Μαθηματική Ανάλυση Ι

Σημειώσεις από τις παραδόσεις

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
και Φυσικών Επιστημών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Αθήνα – 2025

Περιεχόμενα

1 Οι Πραγματικοί αριθμοί **1**

1.1 Ιδιότητες των Πράξεων των πραγματικών αριθμών . . . 1

1.2 Ιδιότητες της διάταξης των πραγματικών αριθμών . . . 3

1.3 Οι Φυσικοί αριθμοί . . . 5

1.3.1 Επαγωγικά σύνολα και η Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής . . . 5

1.3.2 Πράξεις και διάταξη στους φυσικούς αριθμούς . . . 6

1.3.3 Η ταυτότητα της Ευλείδιας Διαίρεσης στους φυσικούς αριθμούς . . . 8

1.4 Οι Ακέραιοι αριθμοι . . . 9

1.5 Οι Ρητοί αριθμοί . . . 10

1.6 Η ιδιότητα της Πληρότητας των πραγματικών αριθμών . . . 11

1.7 Συνέπειες της Πληρότητας των πραγματικών αριθμών . . . 12

1.7.1 Ύπαρξη του infimum για κάτω φραγμένα υποσύνολα των πραγματικών αριθμών . 12

1.7.2 Ιδιότητες Αρχιμήδους και Ευδόξου . . . 12

1.7.3 Ακέραιο μέρος ενός πραγματικού αριθμού . . . 13

1.7.4 Πυκνότητα ρητών και αρρήτων . . . 14

2 Ακολουθίες Πραγματικών Αριθμών **19**

2.1 Βασικοί ορισμοί . . . 19

2.2 Συγκλίνουσες ακολουθίες . . . 19

2.3 Αποκλίνουσες στο άπειρο ακολουθίες . . . 21

2.4 Φραγμένες ακολουθίες . . . 21

2.5 Το Κριτήριο των Ισοσυγκλινουσών ακολουθιών . . . 23

2.6 Όρια και αλγεβρικές πράξεις . . . 24

2.6.1 Όριο αθροίσματος ακολουθιών . . . 24

2.6.2 Όριο γινομένου ακολουθιών . . . 25

2.6.3 Όριο Πηλίκου ακολουθιών . . . 25

2.6.4 Όριο ρίζας ακολουθίας . . . 26

2.7 Δύο χρήσιμες ανισότητες . . . 27

2.8 Κάποια χρήσιμα όρια . . . 29

2.9 Μονότονες ακολουθίες . . . 30

2.9.1 Βασικοί ορισμοί . . . 30

2.9.2 Μονότονες και φραγμένες ακολουθίες . . . 30

2.9.3 Αρχή Κιβωτισμού . . . 31

2.9.4 Μονότονες και μη φραγμένες ακολουθίες . . . 32

2.10 Ο αριθμός Euler . . . 33
2.11 Το Θεώρημα Bolzano–Weierstrass . . . 34
2.12 Βασικές Ακολουθίες . . . 35
2.13 Αριθμήσιμα και Υπεραριθμήσιμα σύνολα . . . 36

3 Συνέχεια και Όρια Συναρτήσεων **39**
3.1 Ορισμός της συνέχειας . . . 39
3.2 Τοπικές ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων . . . 40
3.3 Συνέχεια και ακολουθίες - Αρχή Μεταφοράς . . . 40
3.4 Πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων . . . 42
3.5 Συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες σε διαστήματα των πραγματικών αριθμών . . . 42
3.5.1 Το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών . . . 42
3.5.2 Το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής . . . 44
3.6 Συνεχείς και 1-1 συναρτήσεις . . . 45
3.7 Συνέχεια μονότονων συναρτήσεων . . . 45
3.8 Ομοιόμορφη συνέχεια . . . 47
3.9 Σημεία Συσσώρευσης και Όρια συναρτήσεων . . . 48
3.9.1 Όριο συνάρτησης σε πραγματικό αριθμό . . . 49
3.9.2 Όριο συνάρτησης στο άπειρο . . . 50
3.10 Συνέχεια και Όρια . . . 51
3.11 Πλευρικά όρια . . . 51

4 Παράγωγος **55**
4.1 Ορισμός και βασικές ιδιότητες . . . 55
4.2 Κανόνας Αλυσίδας . . . 56
4.3 Το Θεώρημα των Ενδιαμέσων Τιμών για παραγώγους . . . 57
4.4 Παράγωγος Αντίστροφης Συνάρτησης . . . 58
4.5 Το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού . . . 58
4.6 Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy . . . 60
4.7 Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις . . . 60
4.7.1 Η συνάρτηση τόξο εφαπτομένης . . . 60
4.7.2 Η συνάρτηση τόξο συνημιτόνου. . . . 61
4.7.3 Η συνάρτηση τόξο ημιτόνου. . . . 61
4.8 Οι υπερβολικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις . . . 62
4.8.1 Η συνάρτηση υπερβολικό συνημίτονο. . . . 62
4.8.2 Η συνάρτηση υπερβολικό ημίτονο. . . . 63
4.8.3 Η συνάρτηση υπερβολική εφαπτομένη. . . . 64
4.8.4 Αντίστροφες Υπερβολικές Συναρτήσεις . . . 65
4.9 Απροσδιόριστες μορφές - Κανόνες de l' Hospital . . . 67
4.10 Πολυώνυμα Taylor . . . 68

5 Το ολοκλήρωμα Riemann **73**
5.1 Ορισμός του Ολοκληρώματος . . . 73
5.1.1 Διαμερίσεις . . . 73
5.1.2 Κάτω και άνω αθροίσματα . . . 73

5.1.3 Κάτω και άνω ολοκλήρωμα . . . 75
5.1.4 Ολοκληρώσιμες συναρτήσεις . . . 76
5.2 Ακολουθίες διαμερίσεων με λεπτότητα που τείνει στο μηδέν . . . 79
5.3 Αθροίσματα Riemann . . . 80
5.4 Βασικές Ιδιότητες του Ολοκληρώματος . . . 83
5.5 Το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού . . . 84
5.6 Μέθοδοι Ολοκλήρωσης . . . 88
5.7 Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων . . . 91
5.8 Μερικές γεωμετρικές εφαρμογές του ολοκληρώματος . . . 94
5.8.1 Εμβαδά επίπεδων χωρίων . . . 94
5.8.2 Μήκος επίπεδης καμπύλης . . . 95

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Οι Πραγματικοί Αριθμοί

1.1 Ιδιότητες των Πράξεων των πραγματικών αριθμών

Στο $\mathbb{R}$ ορίζονται δύο πράξεις, η πρόσθεση (συμβολίζεται με $+$) και ο πολλαπλασιασμός (συμβολίζεται με $\cdot$).

Ιδιότητες της πρόσθεσης

(I1) (*Αντιμεταθετική ιδιότητα*) Για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$, $a + b = b + a$.

(I2) (*Προσεταιριστική ιδιότητα*) Για κάθε $a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a + b) + c = a + (b + c)$.

(I3) (*Ύπαρξη ουδετέρου στοιχείου*) Υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός που τον συμβολίζουμε με 0 τέτοιος ώστε $a + 0 = a$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

(I4) (*Ύπαρξη αντιθέτου*) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$, υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός που τον συμβολίζουμε με $-a$ (καλείται *αντίθετος του* a) τέτοιος ώστε $a + (-a) = 0$.

Μπορεί να δειχθεί εύκολα ότι το ουδέτερο στοιχείο είναι μοναδικό. Πράγματι αν υπήρχαν δύο ουδέτερα στοιχεία 0_1 και 0_2 τότε

$$0_1 + 0_2 = 0_2$$

λόγω του ότι το $)_1$ είναι ουδέτερο και ομοίως

$$0_1 + 0_2 = 0_1$$

λόγω του ότι το 0_2 είναι ουδέτερο. Άρα $0_1 = 0_2$.

Με παρόμοιο τρόπο μπορεί να δειχθεί ότι ο αντίθετος ενός πραγματικού αριθμού είναι μοναδικός (αφήνεται ως άσκηση). Παρατηρείστε επίσης ότι

$$-(-a) = a$$

για κάθε $a \in \mathbb{R}$. Πράγματι

$$(-a) + a = 0$$

και άρα λόγω μοναδικότητας, ο αντίθετος του $-a$ (δηλαδή ο $-(-a)$) είναι ο a.

Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού

(I5) (*Αντιμεταθετική ιδιότητα*) Για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$, $a \cdot b = b \cdot a$.

(I6) (*Προσεταιριστική ιδιότητα*) Για κάθε $a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

(I7) (*Ύπαρξη ουδετέρου στοιχείου*) Υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός που τον συμβολίζουμε με 1 τέτοιος ώστε $1 \neq 0$ και $a \cdot 1 = a$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

(I8) (*Ύπαρξη αντιστρόφου*) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ με $a \neq 0$ υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός που τον συμβολίζουμε με a^{-1} (καλείται *αντίστροφος του* a) τέτοιος ώστε $a \cdot a^{-1} = 1$.

Όπως και στην πρόσθεση με ανάλογο τρόπο μπορεί να δειχθεί ότι το ουδέτερο στοιχείο 1 είναι μοναδικό και ότι υπάρχει μοναδικός αντίστροφος για κάθε μη μηδενικό αριθμό (αφήνεται ως άσκηση). Επίσης

$$(a^{-1})^{-1} = a$$

για κάθε $a \neq 0$.

Μια επιπλέον ιδιότητα που εμπλέκει και τις δύο πράξεις είναι η επόμενη

(I9) (*Επιμεριστική ιδιότητα*) Για κάθε $a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Πρόταση 1.1.1. *Για κάθε* $a \in \mathbb{R}$, $0 \cdot a = 0$.

Απόδειξη. Έστω $a \in \mathbb{R}$. Έχουμε

$$0 \cdot a = (0 + 0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a$$

Θέτοντας τώρα $x = 0 \cdot a$ η παραπάνω σχέση γράφεται

$$x + x = x$$

Προσθέτοντας εκατέρωθεν το $-x$ και εφαρμόζωντας την προσεταιριστική ιδιότητα παίρνουμε

$$(x + x) + (-x) = x + (-x) \Rightarrow x + (x + (-x)) = 0 \Rightarrow x + 0 = 0 \Rightarrow x = 0$$

Άρα $0 \cdot a = 0$. □

Η Πρόταση 1.1.1 έχι πολλά πορίσματα. Καταρχάς δικαιολογεί την απαίτηση $a \neq 0$ στην ιδιότητα (I8).

Πόρισμα 1.1.2. *Το* 0 *δεν έχει αντίστροφο.*

Απόδειξη. Αν υπήρχε ο αντίστροφος του 0 τότε θα έπρεπε $0 \cdot 0^{-1} = 1$. Άτοπο, από την Πρόταση 1.1.1 και την υπόθεση ότι $1 \neq 0$. □

Πόρισμα 1.1.3. $a \cdot b = 0$ *αν και μόνο αν* $a = 0$ *ή* $b = 0$.

Απόδειξη. Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με

$$a \cdot b = 0$$

Έστω $a \neq 0$. Τότε υπάρχει ο a^{-1}. Πολλαπλασιάζοντας με a^{-1} παίρνουμε

$$a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot 0 \Rightarrow (a^{-1} \cdot a) \cdot b = 0 \Rightarrow 1 \cdot b = 0 \Rightarrow b = 0$$

Άρα αν $a \cdot b = 0$ τότε είτε $a = 0$ είτε $b = 0$.

Αντιστρόφως αν $a = 0$ ή $b = 0$ τότε από Πρόταση 1.1.1 έχουμε ότι $a \cdot b = 0$. □

Πόρισμα 1.1.4. $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$.

Απόδειξη. Έχουμε

$$a \cdot b + (-a) \cdot b = (a + (-a)) \cdot b = 0 \cdot b = 0$$

και άρα από την μοναδικότητα του αντιθέτου θα πρέπει

$$(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$$

Ομοίως δείχνουμε ότι $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$. □

Θέτοντας $a = 1$ στο παραπάνω πόρισμα παίρνουμε και το εξής.

Πόρισμα 1.1.5. $(-1)b = -b$ *για κάθε* $b \in \mathbb{R}$.

Στο $\mathbb{R}$ ορίζονται δύο επιπλέον πράξεις η *αφαίρεση* και η *διαίρεση*:

Ορισμός 1.1.6. *(α) (Ορισμός της αφαίρεσης) Για κάθε* $a, b \in \mathbb{R}$ *ορίζουμε*

$$a - b = a + (-b)$$

δηλαδή η αφαίρεση του b *από τον* a *είναι η πρόσθεση στο* a *του αντιθέτου του* b. *Το* $a - b$ *καλείται διαφορά του* b *από τον* a.

(β) (Ορισμός της διαίρεσης) Για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ *με* $b \neq 0$ *ορίζουμε*

$$\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$$

δηλαδή η διαίρεση του a *με τον* b *είναι ο πολλαπλασιασμός του* a *με τον αντίστροφο του* b. *Το* $\frac{a}{b}$ *καλείται πηλίκο του* a *προς το* b.

1.2 Ιδιότητες της διάταξης των πραγματικών αριθμών

Στο $\mathbb{R}$ ορίζεται η σχέση της διάταξης που συμβολίζεται με $<$ και έχει τις παρακάτω ιδιότητες.

(Ι10) (α) (*Ιδιότητα της μεταβατικότητας*) Για κάθε $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$\text{αν } a < b \text{ και } b < c \text{ τότε } a < c$$

(β) (*Ιδιότητα Τριχοτομίας*) Για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ ακριβώς ένα από τα επόμενα ισχύει:

$$\text{είτε } a = b \quad \text{είτε } a < b \text{ είτε } b < a$$

(I11) Για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ αν $a < b$ τότε $a + c < b + c$ για κάθε $c \in \mathbb{R}$.

(I12) Για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ αν $a < b$ τότε $a \cdot c < b \cdot c$ για κάθε $c > 0$.

Σημείωση : Όταν γράφουμε $a > b$ εννοούμε ότι $b < a$. Επίσης όταν γράφουμε $a \leqslant b$ εννοούμε ότι είτε $a < b$ είτε $a = b$. Π.χ. $1 \leqslant 1$, $2 \leqslant 5$.

Ορισμός 1.2.1. *Ένας αριθμός $a \in \mathbb{R}$ καλείται θετικός αν $a > 0$ και αρνητικός αν $a < 0$.*

Από την ιδιότητα (I10) (β) έχουμε ότι για καθε αριθμό a μια ακριβώς από τις επόμενες τρείς περιπτώσεις ισχύει: είτε $a = 0$ είτε a θετικός είτε a αρνητικός.

Πρόταση 1.2.2. *(Γινόμενο θετικών είναι θετικός) Αν $a > 0$ και $b > 0$ τότε $a \cdot b > 0$.*

Απόδειξη. Από την (I12) και Πρόταση 1.1.1 έχουμε

$$a > 0,\ b > 0 \Rightarrow a \cdot b > 0 \cdot b \Rightarrow a \cdot b > 0$$

□

Πρόταση 1.2.3. *(Άθροισμα θετικών είναι θετικός) Αν $a > 0$ και $b > 0$ τότε $a + b > 0$.*

Απόδειξη. Από την (I11) έχουμε

$$a > 0 \Rightarrow a + b > 0 + b \Rightarrow a + b > b$$

Επειδή $b > 0$ από την μεταβατικότητα της διάταξης έπεται ότι $a + b > 0$. □

Πόρισμα 1.2.4. *(α) Αν $a > 0$ τότε $-a < 0$.*
(β) Ομοίως αν $a < 0$ τότε $-a > 0$.

