παρατήρηση 2.8.7. Το Θεώρημα 2.8.6 δεν ισχύει για φθίνουσα ακολουθία ***ανοικτών*** φραγμένων διαστημάτων. Π.χ.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(0, \frac{1}{n}\right) = \emptyset$$

διότι αν υπήρχε $x \in \left(0, \frac{1}{n}\right)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε $0 < x < \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άτοπο από Ιδιότητα Ευδόξου. Ομοίως δεν ισχύει για φθίνουσα ακολουθία κλειστών αλλά ***μη φραγμένων*** διαστημάτων. Π.χ.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}[n, +\infty) = \emptyset$$

διότι αν υπήρχε $x \in [n, +\infty)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θα έπρεπε $n \leq x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άτοπο από Αρχιμήδεια Ιδιότητα.

2.8.4 Το $\mathbb{R}$ δεν γράφεται υπό την μορφή ακολουθίας

Ορισμός 2.8.8. *Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$. Λέμε ότι το X* ***γράφεται υπό την μορφή ακολουθίας*** *αν υπάρχει ακολουθία πραγματικών αριθμών (x_n) τέτοια ώστε $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

Παρατήρηση 2.8.9. Π.χ. το δισύνολο $\{-1, 1\} = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ με $x_n = (-1)^n$. Γενικά, αποδεικνύεται ότι κάθε πεπερασμένο υποσύνολο γράφεται υπό την μορφή ακολουθίας. Επίσης το ίδιο το $\mathbb{N}$ γράφεται υπό την μορφή ακολουθίας, $\mathbb{N} = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ με $x_n = n$, το $\mathbb{Z}$ ομοίως, $\mathbb{Z} = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ με $x_n = \frac{n-1}{2}$ αν n περιττός και $x_n = -\frac{n}{2}$ αν n άρτιος. Αποδεικνύεται ότι και το $\mathbb{Q}$ γράφεται υπό την μορφή ακολουθίας.

Μια συνέπεια της Αρχής του Κιβωτισμού είναι η εξής.

Θεώρημα 2.8.10. *Το $\mathbb{R}$ δεν γράφεται υπό την μορφή ακολουθίας.*

Απόδειξη. Έστω προς απαγωγή σε άτοπο ότι $\mathbb{R} = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Για το x_1 επιλέγουμε κλειστό φραγμένο διάστημα I_1 με $x_1 \notin I_1$. Για το x_2 επιλέγουμε κλειστό υποδιάστημα I_2 του I_1 με $x_2 \notin I_2$. Είναι εύκολο να δούμε ότι μια τέτοια επιλογή είναι εφικτή. Ομοίως για το x_3 επιλέγουμε I_3 κλειστό υποδιάστημα του I_2 με $x_3 \notin I_3$ κ.ο.κ. Με αυτόν τον τρόπο κατασκευάζουμε μια φθίνουσα ακολουθία κλειστών και φραγμένων διαστημάτων $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \dots$ με την ιδιότητα $x_n \notin I_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Τώρα από το Πόρισμα 2.8.6 υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ με $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. Αφού υποθέσαμε ότι $\mathbb{R} = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ θα πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον ένα $k \in \mathbb{N}$ με $x = x_k$. Συνεπώς $x_k \in \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ και άρα $x_k \in I_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού από την επιλογή του I_k, $x_k \notin I_k$. □

Παρατήρηση 2.8.11. Στην Θεωρία Συνόλων τα σύνολα που γράφονται υπό την μορφή ακολουθίας καλούνται **αριθμήσιμα**. Τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ που δεν γράφονται υπό την μορφή ακολουθίας καλούνται **υπεραριθμήσιμα**. Με αυτή την ορολογία το Πόρισμα 2.8.10 λέει ότι **το $\mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο**.

2.8.5 Απόκλιση ακολουθιών στο άπειρο

Ορισμός 2.8.12. *Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών.*

*(α) Θα λέμε ότι η (a_n) **τείνει στο** $+\infty$ ή ότι **το όριο της είναι το** $+\infty$ και θα γράφουμε $a_n \to +\infty$ ή $\lim_n a_n = +\infty$ αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $a_n > M$ για όλα τα $n \geq n_0$.*

*(β) Θα λέμε ότι η (a_n) **τείνει στο** $-\infty$ ή ότι **το όριο της είναι το** $-\infty$ και θα γράφουμε $a_n \to -\infty$ ή $\lim_n a_n = -\infty$ αν για κάθε $M < 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $a_n < M$ για όλα τα $n \geq n_0$.*

Οι ακολουθίες που τείνουν στο άπειρο δεν θεωρούνται συγκλίνουσες ακολουθίες. Συχνά όταν μια ακολουθία τείνει στο $+\infty$ ή $-\infty$ λέμε και ότι ***αποκλίνει*** στο $+\infty$ ή $-\infty$ αντίστοιχα.

Παράδειγμα 2.8.13. Έστω $\lambda > 1$. Τότε $\lambda^n \to +\infty$.

Απόδειξη. Έστω $M > 0$. Θα βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστω $\lambda^n > M$ για κα΄θε $n \geq n_0$. Θέτουμε $a = \lambda - 1$. Τότε $a > 0$ και από την ανισότητα Bernoulli

$$\lambda^n = (1+a)^n \geq 1 + na > na$$

Επιλέγοντας συνεπώς $n_0 \in \mathbb{N}$ με $n_0 > M/a$ έχουμε ότι $\lambda^n > na \geq n_0 a > M$ για κάθε $n \geq n_0$. □

Μια χρήσιμη πρόταση είναι και η εξής.

Πρόταση 2.8.14. *Αν $a_n \neq 0$ και $a_n \to +\infty$ τότε $\dfrac{1}{a_n} \to 0$. Ομοίως αν $a_n \to -\infty$.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε την πρόταση στην περίπτωση όπου $a_n \to +\infty$ (η περίπτωση $a_n \to -\infty$ αντιμετωπίζεται με παρόμοιο τρόπο ή θεωρώντας την $(-a_n)$). Έστω $\varepsilon > 0$. Θέτουμε $M = 1/\varepsilon$. Αφού $a_n \to +\infty$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $a_n > M$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα

$$0 < \frac{1}{a_n} < \frac{1}{M} = \varepsilon$$

για κάθε $n \geq n_0$. Συνεπώς, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $0 < \frac{1}{a_n} < \varepsilon$ για όλα τα $n \geq n_0$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|\frac{1}{a_n} - 0| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα $\frac{1}{a_n} \to 0$. □

2.8.6 Μονότονες και μη φραγμένες ακολουθίες

Το επόμενο θεώρημα είναι το αντίστοιχο του θεωρήματος 2.8.5 για μη φραγμένες μονότονες ακολουθίες.