Απόδειξη. (α) Έστω $a > 0$. Από την ιδιότητα της Τριχοτομίας θα έχουμε ότι είτε $-a = 0$ είτε $-a > 0$ είτε $-a < 0$. Αν $-a = 0$ τότε $0 = a + (-a) = a + 0 = a$ άτοπο αφού $a > 0$. Αν $-a > 0$ τότε από την Πρόταση 1.2.3 $0 = a + (-a) > 0$ πάλι άτοπο. Άρα το μόνο που μένει να ισχύει είναι ότι $-a < 0$.
(β) Ομοίως με το (α). □

Πρόταση 1.2.5. *(Γινόμενο αρνητικών είναι θετικός) Αν $a < 0$ και $b < 0$ τότε $a \cdot b > 0$.*

Απόδειξη. Αφού $b < 0$ από το Πόρισμα 1.2.4 έχουμε ότι $-b > 0$. Άρα από την (I12), $a \cdot (-b) < 0 \cdot (-b) = 0$. Από το Πόρισμα 1.1.4 έχουμε ότι $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$. Άρα $-(a \cdot b) < 0$ οπότε από το Πόρισμα 1.2.4 $a \cdot b > 0$. □

Πόρισμα 1.2.6. *(Τα τετράγωνα αριθμών είναι μη αρνητικά) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$, $a^2 \geqslant 0$. Ειδικότερα, αν $a \neq 0$ τότε $a^2 > 0$.*

Απόδειξη. Αν $a = 0$ τότε $a^2 = 0 \cdot 0 = 0$ από Πρόταση 1.1.1. Αν $a > 0$ τότε $a^2 = a \cdot a > 0$ από την Πρόταση 1.2.3. Τέλος αν $a < 0$ τότε $a^2 = a \cdot a > 0$ από την Πρόταση 1.2.5. □

Πόρισμα 1.2.7. $1 > 0$.

Απόδειξη. Είναι $1 \neq 0$ και $1 = 1^2$. □

Το επόμενο Πόρισμα λέει ότι αν πολλαπλασιάσουμε τα μέλη μιας ανισότητας με αρνητικό αριθμό τότε αλλάζει η φορά της ανισότητας.

Πόρισμα 1.2.8. *Αν $a < b$ και $c < 0$ τότε $a \cdot c > b \cdot c$.*

Απόδειξη. Έχουμε $a < b \Rightarrow a + (-b) < b + (-b) \Rightarrow a - b < 0$. Από το Πόρισμα 1.2.5 έπεται ότι $(a - b) \cdot c > 0 \Rightarrow a \cdot c - b \cdot c > 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$. □

1.3 Οι Φυσικοί αριθμοί

1.3.1 Επαγωγικά σύνολα και η Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής

Το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι το σύνολο

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

όπου το 1 είναι το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού στο $\mathbb{R}$ και

$$2 = 1 + 1, \ 3 = 2 + 1, \dots$$

Γενικά

Θα μπορούσαμε να ορίσουμε το $\mathbb{N}$ χρησιμοποιώντας λίγη Θεωρία Συνόλων ως εξής. Εισάγουμε πρώτα την έννοια του *επαγωγικού υποσυνόλου* του $\mathbb{R}$.

Ορισμός 1.3.1. *Ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ θα καλείται* ***επαγωγικό*** *αν (α) $1 \in A$ και (β) για κάθε $x \in A$ ισχύει ότι $x + 1 \in A$.*

Παραδείγματα επαγωγικών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ είναι το ίδιο το $\mathbb{R}$, το σύνολο $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ όλων των θετικών πραγματικών αριθμών κ.α.

Πρόταση 1.3.2. *Υπάρχει το μικρότερο επαγωγικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, δηλαδή υπάρχει ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$ το οποίο (α) είναι επαγωγικό και (β) περιέχεται σε κάθε επαγωγικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.*

Απόδειξη. Έστω E_0 η τομή όλων των επαγωγικών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$, δηλαδή το E_0 αποτελείται από όλα τα $x \in \mathbb{R}$ που ανήκουν σε όλα τα επαγωγικά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Παρατηρούμε τα εξής.

(α) Το E_0 είναι επαγωγικό: Πράγματι $1 \in E_0$ αφού το 1 ανήκει σε όλα τα επαγωγικά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Επίσης, έστω $x \in E_0$. Τότε το x ανήκει σε κάθε επαγωγικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και άρα το $x + 1$ ανήκει και αυτό σε κάθε επαγωγικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και συνεπώς $x + 1 \in E_0$.

(β) Το E_0 περιέχεται σε κάθε επαγωγικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$: Πράγματι έστω E ένα οποιοδήποτε επαγωγικό υποσύνοπλο του $\mathbb{R}$ και έστω $x \in E_0$. Το ότι $x \in E_0$ σημαίνει ότι το x ανήκει σε όλα τα επαγωγικά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και άρα $x \in E$. Συνεπώς κα΄θε στοιχείο του E_0 είναι και στοιχείο του E και άρα $E_0 \subseteq E$. □

Παρατηρείστε επίσης ότι το μικρότερο επαγωγικό υποσύνολο είναι και μοναδικό. Πράγματι, αν υπήρχαν δύο μικρότερα επαγωγικά υποσύνολα έστω A_0, A_0' τότε θα είχαμε

$$A_0 \subseteq A_0' \text{ και } A_0' \subseteq A_0$$

και άρα $A_0 = A_0'$.

Ορισμός 1.3.3. *Το μικρότερο επαγωγικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ το συμβολίζουμε με $\mathbb{N}$ και το καλούμε σύνολο των φυσικών αριθμών.*

Η επόμενη πρόταση είναι άμεση από τον ορισμό του $\mathbb{N}$.

Πρόταση 1.3.4. *Έστω $A \subseteq \mathbb{N}$. Αν (α) $1 \in A$ και (β) για κάθε $n \in A$ ισχύει ότι $n+1 \in A$, τότε $A = \mathbb{N}$.*

Απόδειξη. Από τις υποθέσεις (α) και (β) για το A έχουμε ότι το A είναι επαγωγικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Άρα $\mathbb{N} \subseteq A$. Από την άλλη μεριά έχουμε υποθέσει ότι $A \subseteq \mathbb{N}$. Άρα $A = \mathbb{N}$. □

Η παραπάνω πρόταση δίνει και μια μέθοδο απόδειξης για προτάσεις που αφορούν φυσικούς αριθμούς.

Πρόταση 1.3.5. *(**Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής**) Έστω $p(n)$ ένας ισχυρισμός για τον φυσικό αριθμό n. Έστω (α) η $p(1)$ ισχύει και (β) Αν ο $p(n)$ ισχύει για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ τότε ο $p(n+1)$ ισχύει. Τότε ο ισχυρισμός $p(n)$ ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

Απόδειξη. Έστω $A = \{n \in \mathbb{N} :$ ο ισχυρισμός $p(n)$ ισχύει$\}$. Από τις υποθέσεις μας το A είναι επαγωγικό υποσύνολο του $\mathbb{N}$ και άρα από την Πρόταση 1.3.4 ταυτίζεται με το $\mathbb{N}$. □

Παράδειγμα 1.3.6. Αποδείξτε ότι

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Λύση. Για $n = 1$ έχουμε $1 = 1^2$ και άρα ο ισχυρισμός ισχύει για $n = 1$. Υποθέτουμε τώρα ότι ισχύει για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή ότι ισχύει

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2$$

Θα δείξουμε ότι αυτο συνεπάγεται ότι ιχύει και για τον $n+1$, δηλαδή ότι

$$1 + \cdots + (2(n+1)-1) = (n+1)^2$$

Πράγματι,

$$1 + \cdots + (2n-1) + (2(n+1)-1) = (1 + \cdots + (2n-1)) + (2(n+1)-1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

Από την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής ο ισχυρισμός ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

1.3.2 Πράξεις και διάταξη στους φυσικούς αριθμούς

Πρόταση 1.3.7. *Το $\mathbb{N}$ είναι κλειστό στην πράξη της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, δηλαδή για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ $m + n \in \mathbb{N}$ και $m \cdot n \in \mathbb{N}$.*

Απόδειξη. Έστω m ένας οποισδήποτε φυσικός αριθμός. Θεωρούμε την πρόταση $p(n) : m + n \in \mathbb{N}$. Θα δείξουμε με Επαγωγή ότι η $p(n)$ ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Πράγματι για $n = 1$ έχουμε ότι $m + 1 \in \mathbb{N}$ αφού το $\mathbb{N}$ είναι επαγωγικό και άρα η $p(1)$ ισχύει. Έστω ότι η $p(n)$ ισχύει δηλαδή $m + n \in \mathbb{N}$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Τότε, από Προσεταιριστική ιδιότητα,

$$m + (n+1) = (m+n) + 1 \in \mathbb{N}$$

αφού $m+n \in \mathbb{N}$ και $\mathbb{N}$ επαγωγικό. Άρα $m+n \in \mathbb{N}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ομοίως αποδεικνύεται ότι $m \cdot n \in \mathbb{N}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (αφήνεται ως άσκηση). □

Πρόταση 1.3.8. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$.*

Απόδειξη. Η πρόταση ισχύει τετριμμένα για $n = 1$. Έστω ότι ισχύει για κάποιο $n \geqslant 1$ δηλαδή $n \geqslant 1$. Συνεπώς

$$n+1 \geqslant 1+1 = 2$$

Όπως γνωρίζουμε $1 > 0$ (Πόρισμα 1.2.7) και άρα

$$2 = 1+1 > 1+0 = 1$$

Από την μεταβατικότητα της διάταξης $n+1 > 1$ οπότε και $n+1 \geqslant 1$. □

Ορισμός 1.3.9. *Ορίζουμε $N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$.*

Πρόταση 1.3.10. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $k \in \mathbb{N}_0$ τέτοιος ώστε $n = 1+k$.*

Απόδειξη. Για $n = 1$, $1 = 1+0$ και η πρόταση ισχύει για $k = 0$. Έστω ότι η πρόταση ισχύει για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή έστω ότι υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ με $n = 1+k$. Τότε

$$n+1 = (1+k)+1 = 1+(k+1)$$

και άρα η πρόταση ισχύει και για το $n+1$ αφού ο $k+1 \in \mathbb{N}$. Από την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής έχουμε ότι η πρόταση ισχύει για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. □

Πρόταση 1.3.11. *Έστω $n \in \mathbb{N}$. Τότε για κάθε $m \in \mathbb{N}$ με $m > n$ υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $m = n+k$.*

Απόδειξη. Για $n = 1$ η πρόταση ισχύει από την Πρόταση 1.3.10. Έστω ότι η πρόταση ισχύει για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Έστω $m > n+1$. Τότε $m > n+1 > n \Rightarrow m > n$ και άρα $m = n+k'$ για κάποιο $k' \in \mathbb{N}$. Από την Πρόταση 1.3.10 έπεται ότι $k' = 1+k$ με $k \in \mathbb{N}_0$. Αν $k = 0$ τότε $k' = 1$ και $m = n+k' = n+1$ άτοπο. Άρα $k \in \mathbb{N}$ και $m = n+(1+k) = (n+1)+k$. Συνεπώς η $p(n+1)$ ισχύει. □

Πόρισμα 1.3.12. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ δεν υπάρχει φυσικός m τέτοιος ώστε*

$$n < m < n+1$$

Απόδειξη. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και έστω ότι υπήρχε $m \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$n < m < n+1$$

Άρα $m > n$ οπότε από την Πρόταση 1.3.11 ο m γράφεται $m = n+k$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$. Άρα

$$m = n+k < n+1 \Rightarrow k < 1$$

άτοπο (Πρόταση 1.3.8. □

Πόρισμα 1.3.13. *Αν $m, n \in \mathbb{N}$ τότε*

$$m > n \Rightarrow m \geqslant n+1$$

Ορισμός 1.3.14. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό. Ένα στοιχείο $x_0 \in A$ καλείται* ***ελάχιστο*** *στοιχείο του A αν $x_0 \leq x$ για όλα τα $x \in A$.*

Το ελάχιστο στοιχείο ενός υποσυνόλου A του $\mathbb{R}$ συμβολίζεται με $\min A$. Γενικά ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$ δεν έχει πάντα ελάχιστο στοιχείο. Π.χ. το $A = (0,1)$ δεν έχει ελάχιστο στοιχείο (γιατί;). Μια σημαντική ιδιότητα της διάταξης στο $\mathbb{N}$ είναι ότι δεν υπάρχει μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}$ χωρίς ελάχιστο στοιχείο.

Πρόταση 1.3.15. *Κάθε μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}$ έχει ελάχιστο στοιχείο.*

Απόδειξη. Έστω $A \subseteq \mathbb{N}$ μη κενό και έστω προς απαγωγή σε άτοπο ότι το A δεν έχει ελάχιστο στοιχείο. Έστω $p(n)$ ο εξής ισχυρισμός :

$$\text{Για κάθε } k \in \mathbb{N} \text{ με } k \leqslant n \text{ ισχύει ότι } k \notin A$$

Η $p(1)$ ισχύει. Πράγματι, $1 \notin A$ διότι διαφορετικά το $1 = \min A$ αφού $n \geqslant 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (Πρόταση 1.3.8). Έστω ότι η $p(n)$ ισχύει για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ με $k \leqslant n$, $k \notin A$. Άρα από την Τριχοτομία της Διάταξης, για κάθε $m \in A$, $m > n$. Από το Πόρισμα 1.3.13 έπεται ότι $m \geqslant n+1$ για κάθε $m \in A$. Άρα αν $n+1 \in A$ τότε θα είχαμε ότι $n+1 = \min A$, άτοπο αφού έχουμε υποθέσει ότι το A δεν έχει ελάχιστο. Άρα $n+1 \notin A$. Επειδή επιπλέον έχουμε υποθέσει ότι ισχύει η $p(n)$, έχουμε ότι $k \notin A$ για όλα τα $k \leqslant n+1$ οπότε η $p(n+1)$ ισχύει.

Από την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής, η $p(n)$ ισχύει για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Επειδή η $p(n)$ ειδικότερα συνεπάγεται ότι $n \notin A$ έχουμε ότι $n \notin A$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα το σύνολο A είναι το κενό σύνολο, άτοπο. □

1.3.3 Η ταυτότητα της Ευλείδιας Διαίρεσης στους φυσικούς αριθμούς

Ορισμός 1.3.16. *Έστω $m, n \in \mathbb{N}$. Θα θα λέμε ότι ο m* ***διαιρεί*** *τον n (συμβολίζουμε $m|n$) αν υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $n = m \cdot k$. Όταν ο m διαιρεί τον n τότε θα λέμε ότι ο n είναι ένα* ***πολλαπλάσιο*** *του n.*

Ο 1 διαιρεί κάθε φυσικό αριθμό αφού $n = 1 \cdot n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Πρόταση 1.3.17. *(Ταυτότητα της Ευκλείδιας διαίρεσης) Για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ υπάρχουν μοναδικοί $k, r \in \mathbb{N}_0$ τέτοιοι ώστε*

$$n = mk + r \text{ και } 0 \leqslant r < m$$

Ο αριθμός k καλείται ***πηλίκο*** *και ο r θα καλείται* ***υπόλοιπο*** *της διαίρεσης του n με τον m.*

Απόδειξη. Η πρόταση ισχύει τετριμμένα $m = 1$ (αρκεί να θέσουμε $k = n$ και $r = 0$). Σταθεροποιούμε για την συνέχεια ένα $m \in \mathbb{N}$ με $m \geqslant 2$. Θα δείξουμε πρώτα την ύπαρξη των k, r. Θα χρησιμοποιήσουμε Μαθηματική Επαγωγή. Έστω $p(n)$ η πρόταση:

$$\text{για τον φυσικό αριθμό } n \text{ υπάρχουν } k, r \in \mathbb{N}_0 \text{ τέτοιοι ώστε } n = mk + r \text{ και } 0 \leqslant r < m$$

Η $p(1)$ ισχύει για $k = 0$ και $r = 1$ (θυμηθείτε ότι έχουμε υποθέσει $m \geq 2$). Έστω ότι για κάποιον $n \in \mathbb{N}$ η $p(n)$ ισχύει δηλαδή ο n γράφεται στην μορφή $n = mk + r$ όπου $k, r \in \mathbb{N}_0$ και $0 \leqslant r < m$. Τότε

$$n + 1 = mk + r + 1$$

Διακρίνουμε εδώ δύο δυνατές περιπτώσεις :

Περίπτωση 1: $r+1=m$. Τότε $n+1=mk+m=m(k+1)$. Θέτοντας $k'=k+1$ και $r'=0$ βλέπουμε ότι $n+1=mk'+r'$.

Περίπτωση 2 : $r+1<m$. Τότε $n+1=mk+r'$ και άρα θέτοντας $r'=r+1$ έχουμε $n+1=mk+r'$.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι αν η $p(n)$ ισχύει τότε και η $p(n+1)$ ισχύει. Αφού όπως είδαμε η $p(1)$ ισχύει, από Μαθ. Επαγωγή η $p(n)$ ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Αποδεικνύουμε τώρα και την μοναδικότητα. Έστω $n=mk_1+r_1=mk_2+r_2$. Έστω $k_1 \neq k_2$ και έστω $k_1>k_2$ (η απόδειξη είναι όμοια αν $k_1<k_2$). Θέτουμε $k=k_2-k_1$ και έχουμε

$$mk_1+r_1=mk_2+r_2 \Leftrightarrow m(k_1-k_2)=r_2-r_1 \Rightarrow r_2-r_1=mk \geqslant m \Rightarrow r_2 \geqslant m+r_1 \Rightarrow m \geqslant m$$

άτοπο. Άρα $k_1=k_2$ οπότε και $r_1=r_2$. □

Πόρισμα 1.3.18. *Για κάθε φυσικό αριθμό n υπάρχει μοναδικός $k \in \mathbb{N}_0$ τέτοιος ώστε ακριβώς ένα από τα παρακάτω ισχύει : Είτε $n=2k$ είτε $n=2k+1$. Αν $n=2k$ ο n καλείται **άρτιος** ενώ αν $n=2k+1$ ο n καλείται **περιττός**.*

1.4 Οι Ακέραιοι αριθμοι

Το σύνολο των ακεραίων αριθμών είναι το σύνολο

$$\mathbb{Z}=\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$$

που αποτελείται από όλους τους φυσικούς αριθμούς, το μηδέν και όλους τους αντίθετούς τους.

Πρόταση 1.4.1. *Το σύνολο $\mathbb{Z}$ είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό.*

Απόδειξη. Έστω $m,\lambda \in \mathbb{Z}$. Θα δείξουμε ότι $m+\lambda \in \mathbb{Z}$. Αν $m=0$ τότε $m+\lambda=\lambda \in \mathbb{Z}$. Ομοίως αν $\lambda=0$. Υποθέτουμε για την συνέχεια ότι $m,n \neq 0$. Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις.

(1) $m,\lambda \in \mathbb{N}$. Τότε $m+\lambda \in \mathbb{N}$ (Πρόταση 1.3.7) και άρα $m+\lambda \in \mathbb{Z}$.

(2) $m \in \mathbb{N}$ και $\lambda=-n$ για κάποιον $n \in \mathbb{N}$. Τότε $m+\lambda=m-n$. Διακρίνουμε τις εξής υποπεριπτώσεις :

(α) $m>n$. Τότε $m=n+k$ (Πρόταση 1.3.7) και άρα $m+\lambda=m-n=(n+k)-n=k \in \mathbb{N}$.

(β) $m=n$. Τότε $m+\lambda=m-m=0$.

(γ) $m<n$. Τότε $n=m+k$ για κάποιον $k \in \mathbb{N}$ και $m+\lambda=m-n=-(n-m)=-k \in \mathbb{Z}$

(3) $m=-n$ για κάποιον $n \in \mathbb{N}$ και $\lambda \in \mathbb{N}$. Τότε από την προηγούμενη περίπτωση $m+\lambda \in \mathbb{Z}$.

Από τα παραπάνω έχουμε ότι για κάθε $m,\lambda \in \mathbb{Z}$ έπεται ότι $m+\lambda \in \mathbb{Z}$. Με αναάλογο τρόπο δείχνουμε ότι $m \cdot \lambda \in \mathbb{Z}$. □

Παρατηρείστε επίσης ότι το σύνολο $\mathbb{Z}$ είναι το μικρότερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ που περιέχει το $\mathbb{N}$ και ικανοποιεί τις ιδιότητες (I1)-(I7) και (I9) των πράξεων της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού.

1.5 Οι Ρητοί αριθμοί

Το σύνολο των ρητών αριθμών είναι το σύνολο

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z} \text{ και } b \neq 0 \right\}$$

Θυμίζουμε ότι έχουμε ορίσει

$$\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$$

Πρόταση 1.5.1.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow b \cdot c = b \cdot c$$

Απόδειξη. Πράγματι,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot b^{-1} = c \cdot d^{-1} \Leftrightarrow (a \cdot b^{-1})(b \cdot d) = (c \cdot d^{-1})(b \cdot d) \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

□

Πόρισμα 1.5.2. *Για κάθε* $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ *και για κάθε* $k \in \mathbb{Z}$ *με* $k \neq 0$ *ισχύει ότι* $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k}$.

Πρόταση 1.5.3. *(Κανόνες πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού στους ρητούς) Για κάθε* $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ *ισχύει ότι*

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{(a \cdot d) + (c \cdot b)}{b \cdot d}$$

και

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Απόδειξη. Από το Πόρισμα 1.5.2 έχουμε

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = (a \cdot d)(b \cdot d)^{-1} + (c \cdot b)(b \cdot d)^{-1} = ((a \cdot d) + (c \cdot b)) \cdot (d \cdot b)^{-1} = \frac{(a \cdot d) + (c \cdot b)}{b \cdot d}$$

Ομοίως,

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = (a \cdot b^{-1}) \cdot (c \cdot d^{-1}) = (a \cdot c) \cdot (b^{-1} d^{-1}) = (a \cdot c) \cdot (b \cdot d)^{-1} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

□

Πόρισμα 1.5.4. *Το σύνολο* $\mathbb{Q}$ *είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό.*

Απόδειξη. Προκύπτει από τις Προτάσεις 1.4.1 και 1.5.3. □

Πόρισμα 1.5.5. *Για κάθε* $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ *με* $\frac{a}{b} \neq 0$ *ισχύει ότι*

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$$

Απόδειξη. Είναι

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a \cdot b}{b \cdot a} = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b)^{-1} = 1$$

και άρα $\frac{b}{a} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$ □

Πόρισμα 1.5.6. *Το σύνολο* $\mathbb{Q}$ *είναι το μικρότερο υποσύνολο του* $\mathbb{R}$ *που περιέχει το* $\mathbb{N}$ *και ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες (I1)-(I9) των πράξεων της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού.*

1.6 Η ιδιότητα της Πληρότητας των πραγματικών αριθμών

Ορισμός 1.6.1. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Θα λέμε ότι το A είναι* **άνω φραγμένο** *αν υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε*

$$\forall a \in A,\ a \leq M \tag{1.6.1}$$

Κάθε πραγματικός αριθμός M που ικανοποιεί την (1.6.1) θα καλείται **άνω φράγμα** *του A.*

Αντίστοιχα, θα λέμε ότι το A είναι **κάτω φραγμένο** *αν υπάρχει $m \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε*

$$\forall a \in A,\ m \leq a \tag{1.6.2}$$

Κάθε πραγματικός αριθμός m που ικανοποιεί την (1.6.2) θα καλείται **κάτω φράγμα** *του A.*

Τέλος, το A θα καλείται **φραγμένο** *αν είναι και κάτω και άνω φραγμένο.*

Παρατήρηση 1.6.2. Παρατηρείστε ότι ένας $M \in \mathbb{R}$ **δεν** είναι άνω φράγμα του A αν

$$\exists a \in A \text{ τέτοιος ώστε } M < a \tag{1.6.3}$$

και αντίστοιχα ένας $m \in \mathbb{R}$ **δεν** είναι κάτω φράγμα του A αν

$$\exists a \in A \text{ τέτοιος ώστε } a < m \tag{1.6.4}$$

Παρατηρείστε επίσης ότι αν το A είναι άνω φραγμένο από κάποιο $M \in \mathbb{R}$ τότε κάθε αριθμός $M' > M$ είναι πάλι άνω φράγμα του A. Αντίστοιχα, αν το A είναι κάτω φραγμένο από κάποιο $m \in \mathbb{R}$ τότε κάθε αριθμός $m' < m$ είναι πάλι άνω φράγμα του A.

Ορισμός 1.6.3. *Ένας αριθμός $s \in \mathbb{R}$ θα καλείται* **supremum** *του A ή* **ελάχιστο άνω φράγμα** *του A αν (α) Ο s είναι άνω φράγμα του A και (β) Κάθε $s' < s$ δεν είναι άνω φράγμα του A.*

Αντίστοιχα, ένας αριθμός $t \in \mathbb{R}$ θα καλείται **infimum** *του A ή* **μέγιστο κάτω φράγμα** *του A αν (α) Ο t είναι κάτω φράγμα του A και (β) Κάθε $t' > t$ δεν είναι κάτω φράγμα του A.*

Πρόταση 1.6.4. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και φραγμένο και έστω $s = \sup A$ και $\tau = \inf A$.*

(α) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $a \in A$ τέτοιο ώστε $s - \varepsilon < a \leq s$.

(β) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $a \in A$ τέτοιο ώστε $\tau \leq a < \tau + \varepsilon$.

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε (α) $s - \varepsilon < s = \sup A$ και άρα το $s - \varepsilon$ δεν είναι άνω φράγμα του A. Άρα υπάρχει $a \in A$ με $s - \varepsilon < a$. Υποχρεωτικά $a \leq s$ αφού το $s = \sup A$ είναι άνω φράγμα του A.

(β) $\inf A = \tau < \tau + \varepsilon$ και άρα το $\tau + \varepsilon$ δεν είναι κάτω φράγμα του A. Άρα υπάρχει $a \in A$ με $a < \tau + \varepsilon$. Υποχρεωτικά $\tau \leq a$ αφού το $\tau = \inf A$ είναι κάτω φράγμα του A. □

Είναι εύκολο να δούμε ότι το supremum ενός υποσυνόλου A του $\mathbb{R}$ αν υπάρχει είναι μοναδικό και θα συμβολίζεται με $\sup A$. Όμοια για το infimum το οποίο θα συμβολίζεται με $\inf A$.

Παράδειγμα 1.6.5. Έστω $A = (0,1)$. Τότε $\sup A = 1$ και $\inf A = 0$. Άρα το supremum ή το infimum ενός συνόλου A δεν ανήκει απαραίτητα στο A.

Πρόταση 1.6.6. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Το A έχει μέγιστο στοιχείο αν και μόνο αν $\sup A \in A$ και στην περίπτωση αυτή $\sup A = \max A$. Αντίστοιχα, το A έχει ελάχιστο στοιχείο αν και μόνο αν $\inf A \in A$ και στην περίπτωση αυτή $\inf A = \min A$.*

Απόδειξη. Έστω ότι το A έχει μέγιστο και έστω $M = \max A$. Τοτε το M είναι άνω φράγμα του A (ως το μεγαλύτερο από όλα τα στοιχεία του A). Επίσης, έστω $M' < M$. Τότε το M' δεν είναι άνω φράγμα του A αφού είναι γνήσια μικρότερο από το στοιχείο $M \in A$. Άρα το M είναι το μικρότερο άνω φράγμα του A δηλαδή είναι το supremum του A. Έστω τώρα ότι $\sup A \in A$. Τότε αφού το $\sup A$ είναι άνω φράγμα του A, έπεται ότι $\forall a \in A$, $\sup A \geq a$ και άρα αφού ανήκει και στο A είναι το μέγιστο στοιχείο του, δηλαδή $\sup A = \max A$. Όμοια για το infimum. □

Δεν έχουν όλα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ μέγιστο στοιχείο ακόμα και αν είναι άνω φραγμένα. Για παράδειγμα, αν $A = (0,1)$ τότε για κάθε $a \in (0,1)$ υπάρχει $a' \in A$ με $a' > a$ (πχ. το στοιχείο $a' = \frac{a+1}{2}$).

Δεχόμαστε τώρα ότι το $\mathbb{R}$ έχει επιπλέον των (I1)-(I12) την παρακάτω ιδιότητα.

(I13) **Ιδιότητα της Πληρότητας του** $\mathbb{R}$: *Κάθε μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του* $\mathbb{R}$ *έχει supremum.*

1.7 Συνέπειες της Πληρότητας των πραγματικών αριθμών

Η ιδιότητα της Πληρότητας του $\mathbb{R}$ έχει πολύ σημαντικές συνέπειες για την δομή των πραγματικών αριθμών τις οποίες αναφέρουμε στην συνέχεια.

1.7.1 Ύπαρξη του infimum για κάτω φραγμένα υποσύνολα των πραγματικών αριθμών

Θεώρημα 1.7.1. *Κάθε μη κενό και κάτω φραγμένο υποσύνολο του* $\mathbb{R}$ *έχει infimum.*

Απόδειξη. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και κάτω φραγμένο. Θέτουμε

$$K = \{m \in \mathbb{R} : m \text{ κάτω φράγμα του } A\}$$

Το K είναι μη κενό αφού το A είναι εξ υποθέσεως κάτω φραγμένο. Επίσης είναι άνω φραγμένο αφού αν $a \in A$ τότε $m \leq a$ για όλα τα $m \in K$, δηλαδή *κάθε στοιχείο του A είναι άνω φράγμα του K*. Άρα, από την Ιδιότητα της Πληρότητας το K έχει supremum.

Ισχυριζόμαστε τώρα ότι το $\sup K$ είναι κάτω φράγμα του A και άρα ανήκει στο K. Πράγματι,όπως είδαμε παραπάνω οποιοδήποτε στοιχείο a του A είναι άνω φράγμα του K και το $\sup K$ είναι εξ ορισμού *το μικρότερο άνω φράγμα του A*. Άρα $\sup K \leq a$ για όλα τα $a \in A$ οπότε το $\sup K$ είναι κάτω φράγμα του A και άρα εξ ορισμού του K ανήκει στο K.

Άρα $\sup K \in K$ και συνεπώς από Πρόταση 1.6.6 το K έχει μέγιστο, με άλλα λόγια υπάρχει το μέγιστο κάτω φράγμα του A, δηλαδή το $\inf A$. □

1.7.2 Ιδιότητες Αρχιμήδους και Ευδόξου

Θεώρημα 1.7.2. *(**Αρχιμήδεια Ιδιότητα**) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $n > x$. Ισοδύναμα το σύνολο των φυσικών αριθμών δεν είναι άνω φραγμένο υποσύνολο του* $\mathbb{R}$.

Απόδειξη. Έστω, προς απαγωγή σε άτοπο, ότι η πρόταση δεν είναι αληθής. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \leq x$. Άρα το x είναι ένα άνω φράγμα του $\mathbb{N}$, δηλαδή το $\mathbb{N}$ είναι άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Από την ιδιότητα της Πληρότητας του $\mathbb{R}$ υπάρχει το supremum του $\mathbb{N}$. Έστω $s = \sup \mathbb{N}$.

Θεωρούμε τώρα τον αριθμό $s-1$. Επειδή $s-1<s$ και το s είναι το supremum του A (δηλαδή το s είναι το ***μικρότερο*** άνω φράγμα του A) ο $s-1$ ως γνήσια μικρότερος του s δεν είναι άνω φράγμα του A. Άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$s-1<n_0$$

Αλλά τότε

$$s<n_0+1$$

και επειδή $n_0+1 \in \mathbb{N}$, το s δεν είναι άνω φράγμα του $\mathbb{N}$, άτοπο. □

Πόρισμα 1.7.3. *Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ με $k<x$. Ισοδύναμα, το $\mathbb{Z}$ δεν είναι κάτω φραγμένο.*

Απόδειξη. Έστω $x \in \mathbb{R}$. Από το Θεώρημα 1.7.2 υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $n>-x \Leftrightarrow -n<x$. Θέτοντας $k=-n$ έχουμε το συμπέρασμα. □

Πόρισμα 1.7.4. ***(Ιδιότητα του Ευδόξου)*** *Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $0<\dfrac{1}{n}<\varepsilon$*

Απόδειξη. Αν θεωρήσουμε τον αριθμό $x=\frac{1}{\varepsilon}$ τότε από το Θεώρημα 1.7.2 υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$n>\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow 0<\frac{1}{n}<\varepsilon$$

□

1.7.3 Ακέραιο μέρος ενός πραγματικού αριθμού

Στην απόδειξη του επόμενου θεωρήματος θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι αν $k \neq k'$ δύο διαφορετικοί ακέραιοι αριθμοί τότε $|k-k'| \geq 1$, δηλαδή η απόσταση δύο διαφορετικών ακεραίων είναι τουλάχιστον 1.