Θεώρημα 2.8.15. *Αν μία ακολουθία (a_n) είναι αύξουσα και όχι άνω φραγμένη τότε τείνει στο $+\infty$. Αντίστοιχα, αν μία ακολουθία είναι φθίνουσα και όχι κάτω φραγμένη τότε τείνει στο $-\infty$.*

Απόδειξη. Έστω (a_n) αύξουσα και όχι άνω φραγμένη (αν (a_n) είναι φθίνουσα η απόδειξη είναι παρόμοια). Έστω $M > 0$. Αφού η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη το M δεν είναι άνω φράγμα της (a_n) και συνεπώς θα υπάρχει ένας όρος έστω a_{n_0} της (a_n) που θα είναι γνήσια μεγαλύτερος του M. Έχουμε λοιπόν $a_{n_0} > M$. Απο την άλλη μεριά αφού η (a_n) είναι αύξουσα έπεται ότι για κάθε $n \geq n_0$ θα έχουμε $a_n \geq a_{n_0} > M$ Άρα $a_n > M$ για κάθε $n \geq n_0$.

Δείξαμε συνεπώς ότι για κάθε $M \in \mathbb{R}$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $a_n > M$ για όλα τα $n \geq n_0$. Αυτό όμως σημαίνει ότι $a_n \to +\infty$. □

Από το Θεώρημα 2.8.5 και το Θεώρημα 2.8.15 έχουμε το εξής συμπέρασμα.

Πόρισμα 2.8.16. *Κάθε μονότονη ακολουθία έχει όριο (πεπερασμένο ή άπειρο). Το όριο είναι πεπερασμένο αν και μόνο αν η ακολουθία είναι φραγμένη.*

2.9 Ο αριθμός Euler

Για να δώσουμε τον ορισμό του αριθμού e θα χρειασθούμε την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 2.9.1. *Έστω οι ακολουθίες $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ και $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Ισχύουν τα εξής.*

(i) *Η (a_n) είναι γνησίως αύξουσα.*

(ii) *Η (b_n) είναι γνησίως φθίνουσα.*

(iii) *$a_n < b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

(iv) *Οι (a_n) και (b_n) συγκλίνουν στο ίδιο όριο.*

Απόδειξη. (α) Για κάθε $n \geq 2$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} &= \frac{\frac{(n+1)^n}{n^n}}{\frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}}} \\
&= \frac{(n+1)^n (n-1)^{n-1}}{n^n n^{n-1}} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \\
&= \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \\
&> \left(1 - \frac{n}{n^2}\right) \cdot \frac{n}{n-1} \quad \text{(ανισότητα Bernoulli ισχυρή μορφή)} \\
&= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n}{n-1} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n-1} = 1
\end{aligned}$$

(β) Για κάθε $n \geq 2$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{b_{n-1}}{b_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} &= \frac{\frac{n^n}{(n-1)^n}}{\frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}}} \\
&= \frac{n^{2n+1}}{(n^2-1)^n(n+1)} \\
&= \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} \\
&> \left(1+\frac{n}{n^2-1}\right) \cdot \frac{n}{n+1} \quad \text{(ανισότητα Bernoulli ισχυρή μορφή)} \\
&= \frac{(n^2-1+n)n}{(n^2-1)(n+1)} = \frac{n^3-n+n^2}{n^3+n^2-n-1} > 1
\end{aligned}$$

(γ) Παρατηρούμε ότι $b_n = a_n\left(1+\dfrac{1}{n}\right) > a_n \cdot 1 = a_n$

(δ) Από τα προηγούμενα έχουμε ότι $a_1 \leq a_n < b_n \leq b_1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα η (a_n) είναι γνησίως αύξουσα και άνω φραγμένη και η (b_n) είναι γνησίως φθίνουσα και κάτω φραγμένη. Συνεπώς είναι και οι δύο συγκλίνουσες ως μονότονες και φραγμένες. Επιπλέον, έχουν το ίδιο όριο αφού

$$\lim_n b_n = \lim_n \left(a_n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \lim_n a_n \cdot \lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_n a_n$$

□

Ορισμός 2.9.2. *Το κοινό όριο των ακολουθιών $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ και $b_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ καλείται **αριθμός Euler** και συμβολίζεται με e.*

2.10 Υπακολουθίες και το Θεώρημα Bolzano–Weierstrass

Ορισμός 2.10.1. *Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Μια ακολουθία (b_n) θα καλείται **υπακολουθία** της (a_n) αν υπάρχει μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών $k_1 < k_2 < \dots$ τέτοια ώστε $b_n = a_{k_n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

Πρόταση 2.10.2. *Έστω (a_n) ακολουθία. Αν $\lim_n a_n = a$ (a πεπερασμένο ή άπειρο) τότε $\lim\limits_n a_{k_n} = a$ για κάθε υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n).*

Για την απόδειξη θα χρειασθούμε το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 2.10.3. *Αν (k_n) γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών τότε $k_n \geq n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$*

Απόδειξη. Με επαγωγή. Έχουμε $k_1 \geq 1$ αφού $k_1 \in \mathbb{N}$. Έστω $k_n \geq n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Αφού $k_{n+1} > k_n$ και k_{n+1}, k_n φυσικοί έπεται ότι $k_{n+1} \geq k_n + 1 \geq n + 1$. □

Απόδειξη της Πρότασης 2.10.2. Θα εξετάσουμε την περίπτωση $a \in \mathbb{R}$ (η περίπτωση $a = \pm\infty$ αποδεικνύεται παρόμοια). Έστω $a_n \to a$ και έστω (a_{k_n}) υπακολουθία της (a_n). Θα δείξουμε ότι $a_{k_n} \to a$. Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$. Από την σύγκλιση $a_n \to a$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$, $|a_n - a| < \varepsilon$. Επειδή $k_n \geq n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (Λήμμα 2.10.3) έπεται ότι $k_n \geq n_0$ για κάθε $n \geq n_0$. Συνεπώς $|a_{k_n} - a| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|a_{k_n} - a| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$, δηλαδή η υπακολουθία (a_{k_n}) συγκλίνει στο a. □

Πρόταση 2.10.4. *Κάθε ακολουθία πραγματικών αριθμών περιέχει μονότονη υπακολουθία.*

Απόδειξη. Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Ένας φυσικός αριθμός $k \in \mathbb{N}$ θα καλείται **σημείο κορυφής της** (a_n) αν $a_k > a_{k'}$ για κάθε $k' > k$ (δηλαδή ο a_k ξεπερνάει όλους τους επόμενους όρους της (a_n)). Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για το πλήθος των στοιχείων του K.