Θεώρημα 1.7.5. *Κάθε μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{Z}$ έχει μέγιστο στοιχείο.*

Απόδειξη. Έστω $A \subseteq \mathbb{Z}$ άνω φραγμένο και έστω $s=\sup A$. Αρκεί να δειχθεί ότι $s \in A$ γιατί τότε το s θα είναι το μέγιστο στοιχείο του A. Ας υποθέσουμε ότι $s \notin A$. Όπως και στην απόδειξη της Πρότασης 1.7.1 θεωρούμε τον αριθμό $s-1$. Επειδή ο $s-1$ είναι γνήσια μικρότερος του s και ο s είναι το *ελάχιστο* άνω φράγμα του A, ο $s-1$ δεν είναι άνω φράγμα του A και συνεπώς υπάρχει ένα στοιχείο $k \in A$ τέτοιο ώστε

$$s-1<k_1 \tag{1.7.1}$$

Επειδή $s=\sup A$ έχουμε $k \leq s$. Επειδή $k \in A$ και υποθέσαμε ότι $s \notin A$ αποκλείεται να έχουμε $k=s$ και άρα

$$k<s \tag{1.7.2}$$

Συνεπώς και ο k δεν είναι άνω φράγμα του A. Άρα υπάρχει $k' \in A$ τέτοιος ώστε

$$k<k' \tag{1.7.3}$$

Επειδή $k' \in A$ και $s=\sup A$ έχουμε ότι $k' \leq s$ και όπως και με τον k, επειδή $k' \in A$ και $s \notin A$,

$$k'<s \tag{1.7.4}$$

Από τις (1.7.1)–(1.7.4) έχουμε

$$s - 1 < k < k' < s$$

που σημαίνει ότι

$$|k - k'| < 1$$

άτοπο, αφού k, k' ακέραιοι. □

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$Z_x = \{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$$

δηλαδή Z_x είναι το υποσύνολο του $\mathbb{Z}$ που αποτελείται από όλους τους ακέραιους που είναι μικρότεροι ή ίσοι του x. Π.χ. αν $x = -3,2$ τότε $Z_x = \{..., -5, -4\}$, αν $x = 3,2$ τότε $Z_x = \{..., 0, 1, 2, 3\}$.

Πόρισμα 1.7.6. *Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ το $Z_x = \{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ έχει μέγιστο στοιχείο.*

Απόδειξη. Από το Πόρισμα 1.7.3 το Z_x δεν είναι κενό. Επίσης εξ ορισμού το Z_x είναι άνω φραγμένο (π.χ. από το x). Άρα από το Θεώρημα 1.7.5 το Z_x έχει μέγιστο στοιχείο. □

Ορισμός 1.7.7. *(**Ακέραιο μέρος**) Έστω $x \in \mathbb{R}$. Ονομάζουμε ακέραιο μέρος του x το μέγιστο στοιχείο του $Z_x = \{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$.*

Το ακέραιο μέρος ενός πραγματικού αριθμού θα συμβολίζεται με $[x]$.

Πρόταση 1.7.8. *Έστω $x \in \mathbb{R}$. Τότε το ακέραιο μέρος του x είναι ο μοναδικός ακέραιος k_0 με την ιδιότητα*

$$k_0 \leq x < k_0 + 1 \tag{1.7.5}$$

Απόδειξη. Έχουμε $[x] = \max Z_x = \max\{k \in Z : k \leq x\}$. Άρα $[x] \leq x$ διότι $[x] \in Z_x$. Επίσης $[x] + 1 \notin Z_x$ αφού $[x] + 1 > [x] = \max Z_x$. Άρα εξ ορισμού του Z_x θα πρέπει $[x] + 1 > x$. Συνεπώς $[x] \leq x < [x] + 1$. Αν τώρα έχουμε έναν ακέραιο $k \in \mathbb{Z}$ με $k \leq x < k + 1$ τότε

$$x - 1 < k \leq x$$

Αλλά αυτό θα ισχύει και για $k = [x]$ δηλαδή,

$$x - 1 < [x] \leq x$$

Άρα $|k - [x]| < 1 \Rightarrow k = [x]$. □

1.7.4 Πυκνότητα ρητών και αρρήτων

Μια ιδιότητα των ακεραίων που είναι συνέπεια της ύπαρξης του ακεραίου μέρους είναι η παρακάτω.

Λήμμα 1.7.9. *Έστω $a < b$ πραγματικοί αριθμοί. Αν $b - a > 1$ τότε υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ τέτοιος ώστε*

$$a < k < b$$

Με άλλα λόγια, κάθε ανοικτό διάστημα του $\mathbb{R}$ με μήκος γνήσια μεγαλύτερο του 1 περιέχει κάποιον ακέραιο.

Απόδειξη. Έχουμε

$$[a] \leq a < [a] + 1 \leq a + 1 < b$$

Συνεπώς, ο ακέραιος $k = [a] + 1$ ικανοποιεί το ζητούμενο. □

Παρατήρηση 1.7.10. Το Λήμμα 1.7.9 δεν ισχύει αν $b - a \leq 1$. Πχ. το ανοικτό διάστημα $(1, 2)$ έχει μήκος 1 και δεν περιέχει κανένα ακέραιο.

Μια από τις σημαντικότερες συνέπειες της Πληρότητας για τους ρητούς είναι η εξής.

Θεώρημα 1.7.11. *(**Πυκνότητα ρητών στο** $\mathbb{R}$) Έστω $a < b$ πραγματικοί αριθμοί. Τότε υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ τέτοιος ώστε*

$$a < q < b$$

Με άλλα λόγια κάθε ανοικτό διάστημα του $\mathbb{R}$ περιέχει ρητό αριθμό.

Απόδειξη. Αν $b - a > 1$ το συμπέρασμα έπεται από το Λήμμα 1.7.9, αφού κάθε ακέραιος είναι και ρητός. Έστω λοιπόν ότι $b - a \leq 1$. Επιλέγουμε $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$nb - na > 1 \tag{1.7.6}$$

Αυτό είναι εφικτό από την Αρχιμήδεια Ιδιότητα (Θεώρημα 1.7.2). Πράγματι, για τον πραγματικό αριθμό $\dfrac{1}{b-a}$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με

$$n > \frac{1}{b-a} \Rightarrow n(b-a) = nb - na > 1$$

Από το Λήμμα 1.7.9 (για $''a = na''$ και $''b = nb''$), υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ με

$$na < k < nb \Rightarrow a < \frac{k}{n} < b$$

και άρα ο ρητός $q = \dfrac{k}{n}$ ικανοποιεί το συμπέρασμα. □

Πόρισμα 1.7.12. *(**Πυκνότητα ρητών, β΄ μορφή**) Μεταξύ δύο πραγματικών αριθμών $a < b$ υπάρχουν άπειροι ρητοί.*

Απόδειξη. Έστω $a < b$. Μεταξύ των a και b υπάρχει ένας ρητός $a < q_1 < b$, μεταξύ των a και q_1 υπάρχει ρητός $a < q_2 < q$, ομοίως υπάρχει $q_3 \in \mathbb{Q}$ με $a < q_3 < q_2$ κ.ο.κ. □

Θεώρημα 1.7.13. *(**Υπαρξη τετραγωνικής ρίζας θετικού αριθμού**) Για κάθε $a > 0$ υπάρχει ένας μοναδικός θετικός πραγματικός αριθμός s τέτοιος ώστε $s^2 = a$.*

Ο θετικός αριθμός s με την ιδιότητα $s^2 = a$ καλείται **τετραγωνική ρίζα του** a και συμβολίζεται με $\sqrt{a}$.

Για την απόδειξη του θεωρήματος 1.7.13 θα χρειασθούμε το εξής λήμμα.

Λήμμα 1.7.14. *Έστω s, a θετικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $s^2 \neq a$. Έστω*

$$0 < \varepsilon < \min\left\{1, \frac{|s^2 - a|}{2s + 1}\right\} \tag{1.7.7}$$

(α) Αν $s^2 < a$ τότε $(s + \varepsilon)^2 < a$.

(β) Αν $s^2 > a$ τότε $s - \varepsilon > 0$ και $(s-\varepsilon)^2 > a$

Απόδειξη. (α) Έστω $s^2 < a$. Έχουμε

$$\begin{aligned}(s+\varepsilon)^2 &= s^2 + 2s\varepsilon + \varepsilon^2\\ &= s^2 + (2s+\varepsilon)\varepsilon\\ &< s^2 + (2s+1)\varepsilon\\ &< s^2 + (a - s^2) = a\end{aligned}$$

(β) Έστω $s^2 > a$. Έχουμε

$$\begin{aligned}(s-\varepsilon)^2 &= s^2 - 2s\varepsilon + \varepsilon^2\\ &> s^2 - 2s\varepsilon - \varepsilon\\ &= s^2 - (2s+1)\varepsilon\\ &> s^2 - (s^2 - a) = a\end{aligned}$$

Επίσης εύκολα βλέπουμε ότι

$$s - \varepsilon > 0 \Leftrightarrow s > \varepsilon \Leftrightarrow s > \frac{s^2 - a}{2s+1} \Leftrightarrow 2s^2 + s > s^2 - a \Leftrightarrow s^2 + s + a > 0$$

που ισχύει αφού $s, a > 0$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 1.7.13. Έστω $a > 0$. Θεωρούμε το σύνολο $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < a\}$. Το A είναι μη κενό, αφού $0 \in A$. Επίσης το A είναι άνω φραγμένο. Πράγματι ο αριθμός $M = a + 1$ είναι άνω φράγμα του A (αν υπήρχε $x \in A$ με $x > a + 1 > 1$, τότε $x^2 > (a+1)^2 > a + 1 > a$, άτοπο.

Άρα, από την ιδιότητα της Πληρότητας του $\mathbb{R}$, υπάρχει το $s = \sup A$. Έχουμε ότι $s > 0$. Πράγματι, από την Ιδιότητα Ευδόξου (Πόρισμα 1.7.4, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{n} < a$. Επειδή

$$\left(\frac{1}{n}\right)^2 \leq \frac{1}{n} < a$$

έπεται ότι $\frac{1}{n} \in A$ και άρα $s = \sup A \geq \frac{1}{n} > 0$.

Θα δείξουμε ότι $s^2 = a$ αποκλείοντας τις περιπτώσεις $s^2 < a$ και $s^2 > a$. Πράγματι, αν $s^2 < a$ από το Λήμμα 1.7.14 θα υπήρχε $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό με $(s+\varepsilon)^2 < a$. Αλλά τότε από τον ορισμό του A θα είχαμε $s + \varepsilon \in A$, άτοπο αφού $s + \varepsilon > s = \sup A$. Αντίστοιχα, αν $s^2 > a$, πάλι από το Λήμμα 1.7.14 θα υπήρχε $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό με $s - \varepsilon > 0$ και $(s-\varepsilon)^2 > a$. Άρα $(s-\varepsilon)^2 > a > x^2$ για κάθε $x \in A$ που σημαίνει ότι $s - \varepsilon > x$ για κάθε $x \in A$. Άρα το $s - \varepsilon$ είναι άνω φράγμα του A, άτοπο αφού $s - \varepsilon < s = \sup A$ και κάθε αριθμός μικρότερος του $\sup A$ δεν είναι άνω φράγμα του A. □

Ορισμός 1.7.15. *Κάθε πραγματικός αριθμός που δεν είναι ρητός καλείται **άρρητος**.*

Πρόταση 1.7.16. *Δεν υπάρχει ρητός αριθμός τέτοιος ώστε το τετράγωνό του να είναι το 2.*

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχει ρητός $q = \frac{m}{n}$ με $q^2 = 2$. Μπορούμε να υποθέσουμε επιπλέον, απλοποιώντας το κλάσμα $\frac{m}{n}$, ότι οι m, n δεν έχουν άλλους κοινούς διαιρέτες εκτός της μονάδας. Ειδικότερα,

μπορούμε να υποθέσουμε ότι δεν είναι και οι δύο άρτιοι. Έχουμε

$$q^2 = \frac{m^2}{n^2} = 2 \Rightarrow m^2 = 2n^2 \Rightarrow m^2 \text{ άρτιος } \Rightarrow m \text{ άρτιος } \Rightarrow m = 2k$$

Άρα

$$q^2 = \frac{(2k)^2}{n^2} = 2 \Rightarrow (2k)^2 = 2n^2 \Rightarrow 4k^2 = 2n^2 \Rightarrow n^2 = 2k^2 \Rightarrow n^2 \text{ άρτιος } \Rightarrow n \text{ άρτιος}$$

Συνεπώς, m, n και οι δύο άρτιοι, άτοπο. □

Πόρισμα 1.7.17. *(**Υπαρξη αρρήτων αριθμών**) Ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος και άρα υπάρχουν άρρητοι αριθμοί.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 1.7.13 υπάρχει $x > 0$ με $x^2 = 2$. Από την Πρόταση 1.7.16 ο $x \notin \mathbb{Q}$. Άρα $x = \sqrt{2}$ είναι άρρητος. □

Πρόταση 1.7.18. *Έστω $q \in \mathbb{Q}$ με $q \neq 0$ και $a \in \mathbb{R}$ άρρητος. Τότε οι αριθμοί qa, $\frac{q}{a}$, $\frac{a}{q}$ είναι άρρητοι.*

Απόδειξη. Αν ο $qa = q' \in \mathbb{Q}$ τότε $a = \frac{q'}{q} \in \mathbb{Q}$ ως πηλίκο ρητών, άτοπο. Ομοίως και για τους $\frac{q}{a}$ και $\frac{a}{q}$ □

Θεώρημα 1.7.19. *(**Πυκνότητα αρρητών**) Έστω $a < b$ πραγματικοί αριθμοί. Τότε υπάρχει ξ άρρητος τέτοιος ώστε*

$$a < \xi < b$$

Με άλλα λόγια κάθε ανοικτό διάστημα του $\mathbb{R}$ περιέχει έναν άρρητο.

Απόδειξη. Έστω $a < b$ στο $\mathbb{R}$. Θεωρούμε τους $a' = \sqrt{2}a$ και $b' = \sqrt{2}b$. Έχουμε $a' < b'$ και άρα από την Πυκνότητα των ρητών αριθμών (Θεώρημα 1.7.11) υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ τέτοιος ώστε $a' < q < b'$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $q \neq 0$ (αν $q = 0$ επιλέγουμε έναν άλλο ρητό q' με $a' < q' < 0 < b'$). Άρα

$$\sqrt{2}a < q < \sqrt{2}b \Rightarrow a < \frac{q}{\sqrt{2}} < b$$

Επειδή ο q είναι ρητός διάφορος του 0 και ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος (Πόρισμα 1.7.17) , από Πρόταση 1.7.18, ο $\frac{q}{\sqrt{2}}$ είναι άρρητος. Συνεπώς, ο $\xi = \frac{q}{\sqrt{2}}$ ικανοποιεί το συμπέρασμα της πρότασης. □

Πόρισμα 1.7.20. *(**Πυκνότητα αρρητών, β΄ μορφή**) Μεταξύ δύο πραγματικών αριθμών $a < b$ υπάρχουν άπειροι άρρητοι.*

Απόδειξη. Ανάλογα όπως το Πόρισμα 1.7.20 □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Ακολουθίες Πραγματικών αριθμών

2.1 Βασικοί ορισμοί

Κάθε συνάρτηση $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{N}$ και τιμές στο $\mathbb{R}$ θα καλείται ***ακολουθία*** πραγματικών αριθμών. Αν $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ μια ακολουθία τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η τιμή της συνάρτησης a στο n θα συμβολίζεται με a_n αντί για $a(n)$, δηλαδή η μεταβλητή n μετατρέπεται σε δείκτη. Έτσι γράφουμε a_1 αντί για $a(1)$, a_2 αντί για $a(2)$, a_3 αντί για $a(3)$ κ.ο.κ. Ο a_1 καλείται ο *πρώτος όρος*, ο a_2 *δεύτερος όρος* και γενικά, ο a_n καλείται ο ***n-οστός*** (ή ***γενικός***) όρος της ακολουθίας. Τον δείκτη n στον όρο a_n θα τον καλούμε πολλές φορές και ***τάξη*** του όρου.

Μια ακολουθία $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ θα την συμβολίζουμε συνήθως με (a_n) ή και με αναγραφή των πρώτων όρων της δηλαδή $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Πολλές φορές μια ακολουθία δίνεται απο ένα ***κλειστό τύπο*** πχ. λέμε η ακολουθία $a_n = 1/n$, και εννούμε την ακολουθία $1, 1/2, 1/3, \ldots$, η λέμε η *σταθερή* ακολουθία $a_n = 1$ και εννοούμε την ακολουθία $1, 1, 1, \ldots$ όπου όλοι οι όροι είναι ίσοι με 1. Άλλες φορές η ακολουθία δίνεται με κάποιον ***αναδρομικό τύπο***, δηλαδή μας δίνουν τον πρώτο ή και άλλους αν χρειάζεται όρους της ακολουθίας και ύστερα ένα τύπο που μας λέει πώς προκύπτει ο n-οστός όρος από τους προηγούμενούς του. Χαρακτηριστικό παράδειγμα εδώ είναι η **ακολουθία Fibonacci** $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ που είναι η ακολουθία με $a_1 = a_2 = 1$ και $a_n = a_{n-1} + a_{n-1}$ για κάθε $n \geq 3$. Τέλος ορίζονται και ακολουθίες για τις οποίες δεν μπορούμε να βρούμε ούτε κλειστό ούτε αναδρομικό τύπο. Πχ. η ακολουθία (a_n) όπου ο a_n είναι το n-οστό δεκαδικό ψηφίο του αριθμού π.

2.2 Συγκλίνουσες ακολουθίες

Με απλά λόγια θα λέγαμε ότι μία ακολουθία συγκλίνει σε ένα πραγματικό αριθμό αν οι όροι της πλησιάζουν τον αριθμό αυτόν καθώς η τάξη τους μεγαλώνει. Ο ακριβής ορισμός είναι ο εξής.

Ορισμός 2.2.1. *Έστω (a_n) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών και $a \in \mathbb{R}$. Θα λέμε ότι η (a_n)* ***συγκλίνει στο*** *a αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει ότι $|a_n - a| < \varepsilon$.*

Όταν η (a_n) συγκλίνει στο a θα γράφουμε $a_n \to a$. Μια ακολουθία (a_n) καλείται ***συγκλίνουσα*** αν υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ με $a_n \to a$.

Ορισμός 2.2.2. *Έστω $a \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$. Το ανοικτό διάστημα $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ καλείται ε-**περιοχή** του a ή απλά περιοχή του a. Το ε καλείται **ακτίνα** της περιοχής.*

Επειδή

$$x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \Leftrightarrow |x-a| < \varepsilon$$

έχουμε ότι η περιοχή $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ αποτελείται από όλα τα $x \in \mathbb{R}$ που απέχουν από το a απόσταση μικρότερη του ε (θυμηθείτε ότι το απόλυτο της διαφοράς δύο αριθμών εκφράζει την απόσταση των αριθμών αυτών). Ο Ορισμός 2.2.1 λέει ότι $a_n \to a \in \mathbb{R}$ αν *κάθε* περιοχή του a περιέχει ***τελικά όλους*** τους όρους της ακολουθίας (δηλαδή από κάποια τάξη και μετά).

Πρόταση 2.2.3. *Αν $a_n = c$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε $a_n \to c$.*

Απόδειξη. Επειδή $|a_n - c| = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε κατά τετριμμένο τρόπο ότι $|a_n - c| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq 1$. Συνεπώς για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ (το $n_0 = 1$) για το οποίο για όλα τα $n \geq n_0$ ισχύει ότι $|a_n - c| < \varepsilon$. Άρα $a_n \to c$. □

Παράδειγμα 2.2.4. Η ακολουθία $a_n = \dfrac{1}{n}$ συγκλίνει στο μηδέν.

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $n_0 > \dfrac{1}{\varepsilon}$ (αυτό μπορεί να γίνει λόγω Αρχιμήδειας ιδιότητας του $\mathbb{N}$. Εναλλακτικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ακέραιο μέρος του $\dfrac{1}{\varepsilon}$ και να θέσουμε $n_0 = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$.) Τότε για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $n \geq n_0 \Rightarrow n \geq n_0 > \dfrac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{n_0} < \varepsilon \Rightarrow \dfrac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow |a_n - 0| < \varepsilon$. □

Δεν είναι όλες οι ακολουθίες συγκλίνουσες.

Παράδειγμα 2.2.5. Η ακολουθία $a_n = (-1)^n$ δεν είναι συγκλίνουσα.

Απόδειξη. Παρατηρούμε καταρχάς ότι η απόσταση δύο οποιωνδήποτε διαδοχικών όρων της (a_n) είναι ίση με 2, δηλαδή

$$|a_{n+1} - a_n| = 2 \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N} \tag{2.2.1}$$

Πράγματι, αν ο n είναι άρτιος τότε $a_n = 1$ και $a_{n+1} = -1$ ενώ αν ο n είναι περιττός τότε $a_n = -1$ και $a_{n+1} = 1$. Παρατηρούμε επίσης ότι αν μια ακολουθία είναι συγκλίνουσα τότε οι όροι της όσο μεγαλώνει η τάξη τους έρχονται ολοένα και κοντά στο όριο της ακολουθίας και κατά συνέπεια θα πρέπει να έρχονται ολοένα πιο κοντά και μεταξύ τους. Πιο συγκεκριμμένα στην περίπτωσή μας, αν η $a_n = (-1)^n$ συνέκλινε σε κάποιο $a \in \mathbb{R}$ τότε από τον ορισμό της σύγκλισης θα μπορούσαμε να βρούμε ένα $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|a_n - a| < 1/2$ για όλα τα $n \geq n_0$. Ειδικότερα, για $n = n_0$ θα είχαμε

$$|a_{n_0} - a| < \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad |a_{n_0+1} - a| < \frac{1}{2}$$

Όμως τότε από την τριγωνική ανισότητα θα είχαμε

$$|a_{n_0+1} - a_{n_0}| \leq |a_{n_0+1} - a| + |a - a_{n_0}| < 1$$

το οποίο έρχεται σε αντίφαση με την (2.2.1). □

Αν $a_n \to a$ τότε ο αριθμός a στον οποίο η (a_n) συγκλίνει θα καλείται **όριο** της (a_n) και θα συμβολίζεται με $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

Πρόταση 2.2.6. ***(Μοναδικότητα του ορίου)*** *Αν μια ακολουθία συγκλίνει τότε το όριό της είναι μοναδικό.*

Απόδειξη. Έστω ότι μια ακολουθία (a_n) είχε δύο διαφορετικά όρια a, a' και έστω $a < a'$. Επιλέγοντας κατάλληλα μικρό $\varepsilon > 0$ (πχ. $\varepsilon = \dfrac{a' - a}{10}$) έχουμε ότι $a + \varepsilon < b - \varepsilon$ και άρα οι περιοχές

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \quad \text{και} \quad (a' - \varepsilon, a' + \varepsilon)$$

των a και a' είναι ξένες μεταξύ τους δηλαδή δεν έχουν κοινά σημεία. Από την άλλη μεριά, αφού $a_n \to a$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \ \forall n \geq n_0$$

και ομοίως, αφού $a_n \to a'$, υπάρχει $n_0' \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$a_n \in (a' - \varepsilon, a' + \varepsilon) \ \forall n \geq n_0'$$

Αλλά τότε για $n = \max\{n_0, n_0'\}$ θα είχαμε ότι ο a_n θα περιεχόταν και στις δύο περιοχές, πράγμα αδύνατον αφού τις έχουμε επιλέξει έτσι ώστε να είναι ξένες. □

2.3 Αποκλίνουσες στο άπειρο ακολουθίες

Ορισμός 2.3.1. *Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών.*

(α) Θα λέμε ότι η (a_n) ***τείνει στο*** *$+\infty$ ή ότι* ***το όριο της είναι το*** *$+\infty$ και θα γράφουμε $a_n \to +\infty$ ή $\lim_n a_n = +\infty$ αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $a_n > M$ για όλα τα $n \geq n_0$.*

(β) Θα λέμε ότι η (a_n) ***τείνει στο*** *$-\infty$ ή ότι* ***το όριο της είναι το*** *$-\infty$ και θα γράφουμε $a_n \to -\infty$ ή $\lim_n a_n = -\infty$ αν για κάθε $M < 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $a_n < M$ για όλα τα $n \geq n_0$.*

Οι ακολουθίες που τείνουν στο άπειρο δεν θεωρούνται συγκλίνουσες ακολουθίες. Συχνά όταν μια ακολουθία τείνει στο $+\infty$ ή $-\infty$ λέμε και ότι ***αποκλίνει*** στο $+\infty$ ή $-\infty$ αντίστοιχα.

Μια χρήσιμη πρόταση είναι και η εξής.

Πρόταση 2.3.2. *Αν $a_n \neq 0$ και $a_n \to +\infty$ τότε $\dfrac{1}{a_n} \to 0$. Ομοίως αν $a_n \to -\infty$.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε την πρόταση στην περίπτωση όπου $a_n \to +\infty$ (η περίπτωση $a_n \to -\infty$ αντιμετωπίζεται με παρόμοιο τρόπο ή θεωρώντας την $(-a_n)$). Έστω $\varepsilon > 0$. Θέτουμε $M = 1/\varepsilon$. Αφού $a_n \to +\infty$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $a_n > M$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα

$$0 < \frac{1}{a_n} < \frac{1}{M} = \varepsilon$$

για κάθε $n \geq n_0$. Συνεπώς, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $0 < \dfrac{1}{a_n} < \varepsilon$ για όλα τα $n \geq n_0$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|\dfrac{1}{a_n} - 0| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα $\dfrac{1}{a_n} \to 0$. □

2.4 Φραγμένες ακολουθίες

Ορισμός 2.4.1. *Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών.*

(α) Η (a_n) λέγεται ***άνω φραγμένη*** *αν υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $a_n \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Κάθε αριθμός $M \in \mathbb{R}$ με αυτή την ιδιότητα θα καλείται* ***άνω φράγμα*** *της (a_n).*

(β) Η (a_n) λέγεται ***κάτω φραγμένη*** *αν υπάρχει $m \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $m \leq a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Κάθε αριθμός m με αυτή την ιδιότητα θα καλείται* ***κάτω φράγμα*** *της (a_n).*

(γ) Η (a_n) θα λέγεται ***φραγμένη*** *αν είναι άνω και κάτω φραγμένη.*

Παραδείγματα 2.4.2. (1) Η ακολουθία (a_n) με $a_n = n$ είναι κάτω φραγμένη, αφού ο $m = 0$ είναι ένα κάτω φράγμα της. Η (a_n) όμως δεν είναι άνω φραγμένη. Πράγματι, (από την Αρχιμήδεια ιδιότητα του $\mathbb{N}$) για κάθε $M \in \mathbb{R}$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $M < n = a_n$.

(2) Η ακολουθία $a_n = 1/n$ είναι φραγμένη. Πχ. ο $m = 0$ είναι ένα κάτω φράγμα της και ο $M = 1$ είναι ένα άνω φράγμα της.

Πρόταση 2.4.3. *Μια ακολουθία (a_n) είναι φραγμένη αν και μόνο αν υπάρχει $K \geq 0$ με $|a_n| \leq K$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

Απόδειξη. Έστω ότι η (a_n) είναι φραγμένη και έστω $m, M \in \mathbb{R}$ με $m \leq a_n \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $K = \max\{|m|, |M|\}$. Τότε $|a_n| \leq K$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Αντίστροφα αν $|a_n| \leq K$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε $-K \leq a_n \leq K$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ δηλαδή η (a_n) είναι φραγμένη. □

Πρόταση 2.4.4. *Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.*

Απόδειξη. Έστω $a_n \to a$. Άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < 1 \Rightarrow |a_n| \leq |a| + 1$$

Θέτουμε $K = \max\{|a_1|, \ldots, |a_{n_0-1}|, |a| + 1\}$. Τότε $K \geq |a_n|$ για κάθε $1 \leq n \leq n_0 - 1$ και $K \geq |a| + 1 \geq |a_n|$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα $|a_n| \leq K$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή η (a_n) είναι φραγμένη. □

Ορισμός 2.4.5. *Μια ακολουθία πραγματικών αριθμών θα την καλούμε* ***μηδενική*** *αν συγκλίνει στο μηδέν.*

Από τον ορισμό της σύγκλισης στο μηδέν έχουμε ότι μια ακολουθία (a_n) είναι μηδενική αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\forall n \geqslant n_0, \quad |a_n| < \varepsilon$$

Πρόταση 2.4.6. ***(Φραγμένη επί μηδενική είναι μηδενική)*** *Έστω (a_n) φραγμένη και (b_n) μηδενική ακολουθία. Τότε η ακολουθία $(a_n b_n)$ είναι μηδενική ακολουθία.*

Απόδειξη. Έστω $M > 0$ με $|a_n| < M$. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $b_n \to 0$ για το $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{M}$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$, $|b_n| < \varepsilon'$. Άρα

$$|a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| < M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

για κάθε $n \geqslant n_0$. □

Πρόταση 2.4.7. *Μια ακολουθία (a_n) είναι μηδενική αν και μόνο αν η $(|a_n|)$ είναι μηδενική.*

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} a_n \to 0 &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ τέτοιο ώστε } \ \forall n \geq n_0 \ \ |a_n - 0| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ τέτοιο ώστε } \ \forall n \geq n_0 \ \ |a_n| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ τέτοιο ώστε } \ \forall n \geq n_0 \ \ ||a_n| - 0| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |a_n| \to 0 \end{aligned}$$

□

2.5 Το Κριτήριο των Ισοσυγκλινουσών ακολουθιών

Το παρακάτω θεώρημα καλείται *Κριτήριο των Ισοσυγκλινουσών ακολουθιών* (ή *Κριτήριο Παρεμβολής*) και αποτελεί ένα πολύ χρήσιμο κριτήριο για την εύρεση του ορίου μιας ακολουθίας.

Θεώρημα 2.5.1. *Έστω (a_n), (b_n) και (γ_n) ακολουθίες πραγματικών αριθμών τέτοιες ώστε*

(α) Υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε

$$a_n \leq b_n \leq \gamma_n \tag{2.5.1}$$

για όλα τα $n \geq m_0$.

(β) Οι (a_n) και (γ_n) είναι συγκλίνουσες και $\lim_n a_n = \lim_n \gamma_n = \ell$.

Τότε η (b_n) είναι συγκλίνουσα και $\lim_n b_n = \ell$.