Περίπτωση 1 : Το K είναι πεπερασμένο. Στην περίπτωση αυτή θέτουμε $k_1 = \max K + 1$ (αν το K είναι κενό θέτουμε $k_1 = 1$). Τότε το k_1 δεν ανήκει στο K (αφού είναι μεγαλύτερο του $\max K$) και άρα το k_1 δεν είναι σημείο κορυφής της (a_n). Συνεπώς υπάρχει $k_2 > k_1$ με $a_{k_2} \geq a_{k_1}$. Ομοίως επειδή $k_2 > k_1 > \max K$ το k_2 δεν είναι σημείο κορυφής και άρα υπάρχει $k_3 > k_2$ με $a_{k_3} \geq a_{k_2}$ κ.ο.κ. Με αυτόν τον τρόπο κατασκευάζουμε μια αύξουσα υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n).

Περίπτωση 2 : Το K είναι άπειρο, έστω $K = \{k_1 < k_2 < k_3 < \dots\}$. Τότε $a_{k_1} > a_{k_2} > a_{k_3} > \dots$ δηλαδή η (a_{k_n}) είναι γνησίως φθίνουσα υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n). □

Θεώρημα 2.10.5. ***(Θεώρημα Bolzano–Weierstrass)*** *Κάθε φραγμένη ακολουθία περιέχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία.*

Απόδειξη. Έστω (a_n) φραγμένη. Από την Πρόταση 2.10.4 η (a_n) περιέχει μια μονότονη υπακολουθία (a_{k_n}). Η (a_{k_n}) είναι φραγμένη αφού όλη η (a_n) είναι φραγμένη. Άρα η (a_{k_n}) είναι μονότονη και φραγμένη και συνεπώς από το Θεώρημα 2.8.5 είναι συγκλίνουσα. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Συνέχεια και Όρια Συναρτήσεων

3.1 Ορισμός της συνέχειας

Στα επόμενα με X θα συμβολίζουμε ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Ορισμός 3.1.1. *Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in X$. Η συνάρτηση f καλείται **συνεχής στο** x_0 αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in X$ με $|x - x_0| < \delta$ ισχύει ότι $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.*

*Η f θα καλείται **συνεχής** αν είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in X$.*

Με άλλα λόγια ο παραπάνω ορισμός λέει ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 \in X$ αν οποιαδήποτε περιοχή του $f(x_0)$ περιέχει όλες τις τιμές που παίρνει η f όταν αυτή περιορισθεί σε μια κατάλληλη περιοχή του x_0.

Παράδειγμα 3.1.2. Κάθε σταθερή συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής. Πράγματι, έστω $x_0 \in X$ και $\varepsilon > 0$. Τότε για οποιοδήποτε $\delta > 0$ αν $x \in X$ με $|x - x_0| < \delta$ έπεται ότι $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$.

Παράδειγμα 3.1.3. Η ταυτοτική συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x$ για κάθε $x \in X$ είναι συνεχής. Πράγματι, έστω $x_0 \in X$ και $\varepsilon > 0$. Τότε για $\delta = \varepsilon$ έχουμε ότι αν $x \in X$ με $|x - x_0| < \delta$ τότε $|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \varepsilon = \delta$.

Στα παραπάνω δύο παραδείγματα το δ ήταν ανεξάρτητο της επιλογής του x_0 (στην περίπτωση της σταθερής συνάρτσης ήταν ανεξάρτητο και του ε). Γενικά, για μια δεδομένη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ το δ εξαρτάται από το x_0 και το ε. Παρατηρείστε επίσης ότι η συνέχεια είναι μια ιδιότητα που αφορά μόνο στα σημεία του πεδίου ορισμού της συνάρτησης.

Παρατήρηση 3.1.4. Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0 θα λέμε ότι είναι **ασυνεχής** στο x_0. Αν η f είναι ασυνεχής σε κάθε $x_0 \in X$ τότε θα λέμε ότι η f είναι **παντού ασυνεχής**.Η άρνηση του Ορισμού 3.1.1 σημαίνει το εξής:

Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in X$. Η f είναι ασυνεχής στο x_0 αν και μόνο αν υπάρχει μια θετική σταθερά $\varepsilon_0 > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x \in X$ με $|x - x_0| < \delta$ αλλά $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$.

Με άλλα λόγια υπάρχει μια σταθερή περιοχή του $f(x_0)$ για την οποία όσο και να περιορίσουμε την f σε μικρές περιοχές γύρω από το x_0 δεν θα καταφέρουμε ποτέ να εγκλωβίσουμε μέσα σε αυτήν όλες τις τιμές της.

Παράδειγμα 3.1.5. (*Η συνάρτηση Dirichlet*) Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ αν } x \text{ ρητός} \\ 0 \text{ αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$ είναι παντού ασυνεχής. Πράγματι έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Από την την ιδιότητα της Πυκνότητας των ρητών και αρρήτων στο διάστημα $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ όπου $\delta > 0$ οποιοδήποτε, μπορούμε να βρούμε έναν ρητό q και έναν άρρητο a. Αν τώρα ο x_0 είναι ρητός έπεται ότι $|f(a) - f(x_0)| = |0 - 1| = 1$ ενώ αν ο x_0 είναι άρρητος $|f(q) - f(x_0)| = |1 - 0| = 1$.

Άρα για $\varepsilon_0 = 1$ και για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ με $|x - x_0| < \delta$ και $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$. Συνεπώς η f είναι ασυνεχής σε οποιοδήποτε $x_0 \in \mathbb{R}$.

3.2 Τοπικές ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων

Πρόταση 3.2.1. *Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in X$ σημείο συνέχειας της f.*

(α) Αν $f(x_0) > 0$ τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

(β) Αν $f(x_0) < 0$ τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Απόδειξη. (α) Το ότι το x_0 είναι σημείο συνέχειας της f σημαίνει εξ ορισμού ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$, για κάθε $x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ Θέτοντας $\varepsilon = f(x_0) > 0$ παίρνουμε το συμπέρασμα. (β) Θεωρούμε την $-f$ και εφαρμόζουμε το (α). □

Πόρισμα 3.2.2. *Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in X$ σημείο συνέχειας της f.*

(α) Αν $M \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0) < M$ τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) < M$ για κάθε $x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

(β) Αν $m \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $m < f(x_0)$ τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $m < f(x)$ για κάθε $x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

(γ) Αν $m, M \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $m < f(x_0) < M$ τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $m < f(x) < M$ για κάθε $x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Απόδειξη. (α) Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = M - f(x)$. Η g είναι συνεχής στο x_0 και $g(x_0) > 0$. Εφαρμόζωντας την Πρόταση 3.2.1(α) παίρνουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $g(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) < M$ για κάθε $x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

(β) Θεωρούμε την $-f$ και εφαρμόζουμε το (α) για το $-m$.

(γ) Από το (α) υπάρχει $\delta_1 > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) < M$ για κάθε $x \in X \cap (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$. Ομοίως από το (β) υπάρχει $\delta_2 > 0$ τέτοιο ώστε $m < f(x)$ για κάθε $x \in X \cap (x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2)$. Για $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ έχουμε το ζητούμενο. □

3.3 Συνέχεια και ακολουθίες - Αρχή Μεταφοράς

Το παρακάτω θεώρημα λέει ότι η f είναι συνεχής σε ένα $x_0 \in X$ αν και μόνο αν μεταφέρει τις ακολουθίες που είναι συγκλίνουσες στο x_0 σε ακολουθίες που είναι συγκλίνουσες στο $f(x_0)$. Για τον λόγο αυτό καλείται και **Αρχή Μεταφοράς**.

Θεώρημα 3.3.1. *Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in X$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα.*

(α) Η f είναι συνεχής στο x_0.

(β) Για κάθε ακολουθία (x_n) στο X με $x_n \to x_0$ έπεται ότι $f(x_n) \to f(x_0)$.

Απόδειξη. **(α)** $\Rightarrow$ **(β)** : Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0. Έστω (x_n) ακολουθία στο X με $x_n \to x_0$. Θα δείξουμε ότι $f(x_n) \to f(x_0)$. Έστω $\varepsilon > 0$. Λόγω της συνέχειας της f στο x_0 υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$x \in X \text{ και } |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \tag{3.3.1}$$

Επειδή η (x_n) συγκλίνει στο x_0 υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x_0| < \delta \tag{3.3.2}$$

Έστω $n \geq n_0$. Από την (3.3.2) έχουμε $|x_n - x_0| < \delta$ και άρα από την (3.3.1) (για $x = x_n$) έπεται ότι $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$. Άρα για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$ για όλα τα $n \geq n_0$. Συνεπώς $f(x_n) \to f(x_0)$.

(β) $\Rightarrow$ **(α)** Υποθέτουμε ότι $f(x_n) \to f(x_0)$ για κάθε ακολουθία (x_n) στο X με $x_n \to x_0$. Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0. Έστω προς απαγωγή σε άτοπο ότι η f δεν είναι συνεχής στο x_0. Όπως είδαμε αυτό σημαίνει ότι υπάρχει κάποιο $\varepsilon_0 > 0$ τέτοιο ώστε για κα΄θε $\delta > 0$ υπάρχει $x \in X$ με $|x - x_0| < \delta$ αλλά $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$. Άρα για $n \in \mathbb{N}$, θέτοντας $\delta = 1/n$ έχουμε ότι υπάρχει $x_n \in X$ με

$$|x_n - x_0| < 1/n \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N} \tag{3.3.3}$$

αλλά

$$|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0 \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N} \tag{3.3.4}$$

Η ακολουθία (x_n) που σχηματίζεται με αυτό τον τρόπο συγκλίνει στο x_0 αφού από την (3.3.3) έχουμε $x_n - x_0 \to 0 \Leftrightarrow x_n \to x_0$. Άρα από την υπόθεσή μας θα πρέπει $f(x_n) \to f(x_0)$. Συνεπώς υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon_0 \text{ για κάθε } n \geq n_0$$

το οποίο έρχεται σε αντίφαση με την (3.3.4). □

Η Αρχή Μεταφοράς μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για να δείξουμε ότι μια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ είναι ασυνεχής σε ένα σημείο $x_0 \in X$. Πράγματι, από το Θεώρημα 3.3.1 έχουμε ότι η f είναι ασυνεχής στο x_0 αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία (x_n) στο X με $x_n \to x_0$ αλλά $f(x_n) \not\to f(x_0)$. Ειδικότερα έχουμε το εξής.

Πόρισμα 3.3.2. *Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in X$. Αν υπάρχουν δύο ακολουθίες (x_n) και (x_n') με $\lim_n x_n = \lim_n x_n' = x_0$ αλλά $\lim_n f(x_n) \neq \lim_n f(x_n')$ τότε η f είναι ασυνεχής στο x_0.*

Απόδειξη. Αν η f ήταν συνεχής στο x_0, από την Αρχή Μεταφοράς θα έπρεπε $\lim_n f(x_n) = \lim_n f(x_n') = f(x_0)$, άτοπο. Άρα η f είναι ασυνεχής στο x_0. □

Παράδειγμα 3.3.3. Χρησιμοποιώντας το Πόρισμα 3.3.2 μπορούμε να δώσουμε έναν άλλο τρόπο απόδειξης για το ότι η συνάρτηση Dirichlet (Παράδειγμα 3.1.5) δεν είναι συνεχής σε κανένα σημείο. Πράγματι έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Έστω (q_n) ακολουθία ρητών και (a_n) ακολουθία αρρήτων με με $q_n \to x_0$ και

$a_n \to x_0$ (τέτοιες ακολουθίες υπάρχουν από πυκνότητα ρητών και αρρήτων). Έχουμε $f(q_n) = 1$, για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και άρα $\lim_n f(q_n) = 1$. Από την άλλη πλευρά $f(a_n) = 0$, για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και άρα $\lim_n f(a_n) = 0$.

3.4 Πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων

Με την Αρχή Μεταφοράς αποδεικνύεται πολύ εύκολα ότι η συνέχεια διατηρείται μέσω αλγεβρικ'ων πράξεων και σύνθεσης συναρτήσεων.

Θεώρημα 3.4.1. *Έστω $f, g : X \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in X$ τέτοιο ώστε οι f και g είναι συνεχείς στο x_0. Τότε ισχύουν τα παρακάτω.*

(α) Η συνάρτηση $f + g$ είναι συνεχής στο x_0.

(β) Η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι συνεχής στο x_0.

(γ) Αν επιπλέον $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in X$ η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι συνεχής στο x_0.

Απόδειξη. Θα δείξουμε μόνο το (α). Τα (β) και (γ) αποδεικνύονται ομοίως. Έστω (x_n) ακολουθία στο X με $x_n \to x_0$. Αφού οι f, g είναι συνεχείς στο x_0 έχουμε ότι $f(x_n) \to f(x_0)$ και $g(x_n) \to g(x_0)$. Άρα $f(x_n) + g(x_n) \to f(x_0) + g(x_0)$. Από Αρχή Μεταφοράς η συνάρτηση $f + g$ είναι συνεχής στο x_0. □

Θεώρημα 3.4.2. *Έστω $g : X \to \mathbb{R}$ και $f : Y \to \mathbb{R}$ με $f(X) \subseteq Y$ ώστε να ορίζεται η σύνθεση $F : X \to \mathbb{R}$ με $F(x) = f(g(x))$ για κάθε $x \in X$. Αν η g είναι συνεχής στο x_0 και η f είναι συνεχής στο $g(x_0)$ τότε η F είναι συνεχής στο x_0.*

Απόδειξη. Έστω (x_n) ακολουθία στο X με $x_n \to x_0$. Αφού η g είναι συνεχής στο x_0, από Αρχή Μεταφοράς έχουμε ότι $g(x_n) \to x_0$. Ομοίως επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 έχουμε ότι $f(g(x_n) \to f(g(x_0))$. Από Αρχή Μεταφοράς η σύνθεση $F = f \circ g$ των f και g είναι συνεχής στο x_0. □

3.5 Συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες σε διαστήματα του $\mathbb{R}$

Στην παράγραφο αυτή θα αποδείξουμε δύο βασικές ιδιότητες που έχουν οι συνεχείς συναρτήσεις $f : X \to \mathbb{R}$ στην περίπτωση όπου το X είναι κλειστό και φραγμένο διάστημα του $\mathbb{R}$.