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $a_n \to \ell$ υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$n \geq n_1 \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon \Rightarrow \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon \tag{2.5.2}$$

Ομοίως αφού $\gamma_n \to \ell$ υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$n \geq n_2 \Rightarrow |\gamma_n - \ell| < \varepsilon \Rightarrow \ell - \varepsilon < \gamma_n < \ell + \varepsilon \tag{2.5.3}$$

Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2, m_0\}$. Τότε για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε ότι $n \geq n_1$ και $n \geq n_2$ και άρα ισχύουν ταυτόχρονα και οι (2.5.2) και η (2.5.3). Επίσης $n \geq n_0 \Rightarrow n \geq m_0$ και άρα ισχύει και η (2.5.1). Συνδυάζοντας τις (2.5.1), (2.5.2) και (2.5.3) παίρνουμε

$$\begin{aligned} n \geq n_0 &\Rightarrow \ell - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq \gamma_n < \ell + \varepsilon \\ &\Rightarrow \ell - \varepsilon < b_n < \ell + \varepsilon \Rightarrow |b_n - \ell| < \varepsilon \end{aligned}$$

Άρα για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει ότι $|b_n - \ell| < \varepsilon$, ισοδύναμα $\lim_n b_n = \ell$. □

Πόρισμα 2.5.2. *Αν $(b_n), (\gamma_n)$ ακολουθίες θετικών αριθμών τέτοιες ώστε $b_n \leq \gamma_n$ και $\gamma_n \to 0$. Τότε και $b_n \to 0$.*

Απόδειξη. Έχουμε $0 \leq b_n \leq \gamma_n$ οπότε το συμπέρασμα προκύπτει από το Θεώρημα 2.5.1 για $a_n = 0$. □

Παράδειγμα 2.5.3. $\dfrac{n^2}{n^3+2n^2+1} \to 0$. Πράγματι,

$$0 < \frac{n^2}{n^3+2n^2+1} = \frac{1}{n+2+\frac{1}{n^2}} \leq \frac{1}{n} \to 0$$

Πρόταση 2.5.4. *(**Πυκνότητα ρητών, ακολουθιακή μορφή**) Κάθε πραγματικός αριθμός είναι το όριο μιας ακολουθίας ρητών.*

Λύση. Έστω $x \in \mathbb{R}$. Από την πυκνότητα των ρητών στο $\mathbb{R}$ επιλέγουμε $q_1 \in \mathbb{Q}$ με

$$x - 1 < q_1 < x + 1$$

Ομοίως επιλέγουμε $q_2 \in \mathbb{Q}$ με

$$x - \frac{1}{2} < q_2 < x + \frac{1}{2}$$

Γενικά για κάθε $n \in \mathbb{N}$ επιλέγουμε $q_n \in \mathbb{Q}$ με

$$x - \frac{1}{n} < q_n < x + \frac{1}{n}$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι οι ακολουθίες $a_n = x - \dfrac{1}{n}$ και $\gamma_n = x + \dfrac{1}{n}$ συγκλίνουν στο x. Άρα από το Θεώρημα των Ισοσυγκλινουσών ακολουθιών η ακολουθία $b_n = q_n$ συγκλίνει στο x.

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται και η παρακάτω

Πρόταση 2.5.5. *(**Πυκνότητα αρρήτων, ακολουθιακή μορφή**) Κάθε πραγματικός αριθμός είναι το όριο μιας ακολουθίας αρρήτων.*

2.6 Όρια και αλγεβρικές πράξεις

2.6.1 Όριο αθροίσματος ακολουθιών

Πρόταση 2.6.1. *Έστω (a_n), (b_n) συγκλίνουσες ακολουθίες με $a_n \to a$ και $b_n \to b$. Τότε $a_n + b_n \to a + b$.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Θέλουμε να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει ότι

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon$$

Παρατηρούμε ότι

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \tag{2.6.1}$$

Άρα αρκεί να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{και} \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.6.2}$$

Για την εύρεση του n_0 εργαζόμαστε ως εξής. Αφού $a_n \to a$ υπάρχει ένα $n_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$n \geq n_1 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.6.3}$$

Ομοίως, αφού $b_n \to b$, υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$n \geq n_2 \Rightarrow |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.6.4}$$

Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Τότε για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $n \geq n_1$ και $n \geq n_2$ και άρα ισχύει και η (2.6.3) και η (2.6.4), δηλαδή η (2.6.2). □

2.6.2 Όριο γινομένου ακολουθιών

Πρόταση 2.6.2. *Έστω Έστω (a_n), (b_n) συγκλίνουσες ακολουθίες, $a_n \to a$ και $b_n \to b$. Τότε $a_n b_n \to ab$.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Παρατηρούμε ότι

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \leq |b_n| \cdot |a_n - a| + |a| \cdot |b_n - b| \tag{2.6.5}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή $b_n \to b$ έπεται ότι η (b_n) είναι φραγμένη. Έστω $K > 0$ με $|b_n| \leq K$ και έστω $\Lambda = \max\{|a|, K\} > 0$. Από την (2.6.4) έχουμε

$$|a_n b_n - ab| \leq \Lambda \left(|a_n - a| + |b_n - b|\right) \tag{2.6.6}$$

Τώρα, όπως και στην Πρόταση 2.6.1, βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2\Lambda} \quad \text{και} \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2\Lambda}$$

□

Πόρισμα 2.6.3. *Έστω $a_n \to a$, $b_n \to b$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ Τότε $\lambda a_n + \mu b_n \to \lambda a + \mu b$.*

Απόδειξη. Θεωρώντας τα λ και μ ως σταθερές ακολουθίες, από την Πρόταση 2.6.2 έχουμε ότι $\lambda a_n \to \lambda a$ και $\mu b_n \to \mu b$. Άρα από Πρόταση 2.6.1 έπεται ότι $\lambda a_n + \mu b_n \to \lambda a + \mu b$. □

Πόρισμα 2.6.4. *Έστω $a_n \to a$ και $k \in \mathbb{N}$. Τότε $a_n^k \to a^k$.*

Απόδειξη. Με επαγωγή στο $k \in \mathbb{N}$. Για $k = 1$ ισχύει τετριμμένα. Έστω ότι ισχύει για κάποιο $k \in \mathbb{N}$. Τότε $a_n^{k+1} = a_n^k a_n \to a^k a = a^{k+1}$. □

2.6.3 Όριο Πηλίκου ακολουθιών

Πρόταση 2.6.5. *Έστω (a_n), (b_n) συγκλίνουσες ακολουθίες, $a_n \to a$, $b_n \to b$ με $b \neq 0$ και $b_n \neq 0$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Τότε $\dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{a}{b}$.*

Για την απόδειξη της Πρότασης 2.6.5 θα χρειασθούμε το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 2.6.6. *Έστω (b_n) συγκλίνουσα ακολουθία, $b_n \to b$ με $b \neq 0$. Τότε υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|b_n| \geq \dfrac{|b|}{2}$ για κάθε $n \geq n_1$.*

Απόδειξη. Αφού $b \neq 0 \Rightarrow |b| > 0$ και αφού $b_n \to b$ για τον θετικό $\varepsilon = \dfrac{|b|}{2}$ υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$n \geq n_1 \Rightarrow |b_n - b| < \frac{|b|}{2} \tag{2.6.7}$$

Επειδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\big||b_n| - |b|\big| \leq |b_n - b|$$

από την (2.6.7) παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} n \geq n_1 &\Rightarrow \big||b_n| - |b|\big| < \frac{|b|}{2} \\ &\Rightarrow -\frac{|b|}{2} < |b_n| - |b| \\ &\Rightarrow |b| - \frac{|b|}{2} < |b_n| \\ &\Rightarrow \frac{|b|}{2} < |b_n| \end{aligned}$$

□

Απόδειξη της Πρότασης 2.6.5. Αρκεί να δειχθεί ότι $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$. Από το Λήμμα 2.6.6 παίρνουμε ότι υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|b_n| \geq \frac{|b|}{2}$ για κάθε $n \geq n_1$ και άρα

$$n \geq n_1 \Rightarrow \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b| \cdot |b_n|} \leq \frac{2}{|b|^2} \cdot |b_n - b| = C|b_n - b| \tag{2.6.8}$$

όπου $C = 2/|b|^2$.

Έστω τώρα $\varepsilon > 0$. Αφού $b_n \to b$ για $\varepsilon' = \varepsilon/C$ υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$n \geq n_2 \Rightarrow |b_n - b| < \varepsilon/C \tag{2.6.9}$$

Άρα αν $n_0 = \max\{n_1, n_1'\}$ τότε για $n \geq n_0$ θα ισχύει και η (2.6.8) και η (2.6.9) οπότε

$$n \geq n_0 \Rightarrow \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| < C \cdot \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon$$

□

2.6.4 Όριο ρίζας ακολουθίας

Πρόταση 2.6.7. *Έστω (a_n) συγκλίνουσα ακολουθία και έστω $a_n \to a$. Αν $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε $a \geq 0$.*

Απόδειξη. Έστω προς απαγωγή σε άτοπο ότι $a < 0$. Αφού $a_n \to a$ για $\varepsilon = |a|/2$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$, $|a_n - a| < |a|/2$. Αλλά τότε για κάθε $n \geq n_0$ θα είχαμε

$$a_n < a + \frac{|a|}{2} = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} < 0 \Rightarrow a_n < 0$$

άτοπο. □

Πρόταση 2.6.8. *Έστω (a_n) συγκλίνουσα ακολουθία, $a_n \geq 0$, $a_n \to a$ και $k \in \mathbb{N}$ με $k \geq 2$. Τότε $\sqrt[k]{a_n} \to \sqrt[k]{a}$.*

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε ένα $k \in \mathbb{N}$ με $k \geq 2$ και έστω $a_n \to a$ με $a_n \geq 0$. Από την Πρόταση 2.6.7 έχουμε ότι $a \geq 0$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις για το a:

Περίπτωση 1: $a = 0$.

Έστω ότι $a_n \to 0$. Θα δείξουμε ότι τότε $\sqrt[k]{a_n} \to 0$ δηλαδή ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|\sqrt[k]{a_n} - 0| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$. Θέτουμε $\varepsilon' = \varepsilon^k$. Αφού $a_n \to 0$ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε

$$n \geq n_0 \Rightarrow a_n < \varepsilon' = \varepsilon^k \Rightarrow \sqrt[k]{a_n} < \varepsilon$$

Περίπτωση 2 : $a = 1$.

Έστω $a_n \to 1$. Θα δείξουμε ότι $\sqrt[k]{a_n} \to 1$, δηλαδή ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|\sqrt[k]{a_n} - 1| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Έστω $\varepsilon > 0$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 < \varepsilon < 1$. Αφού $a_n \to 1$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$, $|a_n - 1| < \varepsilon$, ισοδύναμα

$$1 - \varepsilon < a_n < 1 + \varepsilon \tag{2.6.10}$$

Επειδή υποθέσαμε ότι $0 < \varepsilon < 1$ έχουμε

$$0 < 1 - \varepsilon < 1 < 1 + \varepsilon$$

και άρα αφού $k \in \mathbb{N}$ με $k \geq 2$ έπεται ότι

$$(1 - \varepsilon)^k < 1 - \varepsilon < 1 < 1 + \varepsilon < (1 + \varepsilon)^k \tag{2.6.11}$$

Συνδυάζοντας τις (2.6.10) και (2.6.11) παίρνουμε ότι αν $n \geq n_0$ τότε

$$0 < (1 - \varepsilon)^k < a_n < (1 + \varepsilon)^k \Leftrightarrow 1 - \varepsilon < \sqrt[k]{a_n} < 1 + \varepsilon \Leftrightarrow \left|\sqrt[k]{a_n} - 1\right| < \varepsilon$$

Περίπτωση 3 : $a > 0$ και $a \neq 1$.

Ορίζουμε την ακολουθία $b_n = \dfrac{a_n}{a}$. Τότε $b_n \to \dfrac{a}{a} = 1$ και άρα από την Περίπτωση 2, $\sqrt[k]{b_n} \to 1$. Επειδή $a_n = a \cdot b_n$ έχουμε $\sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}\sqrt[k]{b_n} \to \sqrt[k]{a} \cdot 1 = \sqrt[k]{a}$. □

2.7 Δύο χρήσιμες ανισότητες

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε δύο βασικές ανισότητες : την ***ανισότητα Bernoulli*** και την ***ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου***. Τις ανισότητες αυτές θα τις χρησιμοποιήσουμε στην επόμενη παράγραφο για να υπολογίσουμε κάποια βασικά όρια.

Πρόταση 2.7.1. *(**ανισότητα Bernoulli**) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $a > -1$ ισχύει ότι*

$$(1 + a)^n \geq 1 + na \tag{2.7.1}$$

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με Μαθηματική Επαγωγή. Για $n = 1$ η ανισότητα ισχύει τετριμμένα. Υποθέτουμε τώρα ότι η (2.7.1) ισχύει για κάποιο n και δείχνουμε ότι ισχύει για $n + 1$. Έστω λοιπόν ότι $(1 + a)^n \geq 1 + na$. Επειδή $1 + a > 0$, πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη παίρνουμε

$$\begin{aligned}(1 + a)^n \geq 1 + na &\Rightarrow (1 + a)^n(1 + a) \geq (1 + na)(1 + a)\\ &\Rightarrow (1 + a)^{n+1} \geq 1 + a + na + a^2 \geq 1 + na + a = 1 + (n + 1)a\end{aligned}$$

□

Παρατήρηση 2.7.2. Η ανισότητα Bernoulli στην ουσία ισχύει πιο αυστηρά, δηλαδή

$$(1+a)^n > 1 + na \tag{2.7.2}$$

για κάθε $n \geq 2$ και για κάθε $a > -1$ με $a \neq 0$. Η (2.7.2) αποδεικνύεται όπως και η (2.7.1) με επαγωγή. Η (2.7.2) χρησιμοποιείται όταν θέλουμε να δείξουμε γνήσιες ανισότητες (πχ. δείτε τον ορισμό του αριθμού e παρακάτω).

Πόρισμα 2.7.3. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $x > 0$ ισχύει ότι*

$$x^n \geq 1 + n(x-1) \tag{2.7.3}$$

Απόδειξη. Επειδή $x = 1 + (x-1)$, θέτοντας $a = x - 1$ στην (2.7.1) παίρνουμε την (2.7.3). □

Ορισμός 2.7.4. *Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $a_1, \dots, a_n$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Θέτουμε*

$$A_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \quad \text{και} \quad G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot \cdots \cdot a_n}$$

*Ο A_n καλείται **αριθμητικός μέσος** και ο G_n **γεωμετρικός μέσος** των $a_1, \dots, a_n$.*

Λήμμα 2.7.5. *Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $a_1, \dots, a_n$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Για κάθε $n \geq 2$ ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις*

$$nA_n = (n-1)A_{n-1} + a_n \tag{2.7.4}$$

και

$$A_n^n \geq A_{n-1}^{n-1} a_n \tag{2.7.5}$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε μόνο την (2.7.5) (η (2.7.4) είναι άμεση). Έστω $n \geq 2$. Από την (2.7.3) για $x = A_n/A_{n-1} > 0$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} A_n^n = A_{n-1}^n \left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right)^n &\overset{(2.7.3)}{\geq} A_{n-1}^n \left(1 + n\left(\frac{A_n}{A_{n-1}} - 1\right)\right) \\ &= A_{n-1}^n \frac{A_{n-1} + nA_n - nA_{n-1}}{A_{n-1}} \\ &= A_{n-1}^n \frac{nA_n - (n-1)A_{n-1}}{A_{n-1}} \overset{(2.7.4)}{=} A_{n-1}^{n-1} a_n \end{aligned}$$

□

Πρόταση 2.7.6. *(**ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου**) Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $a_1, \dots, a_n$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Τότε $A_n \geq G_n$.*

Απόδειξη. Πράγματι, για $n = 1$, $A_1 = G_1 = a_1$ και η ανισότητα είναι τετριμμένη. Έστω ότι για κάποιο n ισχύει ότι $A_n \geq G_n$. Τότε από την (2.7.5) έχουμε

$$A_{n+1}^{n+1} \geq A_n^n a_{n+1} \geq G_n^n a_{n+1} = G_{n+1}^{n+1} \Rightarrow A_{n+1}^{n+1} \geq G_{n+1}^{n+1} \Rightarrow A_{n+1} \geq G_{n+1}$$

□

Παρατήρηση 2.7.7. Από την απόδειξη της Πρότασης 2.7.6 βλέπουμε ότι η η ανισότητα Bernoulli συνεπάγεται την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου. Μπορεί να δειχθεί και η αντίστροφη συνεπαγωγή και άρα στην ουσία οι δύο ανισότητες είναι ισοδύναμες μεταξύ τους. Επίσης αποδεικνύεται ότι η ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου είναι γνήσια αν και μόνο αν $n \geq 2$ και οι $a_1, \ldots, a_n$ δεν είναι όλοι ίσοι μεταξύ τους.