3.5.1 Το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών ή Θεώρημα Bolzano

Ένα από τα σημαντικότερα θεωρήματα για συνεχείς συναρτήσεις είναι το Θεώρημα Ενδιαμέσων τιμών ή Θεώρημα Bolzano που διατυπώνεται ως εξής.

Θεώρημα 3.5.1. *(Θεώρημα των Ενδιάμεσων Τιμών) Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(a) < 0 < f(b)$. Τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$.*

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 3.5.1 θυμίζουμε τις παρακάτω δύο προτάσεις.

Πρόταση 3.5.2. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και άνω φραγμένο. Τότε υπάρχει ακολουθία (a_n) στο A με $a_n \to \sup A$.*

Απόδειξη. Από την χαρακτηριστική ιδιότητα του supremum, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $a \in A$ με $s - \varepsilon < a \le s$. Θέοντας $\varepsilon = 1/n$ έχουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να επιλέξουμε $a_n \in A$ τέτοιο ώστε

$$\sup A - \frac{1}{n} < a_n \le \sup A$$

Από το Θεώρημα των Ισοσυγκλινουσών ακολουθιών έπεται ότι η ακολουθία (a_n) συγκλίνει στο $\sup A$. □

Πρόταση 3.5.3. *Έστω (y_n) συγκλίνουσα ακολουθία. Αν $y_n \ge 0$ τότε $\lim_n y_n \ge 0$. Αντίστοιχα αν $y_n \le 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε $\lim_n y_n \le 0$.*

Απόδειξη. Έστω $y_n \ge 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και έστω $y = \lim_n y_n$. Έστω προς απαγωγή σε άτοπο ότι $y < 0$. Επειδή $y_n \to y$ για $\varepsilon = |y| > 0$ θα υπήρχε $n_0 \in \mathbb{N}$ με $|y_n - y| < |y| \Rightarrow y_n < 0$ για κάθε $n \ge n_0$. Άτοπο, αφού $y_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ομοίως αν $y_n \le 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.5.1. Ορίζουμε $A = \{x \in [a,b] : f(x) < 0\}$. Το A είναι μη κενό αφού περιέχει το a. Επίσης είναι άνω φραγμένο από το b. Άρα από την Αρχή Πληρότητας του $\mathbb{R}$ το A έχει supremum. Θέτουμε $\xi = \sup A$ και θα δείξουμε ότι $f(\xi) = 0$.

Καταρχάς η f ορίζεται στο ξ αφού $\xi \in [a,b]$ (πράγματι, $a \le \xi$ διότι $a \in A$ και ξ άνω φράγμα του A και $\xi \le b$ διότι το b είναι άνω φράγμα του A και το ξ είναι το μικρότερο άνω φράγμα του A). Επειδή $\xi = \sup A$ από την Πρόταση 3.5.2 υπάρχει ακολουθία (a_n) στο A με $a_n \to \xi$. Από Αρχή Μεταφοράς $f(a_n) \to f(\xi)$ και επειδή $f(a_n) < 0$ ($a_n \in A$) από Πρόταση 3.5.3 έχουμε ότι

$$\lim_n f(a_n) = f(\xi) \le 0 \tag{3.5.1}$$

Αυτό μας δίνει και ότι $\xi \ne b$ αφού $f(b) > 0$ και άρα $\xi < b$. Επιλέγουμε τώρα μια ακολουθία (b_n) στο $(\xi, b]$ με $b_n \to \xi$ (π.χ. $b_n = \xi + \frac{d}{n}$ όπου $d = b - \xi$). Αφού η f είναι συνεχής στο ξ έπεται ότι $f(b_n) \to f(\xi)$. Επειδή $b_n \notin A$ ($b_n > \xi = \sup A$), έχουμε ότι $f(b_n) \ge 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα από Πρόταση 3.5.3,

$$\lim_n f(b_n) = f(\xi) \ge 0 \tag{3.5.2}$$

Από τις (3.5.1) και (3.5.2) προκύπτει ότι $f(\xi) = 0$. □

Το Θεώρημα 3.5.1 διατυπώνεται και γενικότερα ως εξής.

Θεώρημα 3.5.4. *(Θεώρημα των Ενδιάμεσων Τιμών γενική μορφή) Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής όπου I διάστημα του $\mathbb{R}$ και έστω a, b στο I με $a < b$ και $f(a) \ne f(b)$. Αν $f(a) < f(b)$ τότε για κάθε $\eta \in \mathbb{R}$ με $f(a) < \eta < f(b)$ υπάρχει $\xi \in (a,b)$ με $f(\xi) = \eta$. Ομοίως αν $f(a) > f(b)$.*

Απόδειξη. Έστω $f(a) < f(b)$. Θεωρούμε την συνάρτηση $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) - \eta$, για κάθε $x \in [a,b]$. Η g είναι συνεχής και $g(a) < 0 < g(b)$. Από το Θεώρημα 3.5.1 υπάρχει $\xi \in (a,b)$ με $g(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = \eta$. Αν $f(a) > f(b)$ θεωρείστε την $g(x) = \eta - f(x)$. □

Πόρισμα 3.5.5. *Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής όπου I διάστημα του $\mathbb{R}$. Αν $f(x) \ne 0$ τότε η f διατηρεί το ίδιο πρόσημο σε όλο το I, δηλαδή είτε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in I$ είτε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in I$.*

Απόδειξη. Αν η f έπαιρνε ετερόσημες τιμές τότε από το Θεώρημα 3.5.4 θα έπαιρνε και την τιμή 0. □

Με χρήση του Θεωρήματος Ενδιάμεσων Τιμών μπορούμε να αποδείξουμε την ύπαρξη της n-οστής ρίζας ενός οποιουδήποτε θετικού αριθμού.

Πόρισμα 3.5.6. *Έστω $a > 0$ και $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$. Τότε υπάρχει $x > 0$ με $x^n = a$.*

Απόδειξη. Η συνάρτηση $f(x) = x^n - a$ είναι συνεχής (προκύπτει από πράξεις συνεχών) και παίρνει αρνητικές και θετικές τιμές (π.χ. $f(0) = -a$ και $f(a+1) = (a+1)^n - a > a + 1 - a = 1 > 0$). Άρα υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ με $0 < x < a + 1$ τέτιοι ώστε $f(x) = 0$ ισοδύναμα $x^n = a$. □

3.5.2 Το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής

Μια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ θα καλείται *φραγμένη* αν υπάρχουν $m, M \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $m \leq f(x) \leq M$ για όλα τα $x \in X$. Είναι εύκολο να δούμε ότι η f είναι φραγμένη αν υπάρχει $K \geq 0$ με $|f(x)| \leq K$.

Πρόταση 3.5.7. *Κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη.*

Απόδειξη. Έστω προς απαγωγή σε άτοπο ότι η f δεν είναι φραγμένη. Τότε για κάθε $M > 0$ υπάρχει $x \in [a, b]$ τέτοιο ώστε $|f(x)| > M$. Άρα για $K = 1$ μπορούμε να επιλέξουμε $x_1 \in [a, b]$ με $|f(x_1)| > 1$. Ομοίως για $K = 2$ επιλέγουμε $x_2 \in [a, b]$ με $|f(x_2)| > 2$. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο σχηματίζουμε μια ακολουθία (x_n) στο $[a, b]$ με

$$|f(x_n)| > n \tag{3.5.3}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Η (x_n) είναι φραγμένη και άρα από το Θεώρημα Bolzano–Weierstrass περιέχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία (x_{k_n}). Έστω $x_0 = \lim x_{k_n}$. Επειδή $a \leq x_{k_n} \leq b$ θα είναι και $a \leq x_0 \leq b$. Άρα η f ορίζεται στο x_0 και συνεπώς αφού $x_{k_n} \to x_0$ από Αρχή Μεταφοράς θα πρέπει $f(x_{k_n}) \to f(x_0)$. Όμως, από την (3.5.3), έχουμε $|f(x_{k_n})| > k_n$ και επειδή όπως έχουμε δεί $k_n \geq n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έπεται ότι $|f_{k_n}(x)| > n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα η $(f_{k_n}(x))$ δεν είναι φραγμένη και συνεπώς δεν μπορεί να είναι και συγκλίνουσα, άτοπο. □

Θεώρημα 3.5.8. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε η f λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.*

Απόδειξη. Από την Πρόταση 3.5.7 η f είναι φραγμένη, δηλαδή το σύνολο τιμών της f είναι φραγμένο. Θέτουμε $s = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$ και θα δείξουμε ότι υπάρχει $x \in [a, b]$ με $f(x) = s$ (για να δείξουμε ότι η f λαμβάνει ελάχιστη τιμή θέτουμε $\tau = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$ και εργαζόμαστε ομοίως). Ας υποθέσουμε ότι αυτό δεν συμβαίνει, οπότε

$$f(x) < s \tag{3.5.4}$$

για κάθε $x \in [a, b]$. Μπορούμε τότε να ορίσουμε την συνάρτηση $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x) = \frac{1}{s - f(x)}$$

Από την χαρακτηριστική ιδιότητα του supremum, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να επιλέξουμε $x_n \in [a, b]$ με την ιδιότητα

$$s - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq s \tag{3.5.5}$$

Από τις (3.5.4) και (3.5.5) παίρνουμε ότι $0 < s - f(x) < \dfrac{1}{n}$ και άρα $g(x_n) > n$. Αυτό όμως σημαίνει ότι η g δεν είναι άνω φραγμένη, άτοπο αφού είναι συνεχής και ορίζεται σε κλειστό φραγμένο διάστημα. □

Από τα Θεωρήματα 3.5.4 και 3.5.8 παίρνουμε το παρακάτω πόρισμα.

Πόρισμα 3.5.9. *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε υπάρχουν $m\leq M$ στο $\mathbb{R}$ με $f([a,b])=[m,M]$. Με άλλα λόγια οι συνεχείς συναρτήσεις μεταφέρουν κλειστά και φραγμένα διαστήματα σε κλειστά και φραγμένα διαστήματα.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 3.5.8 η f λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Έστω $m=\min\{f(x):x\in[a,b]\}$ και $M=\max\{f(x):x\in[a,b]\}$. έχουμε $m\leq f(x)\leq M$ για κάθε $x\in[a,b]$ και άρα $f([a,b])\subseteq[m,M]$. Από την άλλη μεριά αν $m=f(x_1)$ και $M=f(x_2)$ τότε από το Θεώρημα 3.5.4 για κάθε $y\in(m,M)$ υπάρχει ξ μεταξύ των x_1,x_2 με $f(\xi)=\eta$ και άρα $[m,M]\subseteq f([a,b])$. Συνεπώς $f([a,b])=[m,M]$. □

3.6 Συνεχείς και $1-1$ συναρτήσεις

Έστω $\emptyset\neq X\subseteq\mathbb{R}$ και $f:X\to\mathbb{R}$. Η f καλείται *γνησίως αύξουσα* αν για κάθε $x_1,x_2\in X$ με $x_1<x_2$ ισχύει ότι $f(x_1)<f(x_2)$. Αντίστοιχα η f καλείται *γνησίως φθίνουσα* αν για κάθε $x_1,x_2\in X$ με $x_1<x_2$ ισχύει ότι $f(x_1)>f(x_2)$. Η f καλείται *γνησίως μονότονη* αν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα. Τέλος η f καλείται $1-1$ αν για κάθε $x_1,x_2\in X$ με $x_1\neq x_2$ έχουμε ότι $f(x_1)\neq f(x_2)$.

Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη τότε είναι και 1-1 αλλά γενικά το αντίστροφο δεν ισχύει. Για παράδειγμα η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\begin{cases}x & \text{αν } x\leq 0\\ \frac{1}{x} & \text{αν } x>0\end{cases}$ είναι 1-1 αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη. Παρατηρείστε ότι η συνάρτηση αυτή δεν είναι συνεχής στο $x_0=0$. Το επόμενο θεώρημα λέει ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι $1-1$ είναι αναγκαστικά είτε γνησίως αύξουσα είτε γνησίως φθίνουσα.

Θεώρημα 3.6.1. *Έστω I διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f:I\to\mathbb{R}$ συνεχής. Αν η f είναι $1-1$ τότε είναι γνησίως μονότονη.*

Απόδειξη. Έστω $a<b$ στο I. Έχουμε $f(a)\neq f(b)$ και άρα είτε $f(a)<f(b)$ είτε $f(a)>f(b)$. Ας υποθέσουμε ότι $f(a)<f(b)$. Θα δείξουμε ότι για κάθε $x<y$ στο I ισχύει ότι $f(x)<f(y)$ δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα. Πράγματι έστω $x<y$ στο I. Ορίζουμε την συνάρτηση $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$g(t)=f(tx+(1-t)a)-f(ty+(1-t)b)$$

για κάθε $t\in[0,1]$. έχουμε ότι η g είναι καλά ορισμένη λόγω του ότι το I είναι διάστημα. Επιπλέον είναι και συνεχής. Επειδή $a<b$ και $x<y$ έχουμε ότι $tx+(1-t)a<ty+(1-t)b$ για κάθε $t\in[0,1]$. Ειδικότερα, $tx+(1-t)a\neq ty+(1-t)b$ για κάθε $t\in[0,1]$ και άρα αφού η f είναι 1-1, $g(t)\neq 0$ για όλα τα $t\in[0,1]$. Όμως η g είναι συνεχής και άρα διατηρεί πρόσημο. Επειδή $g(0)=f(a)-f(b)<0$ έπεται ότι και $g(1)=f(x)-f(y)<0\Leftrightarrow f(x)<f(y)$. □

3.7 Συνέχεια μονότονων συναρτήσεων

Το επόμενο θεώρημα δίνει μια ικανή συνθήκη για την συνέχεια μονότονων συναρτήσεων.