2.8 Κάποια χρήσιμα όρια

Πρόταση 2.8.1. (i) *Έστω $\lambda > 1$. Τότε $\lambda^n \to +\infty$.*

(ii) *Έστω $-1 < \lambda < 1$. Τότε $\lambda^n \to 0$.*

(iii) *Έστω $a > 0$. Τότε $\sqrt[n]{a} \to 1$.*

(iv) $\sqrt[n]{n} \to 1$.

Απόδειξη. (i) Έστω $M > 0$. Θα βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστω $\lambda^n > M$ για κα΄θε $n \geq n_0$. Θέτουμε $a = \lambda - 1$. Τότε $a > 0$ και από την ανισότητα Bernoulli

$$\lambda^n = (1+a)^n \geqslant 1 + na > na$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επιλέγοντας συνεπώς $n_0 \in \mathbb{N}$ με $n_0 > \dfrac{M}{a}$ έχουμε ότι $\lambda^n > na \geq n_0 a > M$ για κάθε $n \geq n_0$.

(ii) Αν $\lambda = 0$ τότε $\lambda^n = 0 \to 0$. Έστω $\lambda \neq 0$. Τότε $-1 < \lambda < 1 \Rightarrow |\lambda| < 1 \Rightarrow \dfrac{1}{|\lambda|} > 1$. Από το (1) έχουμε $\dfrac{1}{|\lambda|^n} \to +\infty$ και άρα από την Πρόταση 2.3.2 $|\lambda|^n = |\lambda^n| \to 0$. Από την Πρόταση 2.4.7 αυτό σημαίνει ότι $\lambda^n \to 0$.

(iii) Από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου, έχουμε

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{a} &= \sqrt[n]{a \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \cdots \cdot 1}_{(n-1)-\text{φορές}}} \\ &\leq \frac{a + (n-1)}{n} = \frac{a}{n} + 1 - \frac{1}{n} < 1 + \frac{a}{n}\end{aligned}$$

Αν $a \geq 1$ τότε

$$1 \leq \sqrt[n]{a} \leq 1 + \frac{a}{n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή

$$\lim_n \frac{a}{n} = a \lim_n \frac{1}{n} = 0$$

από το Θεώρημα των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών έχουμε $\lim_n \sqrt[n]{a} = 1$.

Αν τώρα $0 < a < 1$ θέτουμε $\beta = 1/a$. Τότε $\beta > 1$ και άρα, από την περίπτωση που μόλις αποδείξαμε, $\sqrt[n]{\beta} \to 1$. Άρα,

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{\beta}} \to \frac{1}{1} = 1$$

(iv) Από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου, έχουμε

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{n} &= \sqrt[n]{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\cdot\underbrace{1\cdot 1\cdot\cdots\cdot 1}_{(n-2)-\text{φορές}}}\\ &\le \frac{\sqrt{n}+\sqrt{n}+(n-2)}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}}+1-\frac{2}{n} < 1+\frac{2}{\sqrt{n}}\end{aligned}$$

Επειδή επιπλέον $\sqrt[n]{n} \ge 1$ (άμεσο αφού $n \ge 1$) για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$1 \le \sqrt[n]{n} \le 1+\frac{2}{\sqrt{n}} \tag{2.8.1}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή

$$\lim_n \frac{2}{\sqrt{n}} = 2\lim_n \frac{1}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{\lim_n \frac{1}{n}} = 0$$

από το Θεώρημα των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών έχουμε $\lim_n \sqrt[n]{n} = 1$. □

2.9 Μονότονες ακολουθίες

2.9.1 Βασικοί ορισμοί

Ορισμός 2.9.1. *Μια ακολουθία (a_n) θα λέγεται **αύξουσα** αν $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \dots$ και **γνησίως αύξουσα** αν $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$. Αντίστοιχα, η (a_n) θα λέγεται **φθίνουσα** αν $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \dots$ και **γνησίως φθίνουσα** αν $a_1 > a_2 > a_3 > \dots$.*

Αν μια ακολουθία είναι αύξουσα ή φθίνουσα τότε καλείται ***μονότονη***. Ειδικότερα αν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα τότε καλείται ***γνησίως μονότονη***.

Παρατήρηση 2.9.2. Συνήθως για να αποδείξουμε ότι μια ακολουθία (a_n) είναι π.χ. αύξουσα δείχνουμε με Μαθηματική Επαγωγή ότι $a_{n+1} \ge a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Εναλλακτικά στην περίπτωση όπου η (a_n) είναι ακολουθία θετικών αριθμών μπορούμε να θεωρήσουμε τα πηλίκα $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ π.χ. αν ισχύει ότι $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε η (a_n) είναι αύξουσα.

Παραδείγματα 2.9.3. Η $a_n = 1/n$ είναι γνησίως φθίνουσα, η $a_n = n$ είναι γνησίως αύξουσα.

2.9.2 Μονότονες και φραγμένες ακολουθίες

Ορισμός 2.9.4. *Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών.*

(α) Με $\sup a_n$ συμβολίζουμε το ελάχιστο άνω φράγμα του συνόλου των όρων της (a_n), δηλαδή $\sup a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

(β) Με $\inf a_n$ συμβολίζουμε το μέγιστο κάτω φράγμα του συνόλου των όρων της (a_n), δηλαδή $\inf a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Όπως έχουμε δεί αν μια ακολουθία είναι φραγμένη τότε δεν έπεται απαραίτητα ότι είναι και συγκλίνουσα (κλασσικό παράδειγμα η $a_n = (-1)^n$). Τα πράγματα όμως είναι πιο ομαλά στις μονότονες ακολουθίες. Το επόμενο θεώρημα είναι στην ουσία η Αρχή Πληρότητας του $\mathbb{R}$ διατυπωμένη με ακολουθίες.

Θεώρημα 2.9.5. *Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία είναι συγκλίνουσα. Πιο συγκεκριμένα ισχύουν τα εξής.*

(α) Αν (a_n) *αύξουσα και άνω φραγμένη τότε* $\lim a_n = \sup a_n$.

(β) Αν (a_n) *φθίνουσα και κάτω φραγμένη ακολουθία τότε* $\lim a_n = \inf a_n$.

Απόδειξη. Θα δείξουμε μόνο το (α) (το (β) αποδεικνύεται ομοίως). Έστω (a_n) αύξουσα και άνω φραγμένη ακολουθία και έστω $s = \sup a_n$. (Το s είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του συνόλου των όρων της (a_n) και υπάρχει από το αξίωμα της πληρότητας του $\mathbb{R}$.)

Θα δείξουμε ότι $a_n \to s$. Σύμφωνα με τον ορισμό της σύγκλισης ακολουθίας αυτό σημαίνει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ θα πρέπει να βρούμε ένα $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|a_n - s| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Έστω λοιπόν ένα $\varepsilon > 0$. Τότε $s - \varepsilon < s$ και άρα το $s - \varepsilon$ δεν είναι άνω φράγμα της (a_n) (αφού είναι γνήσια μικρότερο του ελαχίστου άνω φράγματος της (a_n)). Συνεπώς δεν είναι όλοι οι όροι της (a_n) μικρότεροι ή ίσοι του $s - \varepsilon$ δηλαδή υπάρχει όρος γνήσια μεγαλύτερος του $s - \varepsilon$. Άρα θα ισχύει

$$s - \varepsilon < a_{n_0} \leq s$$

για κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$. Επειδή η (a_n) είναι αύξουσα έχουμε $a_{n_0} \leq a_n$ για κάθε $n \geq n_0$ και άρα

$$s - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq s$$

για όλα τα $n \geq n_0$. Συνεπώς

$$|a_n - s| < \varepsilon, \text{ για κάθε } n \geq n_0.$$

Άρα $a_n \to s$. □

2.9.3 Αρχή Κιβωτισμού

Ένα σημαντικό πόρισμα του Θεωρήματος 2.9.5 είναι το επόμενο θεώρημα γνωστό και ως **η αρχή του κιβωτισμού**.

Θεώρημα 2.9.6. *Έστω* $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq [a_3, b_3] \supseteq \dots$ *φθίνουσα ακολουθία κλειστών και φραγμένων διαστημάτων του* $\mathbb{R}$. *Τότε η τομή* $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$ *είναι μη κενή. Αν επιπλέον* $b_n - a_n \to 0$ *τότε η τομή* $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$ *είναι μονοσύνολο.*

Απόδειξη. Η υπόθεση $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq [a_3, b_3] \supseteq \dots$ συνεπάγεται ότι

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1$$

Με άλλα λόγια η (a_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη και η (b_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη. Από το Θεώρημα 2.9.5 έχουμε ότι οι (a_n) και (b_n) είναι συγκλίνουσες με $\lim_n a_n = \sup a_n$ και $\lim_n b_n = \inf b_n$. Έστω $a = \lim a_n = \sup a_n$ και $b = \lim b_n = \inf b_n$. Επειδή $a_n < b_n \Rightarrow \lim a_n \leq \lim b_n$ και άρα $a \leq b$.

Ισχυριζόμαστε ότι

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] = [a, b] \tag{2.9.1}$$

Πράγματι $a_n \leq a$ και $b \leq b_n$. Συνεπώς, $a_n \leq a \leq b \leq b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Με άλλα λόγια $[a,b] \subseteq [a_n, b_n]$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα

$$[a,b] \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \tag{2.9.2}$$

Από την άλλη μεριά αν $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$ τότε $x \in [a_n, b_n] \Leftrightarrow a_n \leq x \leq b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αυτό σημαίνει ότι το x είναι άνω φράγμα της (a_n) και το y είναι κάτω φράγμα της (b_n) και άρα $\sup a_n = a \leq x \leq \inf b_n = b \Leftrightarrow x \in [a,b]$. Συνεπώς,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \subseteq [a,b] \tag{2.9.3}$$

Από τις (2.9.2) και (2.9.3) έπεται η (2.9.1). Αν τώρα $\lim_n (b_n - a_n) = 0 \Rightarrow \lim a_n - \lim b_n = 0 \Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow a = b$ και από την (2.9.1) η τομή $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$ είναι το κοινό όριο των (a_n) και (b_n). □

Παρατήρηση 2.9.7. Το Θεώρημα 2.9.6 δεν ισχύει για φθίνουσα ακολουθία ***ανοικτών*** φραγμένων διαστημάτων. Π.χ.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{n}\right) = \emptyset$$

διότι αν υπήρχε $x \in \left(0, \frac{1}{n}\right)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε $0 < x < \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άτοπο από Ιδιότητα Ευδόξου. Ομοίως δεν ισχύει για φθίνουσα ακολουθία κλειστών αλλά ***μη φραγμένων*** διαστημάτων. Π.χ.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [n, +\infty) = \emptyset$$

διότι αν υπήρχε $x \in [n, +\infty)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θα έπρεπε $n \leq x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άτοπο από Αρχιμήδεια Ιδιότητα.

2.9.4 Μονότονες και μη φραγμένες ακολουθίες

Το επόμενο θεώρημα είναι το αντίστοιχο του θεωρήματος 2.9.5 για μη φραγμένες μονότονες ακολουθίες.

Θεώρημα 2.9.8. *Αν μία ακολουθία (a_n) είναι αύξουσα και όχι άνω φραγμένη τότε αποκλίνει στο $+\infty$. Αντίστοιχα, αν μία ακολουθία είναι φθίνουσα και όχι κάτω φραγμένη τότε αποκλίνει στο $-\infty$.*

Απόδειξη. Έστω (a_n) αύξουσα και όχι άνω φραγμένη (αν (a_n) είναι φθίνουσα η απόδειξη είναι παρόμοια). Έστω $M > 0$. Αφού η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη το M δεν είναι άνω φράγμα της (a_n) και συνεπώς θα υπάρχει ένας όρος έστω a_{n_0} της (a_n) που θα είναι γνήσια μεγαλύτερος του M. Έχουμε λοιπόν $a_{n_0} > M$. Απο την άλλη μεριά αφού η (a_n) είναι αύξουσα έπεται ότι για κάθε $n \geq n_0$ θα έχουμε $a_n \geq a_{n_0} > M$ Άρα $a_n > M$ για κάθε $n \geq n_0$.

Δείξαμε συνεπώς ότι για κάθε $M \in \mathbb{R}$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $a_n > M$ για όλα τα $n \geq n_0$. Αυτό όμως σημαίνει ότι $a_n \to +\infty$. □

Από το Θεώρημα 2.9.5 και το Θεώρημα 2.9.8 έχουμε το εξής συμπέρασμα.

Πόρισμα 2.9.9. *Κάθε μονότονη ακολουθία έχει όριο (πεπερασμένο ή άπειρο). Το όριο είναι πεπερασμένο αν και μόνο αν η ακολουθία είναι φραγμένη.*

2.10 Ο αριθμός Euler

Για να δώσουμε τον ορισμό του αριθμού e θα χρειασθούμε την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 2.10.1. *Έστω οι ακολουθίες* $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *και* $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. *Ισχύουν τα εξής.*

(i) *Η* (a_n) *είναι γνησίως αύξουσα.*

(ii) *Η* (b_n) *είναι γνησίως φθίνουσα.*

(iii) $a_n < b_n$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.

(iv) *Οι* (a_n) *και* (b_n) *συγκλίνουν στο ίδιο όριο.*

Απόδειξη. (α) Για κάθε $n \geq 2$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} &= \frac{\frac{(n+1)^n}{n^n}}{\frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}}} \\
&= \frac{(n+1)^n(n-1)^{n-1}}{n^n n^{n-1}} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \\
&= \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \\
&> \left(1-\frac{n}{n^2}\right) \cdot \frac{n}{n-1} \quad \text{(ανισότητα Bernoulli ισχυρή μορφή)} \\
&= \left(1-\frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n}{n-1} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n-1} = 1
\end{aligned}$$

(β) Για κάθε $n \geq 2$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{b_{n-1}}{b_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} &= \frac{\frac{n^n}{(n-1)^n}}{\frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}}} \\
&= \frac{n^{2n+1}}{(n^2-1)^n(n+1)} \\
&= \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} \\
&> \left(1+\frac{n}{n^2-1}\right) \cdot \frac{n}{n+1} \quad \text{(ανισότητα Bernoulli ισχυρή μορφή)} \\
&= \frac{(n^2-1+n)n}{(n^2-1)(n+1)} = \frac{n^3-n+n^2}{n^3+n^2-n-1} > 1
\end{aligned}$$

(γ) Παρατηρούμε ότι $b_n = a_n\left(1+\frac{1}{n}\right) > a_n \cdot 1 = a_n$

(δ) Από τα προηγούμενα έχουμε ότι $a_1 \leq a_n < b_n \leq b_1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα η (a_n) είναι γνησίως αύξουσα και άνω φραγμένη και η (b_n) είναι γνησίως φθίνουσα και κάτω φραγμένη. Συνεπώς είναι και οι δύο συγκλίνουσες ως μονότονες και φραγμένες. Επιπλέον, έχουν το ίδιο όριο αφού

$$\lim_n b_n = \lim_n \left(a_n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \lim_n a_n \cdot \lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_n a_n$$

□

Ορισμός 2.10.2. *Το κοινό όριο των ακολουθιών* $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *και* $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ *καλείται* ***αριθμός Euler*** *και συμβολίζεται με* e.

2.11 Το Θεώρημα Bolzano–Weierstrass

Ορισμός 2.11.1. *Έστω* (a_n) *ακολουθία πραγματικών αριθμών. Μια ακολουθία* (b_n) *θα καλείται* ***υπακολουθία*** *της* (a_n) *αν υπάρχει μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών* $k_1 < k_2 < \dots$ *τέτοια ώστε* $b_n = a_{k_n}$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.