Θεώρημα 3.7.1. *Έστω $\emptyset\neq X\subseteq\mathbb{R}$ και $f:X\to\mathbb{R}$ μονότονη με το σύνολο τιμών $f(X)$ να είναι διάστημα του $\mathbb{R}$. Τότε η f είναι συνεχής συνάρτηση.*

Απόδειξη. Έστω ότι η $f:X\to\mathbb{R}$ είναι αύξουσα συνάρτηση. Έστω $x_0\in X$ και έστω $\varepsilon>0$. Θα βρούμε $\delta>0$ τέτοιο ώστε $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ για κάθε $x\in X$ με $|x-x_0|<\delta$. Θέτουμε $J=f(X)$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για το $f(x_0)$ και το J: Είτε το $f(x_0)$ είναι εσωτερικό σημείο του J είτε είναι άκρο του.

Ας υποθέσουμε ότι είναι εσωτερικό σημείο του J. Τότε υπάρχει $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ τέτοιο ώστε

$$[f(x_0) - \varepsilon', f(x_0) + \varepsilon'] \subseteq J \tag{3.7.1}$$

Επειδή $J = f(X)$ υπάρχουν $x_1, x_2 \in X$ με

$$f(x_1) = f(x_0) - \varepsilon' \quad \text{και} \quad f(x_2) = f(x_0) + \varepsilon' \tag{3.7.2}$$

Αφού $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$ και η f είναι αύξουσα θα πρέπει $x_1 < x_0 < x_2$. Επιλέγουμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq (x_1, x_2) \tag{3.7.3}$$

Τότε για κάθε $x \in X$ με $|x - x_0| < \delta$ έχουμε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) &\overset{(3.7.3)}{\Rightarrow} x_1 < x < x_2 \\ &\Rightarrow f(x_1) \le f(x) \le f(x_2) \\ &\overset{(3.7.2)}{\Rightarrow} f(x_0) - \varepsilon' \le f(x) \le f(x_0) + \varepsilon' \\ &\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \le \varepsilon' < \varepsilon \end{aligned}$$

Αν το $f(x_0)$ είναι άκρο του J η απόδειξη είναι παρόμοια. Π.χ. αν είναι άνω άκρο τότε επιλέγουμε $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ με $[f(x_0) - \varepsilon', f(x_0)] \subseteq J$ και εργαζόμαστε ομοίως. Αντίστοιχα αν το $f(x_0)$ είναι κάτω άκρο του J. □

Παρατήρηση 3.7.2. Το Θεώρημα 3.7.1 δίνει μια ικανή συνθήκη για την συνέχεια μιας μονότονης συνάρτησης. Η συνθήκη αυτή δεν είναι απαραίτητα αναγκαία αν η f δεν ορίζεται σε διάστημα. Για παράδειγμα η συνάρτηση $f : (0,1) \cup (1,2) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \in (0,1) \\ 2 & \text{αν } x \in (1,2) \end{cases}$ είναι αύξουσα και συνεχής αλλά το πεδίο τιμών της είναι το δισύνολο $\{1, 2\}$.

Ως άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 3.7.1 και του Θεωρήματος των Ενδιάμεσων Τιμών έχουμε το επόμενο Κριτήριο Συνέχειας για μονότονες συναρτήσεις που ορίζονται σε διαστήματα του $\mathbb{R}$.

Θεώρημα 3.7.3. *Έστω I διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f : I \to \mathbb{R}$ μονότονη. Τότε η f είναι συνεχής αν και μόνο αν το $f(I)$ είναι διάστημα.*

Απόδειξη. Αν η f είναι συνεχής τότε από το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών η f μεταφέρει διαστήματα σε διαστήματα και άρα το $f(I)$ είναι διάστημα. Αντίστροφα, αν το $f(I)$ είναι διάστημα τότε από το Θεώρημα 3.7.1 έχουμε ότι η f είναι συνεχής. □

Το Θεώρημα 3.7.1 έχει και κάποιες συνέπειες σχετικά με την συνέχεια της αντίστροφης συνάρτησης.

Θεώρημα 3.7.4. *Έστω I διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής και $1\!-\!1$. Τότε η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 3.6.1 η f είναι γνησίως μονότονη. Άρα και η αντίστροφη $f^{-1} : f(I) \to I$ θα είναι γνησίως μονότονη. Επειδή το σύνολο τιμών της αντίστροφης είναι το I που είναι διάστημα του $\mathbb{R}$ από το Θεώρημα 3.7.1 η f^{-1} είναι συνεχής. □

3.8 Ομοιόμορφη συνέχεια

Ο ορισμός της συνέχειας μιας συνάρτησης $f : X \to \mathbb{R}$ σε ένα σημείο $x_0 \in X$ λέει ότι η f είναι συνεχής αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $x \in X$ με $|x - x_0| < \delta$ έχουμε ότι $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Αν η f είναι συνεχής σε διάφορα σημεία $x_0 \in X$ τότε ο θετικός αριθμός δ γενικά θα εξαρτάται μόνο από το ε αλλά και από το σημείο $x_0 \in X$, δηλαδή θα είναι στην ουσία μια συνάρτηση δύο μεταβλητών $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$. Στην περίπτωση όπου η f είναι συνεχής και το δ δεν εξαρτάται από τα σημεία $x_0 \in X$ έχουμε μια ισχυρότερη έννοια που καλείται *ομοιόμορφη συνέχεια*. Ο ακριβής ορισμός είναι ο εξής.

Ορισμός 3.8.1. *Έστω $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}$ και $f : X \to \mathbb{R}$. Η f θα καλείται* ***ομοιόμορφα συνεχής*** *αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο για κάθε $x, y \in X$ με $|x - y| < \delta$ ισχύει ότι $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.*

Παράδειγμα 3.8.2. Η συνάρτηση $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. Πράγματι για κάθε $\varepsilon > 0$ το $\delta = \varepsilon$ ικανοποιεί τον Ορισμό 3.8.1.

Πρόταση 3.8.3. *Έστω $f : X \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής τότε είναι συνεχής.*

Απόδειξη. Έστω $x_0 \in X$ και έστω $\varepsilon > 0$. Από τον Ορισμό 3.8.1 υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $x \in X$ με $|x - x_0| < \delta$ τότε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Άρα η f είναι συνεχής στο x_0. □

Όπως θα δούμε παρακάτω το αντίστροφο της Πρότασης 3.8.3 δεν ισχύει, δηλαδή δεν είναι κάθε συνεχής και ομοιόμορφα συνεχής.

Το επόμενο θεώρημα συνδέει τις ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις με τις ακολουθίες και είναι μια αντίστοιχη Αρχή Μεταφοράς για ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις.

Θεώρημα 3.8.4. *Έστω $f : X \to \mathbb{R}$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα.*

(α) Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(β) Για κάθε ζεύγος (x_n), (y_n) ακολουθιών στο X με $|x_n - y_n| \to 0$ ισχύει ότι $|f(x_n) - f(y_n)| \to 0$.

Απόδειξη. (α) ⇒ (β): Έστω ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής και έστω (x_n), (y_n) ακολουθίες στο X με $|x_n - y_n| \to 0$. Θα δείξουμε ότι $|f(x_n) - f(y_n)| \to 0$. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $x, y \in X$ και $|x - y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Επειδή $|x_n - y_n| \to 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $|x_n - y_n| < \delta$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα για κα'θε $n \geq n_0$ θα έχουμε $|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$. Συνεπώς για κάθε $\varepsilon > 0$ βρήκαμε $n_0 \in \mathbb{N}$ με $|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$. Αυτό σημαίνει ότι $|f(x_n) - f(y_n)| \to 0$.

(β) ⇒ (α): Έστω ότι για κάθε ζεύγος (x_n), (y_n) ακολουθιών στο X με $|x_n - y_n| \to 0$ ισχύει ότι $|f(x_n) - f(y_n)| \to 0$. Έστω ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Συνεπώς υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε για οποιοδήποτε $\delta > 0$ θα μπορούσαμε να βρούμε $x, y \in X$ με $|x - y| < \delta$ αλλά $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$. Άρα για οποιοδήποτε $n \in \mathbb{N}$ και για $\delta = \frac{1}{n}$ θα υπάρχουν $x_n, y_n \in X$ με $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ και $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Αλλά τότε για τις ακολουθίες (x_n) και (y_n) έχουμε $|x_n - y_n| \to 0$ αλλά $|f(x_n) - f(y_n)| \not\to 0$, άτοπο. □

Το Θεώρημα 3.8.4 χρησιμοποιείται πολλές φορές και για να δείξουμε ότι μια συνάρτηση δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Πράγματι από το Θεώρημα 3.8.4 έπεται ότι μια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής αν και μόνο αν υπάρχουν δύο ακολουθίες (x_n) και (y_n) στο X με $|x_n - y_n| \to 0$ αλλά $|f(x_n) - f(y_n)| \not\to 0$.

Παράδειγμα 3.8.5. Η συνάρτηση $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής αλλά δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Πράγματι, έστω

$$x_n = n + \frac{1}{n} \quad \text{και} \quad y_n = n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε $|x_n - y_n| = \dfrac{1}{n} \to 0$ αλλά

$$f(x_n) - f(y_n)| = |\left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - n^2| = 2 + \frac{1}{n^2} \to 2$$

Θεώρημα 3.8.6. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Απόδειξη. Έστω ότι η f δεν ήταν ομοιόμορφα συνεχής. Τότε, όπως είδαμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.8.4, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα $\varepsilon > 0$ και δύο ακολουθίες (x_n), (y_n) στο $[a,b]$ με $|x_n - y_n| \to 0$ αλλά $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Από το Θεώρημα Bolzano–Weirstrass, η (x_n), ως φραγμένη ακολουθία, θα έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία (x_{k_n}) και επειδή $a \leq x_{k_n} \leq b$ θα πρέπει και $a \leq \lim x_{k_n} \leq b$. Άρα το όριο της (x_{k_n}) είναι ένα σημείο $x_0 \in [a,b]$. Επειδή $|x_n - y_n| \to 0$ έπεται ότι $x_{k_n} - y_{k_n} \to 0$ και άρα και η αντίστοιχη υπακολουθία (y_{k_n}) της (y_n) συγκλίνει στο x_0. Άρα οι ακολουθίες (x_{k_n}) και (y_{k_n}) περιέχονται στο $[a,b]$ και συγκλίνουν στο ίδιο όριο $x_0 \in [a,b]$. Η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ και συνεπώς από την Αρχή Μεταφοράς, οι ακολουθίες $(f(x_{k_n})$ και $(f(y_{k_n})$ συγκλίνουν στο $f(x_0)$. Αλλά τότε $f(x_{k_n}) - f(y_{k_n}) \to 0$ το οποίο είναι αδύνατον να συμβαίνει αφού $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. □

Αν $f : X \to \mathbb{R}$ και $\emptyset \neq Y \subseteq X$ η συνάρτηση $g : Y \to \mathbb{R}$ όπου $g(y) = f(y)$ για κάθε $y \in Y$ καλείται *ο περιορισμός της f στο Y* και συμβολίζεται με $f|_Y$. Είναι εύκολο να δούμε ότι αν μια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής ή ομοιόμορφα συνεχής τότε και κάθε περιορισμός της είναι συνεχής ή αντίστοιχα ομοιόμορφα συνεχής. Από το Παράδειγμα 3.8.5 έχουμε ότι η συνεχής συνάρτηση $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Παρόλα αυτά το Θεώρημα 3.8.6 λέει ότι ο περιορισμός της f σε οποιοδήποτε κλειστό και φραγμένο διάστημα είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Γενικά έχουμε το παρακάτω πόρισμα του Θεωρήματος 3.8.6.

Πόρισμα 3.8.7. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και έστω $X \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και φραγμένο. Τότε η $f|_X$ είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση.*

Απόδειξη. Έστω $a \leq x \leq b$ για κάθε $x \in X$. Από το Θεώρημα 3.8.6 ο περιορισμός της f στο $[a,b]$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. Περιορίζοντας ακόμη μια φορά στο $X \subseteq [a,b]$ παίρνουμε ότι η $f|X$ ως περιορισμός ομοιόμορφα συνεχούς είναι ομοιόμορφα συνεχής. □

Παρατήρηση 3.8.8. Γενικά δεν ισχύει ότι κάθε συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε ένα φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι και ομοιόμορφα συνεχής. Για παράδειγμα η συνάρτηση $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \dfrac{1}{x}$ για κάθε $x \in (0,1)$ είναι συνεχής αλλά δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Πράγματι, αν $x_n = \dfrac{1}{n}$ και $y_n = \dfrac{2}{n}$ τότε $|x_n - y_n| = \dfrac{1}{n} \to 0$ αλλά $|f(x_n) - f(y_n)| = \dfrac{n}{2} \to +\infty$.