Πρόταση 2.11.2. *Έστω* (a_n) *ακολουθία. Αν* $\lim_n a_n = a$ *(*a *πεπερασμένο ή άπειρο) τότε* $\lim\limits_n a_{k_n} = a$ *για κάθε υπακολουθία* (a_{k_n}) *της* (a_n).

Για την απόδειξη θα χρειασθούμε το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 2.11.3. *Αν* (k_n) *γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών τότε* $k_n \geq n$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$

Απόδειξη. Με επαγωγή. Έχουμε $k_1 \geq 1$ αφού $k_1 \in \mathbb{N}$. Έστω $k_n \geq n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Αφού $k_{n+1} > k_n$ και k_{n+1}, k_n φυσικοί έπεται ότι $k_{n+1} \geq k_n + 1 \geq n + 1$. □

Απόδειξη της Πρότασης 2.11.2. Θα εξετάσουμε την περίπτωση $a \in \mathbb{R}$ (η περίπτωση $a = \pm\infty$ αποδεικνύεται παρόμοια). Έστω $a_n \to a$ και έστω (a_{k_n}) υπακολουθία της (a_n). Θα δείξουμε ότι $a_{k_n} \to a$. Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$. Από την σύγκλιση $a_n \to a$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$, $|a_n - a| < \varepsilon$. Επειδή $k_n \geq n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (Λήμμα 2.11.3) έπεται ότι $k_n \geq n_0$ για κάθε $n \geq n_0$. Συνεπώς $|a_{k_n} - a| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|a_{k_n} - a| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$, δηλαδή η υπακολουθία (a_{k_n}) συγκλίνει στο a. □

Πρόταση 2.11.4. *Κάθε ακολουθία πραγματικών αριθμών περιέχει μονότονη υπακολουθία.*

Απόδειξη. Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Ένας φυσικός αριθμός $k \in \mathbb{N}$ θα καλείται **σημείο κορυφής της** (a_n) **(από δεξιά)** αν $a_k > a_n$ για κάθε $n > k$ (δηλαδή ο a_k ξεπερνάει όλους τους επόμενους όρους της (a_n)). Έστω

$$K = \{k \in \mathbb{N} : a_k \text{ σημείο κορυφής της } (a_n)\}$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για το πλήθος των στοιχείων του K.

<u>*Περίπτωση 1*</u> : Το K είναι πεπερασμένο. Στην περίπτωση αυτή θέτουμε $k_1 = \max K + 1$ (αν το K είναι κενό θέτουμε $k_1 = 1$). Τότε το k_1 δεν ανήκει στο K (αφού είναι μεγαλύτερο του $\max K$) και άρα το k_1 δεν είναι σημείο κορυφής της (a_n). Συνεπώς υπάρχει $k_2 > k_1$ με $a_{k_2} \geq a_{k_1}$. Ομοίως επειδή $k_2 > k_1 > \max K$ το k_2 δεν είναι σημείο κορυφής και άρα υπάρχει $k_3 > k_2$ με $a_{k_3} \geq a_{k_2}$ κ.ο.κ. Με αυτόν τον τρόπο κατασκευάζουμε μια αύξουσα υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n).

<u>*Περίπτωση 2*</u> : Το K είναι άπειρο, έστω $K = \{k_1 < k_2 < k_3 < \dots\}$. Τότε $a_{k_1} > a_{k_2} > a_{k_3} > \dots$ δηλαδή η (a_{k_n}) είναι γνησίως φθίνουσα υπακολουθία της (a_n). □

Θεώρημα 2.11.5. ***(Θεώρημα Bolzano–Weierstrass)*** *Κάθε φραγμένη ακολουθία περιέχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία.*

Απόδειξη. Έστω (a_n) φραγμένη. Από την Πρόταση 2.11.4 η (a_n) περιέχει μια μονότονη υπακολουθία (a_{k_n}). Η (a_{k_n}) είναι φραγμένη αφού όλη η (a_n) είναι φραγμένη. Άρα η (a_{k_n}) είναι μονότονη και φραγμένη και συνεπώς από το Θεώρημα 2.9.5 είναι συγκλίνουσα. □

2.12 Βασικές Ακολουθίες

Πολλές φορές είναι δύσκολο να υπολογίσουμε το όριο μιας ακολουθίας. Πως όμως θα μπορούσαμε να καταλάβουμε αν μια ακολουθία είναι ή δεν είναι συγκλίνουσα χωρίς να βρίσκουμε αν υπάρχει ή όχι το όριό της; Ένας τρόπος είναι να ελέγχουμε αν η ακολουθία μας είναι μονότονη και φραγμένη. Πράγματι, όπως είδαμε κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία είναι συγκλίνουσα. Όμως αν η ακολουθία μας δεν είναι μονότονη τι θα μπορούσαμε να κάνουμε; Μια απάντηση στο ερώτημα αυτό είναι η έννοια της *βασικής* ακολουθίας (ή ακολουθίας *Cauchy*).

Πρόταση 2.12.1. *Έστω (a_n) συγκλίνουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|a_m - a_n| < \varepsilon$ για όλα τα $m, n \geq n_0$.*

Απόδειξη. Έστω a το όριο της (a_n). Έστω επίσης $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό της σύγκλισης έχουμε ότι για τον θετικό αριθμό $\varepsilon/2$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε όταν $n \geq n_0$ τότε

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ισχυριζόμαστε ότι αυτό συνεπάγεται ότι $|a_n - a_m| < \varepsilon$ για όλα τα $n, m \geq n_0$. Πράγματι, έστω $n, m \geq n_0$. Τότε

$$|a_m - a_n| = |a_m - a + a - a_n| \leq |a_m - a| + |a - a_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Ορισμός 2.12.2. *Μια ακολουθία (a_n) καλείται **βασική** (ή **Cauchy**) αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|a_n - a_m| < \varepsilon$ για όλα τα $n, m \geqslant n_0$.*

Πρόταση 2.12.3. *Κάθε βασική ακολουθία είναι φραγμένη.*

Απόδειξη. Έστω (a_n) βασική ακολουθία. Τότε για $\varepsilon = 1$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|a_n - a_m| < 1$ για όλα τα $n, m \geq n_0$. Ειδικότερα,

$$|a_n - a_{n_0}| < 1 \text{ για όλα τα } n \geq n_0 \tag{2.12.1}$$

Θέτουμε

$$M = \max\{|a_1|, \ldots, |a_{n_0-1}|, |a_{n_0}| + 1\}$$

(αν $n_0 = 1$ τότε θέτουμε απλά $M = |a_{n_0}| + 1$). Ισχυριζόμαστε ότι

$$|a_n| \leq M$$

για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Πράγματι έστω $n \in \mathbb{N}$. Αν $n < n_0$ τότε από τον ορισμό του M έχουμε $|a_n| \leq M$. Αν $n \geq n_0$ τότε από την (2.12.1), την τριγωνική ανισότητα και τον ορισμό του M,

$$|a_n - a_{n_0}| < 1 \Rightarrow |a_n| - |a_{n_0}| < 1 \Rightarrow |a_n| < |a_{n_0}| + 1 \leq M$$

και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. □

Πρόταση 2.12.4. *Μια βασική ακολουθία που περιέχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία είναι και η ίδια συγκλίνουσα.*

Απόδειξη. Έστω (a_n) βασική ακολουθία και έστω ότι η (a_n) περιέχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία (a_{k_n}). Αν $a_{k_n} \to a$ θα δείξουμε ότι και $a_n \to a$. Πράγματι έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή η (a_n) είναι βασική υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$|a_n - a_m| < \varepsilon/2 \text{ για όλα τα } n, m \geq n_1 \tag{2.12.2}$$

Ισχυριζόμαστε ότι

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ για όλα τα } n \geq n_1 \tag{2.12.3}$$

Πράγματι, επειδή $a_{k_n} \to a$ μπορούμε να επιλέξουμε $n_2 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$|a_{k_n} - a| < \varepsilon/2 \text{ για όλα τα } n \geq n_2 \tag{2.12.4}$$

Θέτουμε

$$n_0 = \max\{n_1, n_2\}$$

Τότε $k_{n_0} \geq n_0 \geq n_1$ και άρα από την (2.12.2) (για $m = m_0$) παίρνουμε

$$|a_n - a_{k_{n_0}}| < \varepsilon/2 \text{ για όλα τα } n \geq n_1 \tag{2.12.5}$$

Αντίστοιχα, αφού $n_0 \geq n_2$, η (2.12.4) (για $n = n_0$) δίνει

$$|a_{k_{n_0}} - a| < \varepsilon/2 \tag{2.12.6}$$

Άρα για κάθε $n \geq n_1$ έχουμε

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{k_{n_0}}| + |a_{k_{n_0}} - a| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

□

Θεώρημα 2.12.5. Μια ακολουθία είναι συγκλίνουσα αν και μόνο αν είναι βασική.

Απόδειξη. Από την Πρόταση 2.12.1 έχουμε ότι αν μια ακολουθία είναι συγκλίνουσα τότε είναι και βασική. Μένει συνεπώς να δειχθεί το αντίστροφο δηλαδή ότι κάθε βασική ακολουθία είναι συγκλίνουσα. Εστω (a_n) μια βασική ακολουθία. Από την Πρόταση 2.12.3 η (a_n) είναι φραγμένη και συνεπώς από το Θεώρημα Bolzano–Weierstrass η (a_n) περιέχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Άρα από την Πρόταση 2.12.4 η (a_n) είναι συγκλίνουσα. □

2.13 Αριθμήσιμα και Υπεραριθμήσιμα σύνολα

Ορισμός 2.13.1. *Έστω A, B μη κενά σύνολα και έστω $f : A \to B$.*

(i) *Η f καλείται $1-1$ αν για κάθε $a_1, a_2 \in A$ με $a_1 \neq a_2$ ισχύει ότι $f(a_1) \neq f(a_2)$.*

(ii) *Η f καλείται **επί** αν για κάθε $b \in B$ υπάρχει $a \in A$ με $b = f(a)$, ισοδύναμα $f(A) = B$ όπου $f(A) = \{f(a) : a \in A\}$.*

(iii) *Η f καλείται **αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία** μεταξύ του A και B αν είναι 1-1 και επί.*

Ορισμός 2.13.2. *Ένα σύνολο X καλείται* ***αριθμήσιμο*** *αν είτε είναι πεπερασμένο είτε υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ του $\mathbb{N}$ και του X. Ένα σύνολο που δεν είναι αριθμήσιμο καλείται* ***υπεραριθμήσιμο****.*

Πρόταση 2.13.3. *Το σύνολο $\mathbb{Z}$ όλων των ακεραίων αριθμών είναι αριθμήσιμο.*

Απόδειξη. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ όπου

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n-1}{2}, & n \text{ περιττός} \\ -\dfrac{n}{2}, & n \text{ άρτιος} \end{cases}$$

είναι μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ του $\mathbb{N}$ και του $\mathbb{Z}$. □

Αποδεικνύεται επίσης το εξής θεώρημα.

Θεώρημα 2.13.4. *Το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών είναι αριθμήσιμο.*

Θεώρημα 2.13.5. *Το $\mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο.*

Απόδειξη. Έστω προς απαγωγή σε άτοπο ότι το $\mathbb{R}$ είναι αριθμήσιμο. Έστω $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία. Θέτοντας $x_n = f(n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε $\mathbb{R} = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Θα επιλέξουμε μια φθίνουσα ακολουθία κλειστών και φραγμένων διαστημάτων του $\mathbb{R}$, $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \dots$ με την ιδιότητα $x_n \notin I_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αρχίζουμε με ένα κλειστό φραγμένο διάστημα I_1 τέτοιο ώστε $x_1 \notin I_1$. Μετά επιλέγουμε κλειστό υποδιάστημα I_2 του I_1 με $x_2 \notin I_2$, μετά ένα κλειστό υποδιάστημα I_3 του I_2 με $x_3 \notin I_3$ κ. ο. κ.

Από την Αρχή του Κιβωτισμού (Θεώρημα 2.9.6) υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ με $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. Αφού υποθέσαμε ότι $\mathbb{R} = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ θα πρέπει $x = x_k$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$. Συνεπώς $x_k \in \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ και άρα $x_k \in I_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού για $n = k$, $x_k \notin I_k$. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Συνέχεια και Όρια Συναρτήσεων

3.1 Ορισμός της συνέχειας

Στα επόμενα με X θα συμβολίζουμε ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Ορισμός 3.1.1. *Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in X$. Η συνάρτηση f καλείται **συνεχής στο** x_0 αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in X$ με $|x - x_0| < \delta$ ισχύει ότι $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.*

*Η f θα καλείται **συνεχής** αν είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in X$.*

Με άλλα λόγια ο παραπάνω ορισμός λέει ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 \in X$ αν οποιαδήποτε περιοχή του $f(x_0)$ περιέχει όλες τις τιμές που παίρνει η f όταν αυτή περιορισθεί σε μια κατάλληλη περιοχή του x_0.

Παράδειγμα 3.1.2. Κάθε σταθερή συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής. Πράγματι, έστω $x_0 \in X$ και $\varepsilon > 0$. Τότε για οποιοδήποτε $\delta > 0$ αν $x \in X$ με $|x - x_0| < \delta$ έπεται ότι $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$.

Παράδειγμα 3.1.3. Η ταυτοτική συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x$ για κάθε $x \in X$ είναι συνεχής. Πράγματι, έστω $x_0 \in X$ και $\varepsilon > 0$. Τότε για $\delta = \varepsilon$ έχουμε ότι αν $x \in X$ με $|x - x_0| < \delta$ τότε $|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \varepsilon = \delta$.

Στα παραπάνω δύο παραδείγματα το δ ήταν ανεξάρτητο της επιλογής του x_0 (στην περίπτωση της σταθερής συνάρτσης ήταν ανεξάρτητο και του ε). Γενικά, για μια δεδομένη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ το δ εξαρτάται από το x_0 και το ε. Παρατηρείστε επίσης ότι η συνέχεια είναι μια ιδιότητα που αφορά μόνο στα σημεία του πεδίου ορισμού της συνάρτησης.

Παρατήρηση 3.1.4. Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0 θα λέμε ότι είναι **ασυνεχής** στο x_0. Αν η f είναι ασυνεχής σε κάθε $x_0 \in X$ τότε θα λέμε ότι η f είναι **παντού ασυνεχής**.Η άρνηση του Ορισμού 3.1.1 σημαίνει το εξής:

Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in X$. Η f είναι ασυνεχής στο x_0 αν και μόνο αν υπάρχει μια θετική σταθερά $\varepsilon_0 > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x \in X$ με $|x - x_0| < \delta$ αλλά $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$.

Με άλλα λόγια υπάρχει μια σταθερή περιοχή του $f(x_0)$ για την οποία όσο και να περιορίσουμε την f σε μικρές περιοχές γύρω από το x_0 δεν θα καταφέρουμε ποτέ να εγκλωβίσουμε μέσα σε αυτήν όλες τις τιμές της.

Παράδειγμα 3.1.5. (*Η συνάρτηση Dirichlet*) Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ αν } x \text{ ρητός} \\ 0 \text{ αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$ είναι παντού ασυνεχής. Πράγματι έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Από την την ιδιότητα της Πυκνότητας των ρητών και αρρήτων στο διάστημα $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ όπου $\delta > 0$ οποιοδήποτε, μπορούμε να βρούμε έναν ρητό q και έναν άρρητο a. Αν τώρα ο x_0 είναι ρητός έπεται ότι $|f(a) - f(x_0)| = |0 - 1| = 1$ ενώ αν ο x_0 είναι άρρητος $|f(q) - f(x_0)| = |1 - 0| = 1$.

Άρα για $\varepsilon_0 = 1$ και για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ με $|x - x_0| < \delta$ και $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$. Συνεπώς η f είναι ασυνεχής σε οποιοδήποτε $x_0 \in \mathbb{R}$.

3.2 Τοπικές ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων

Πρόταση 3.2.1. *Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in X$ σημείο συνέχειας της f.*

(α) Αν $f(x_0) > 0$ τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

(β) Αν $f(x_0) < 0$ τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Απόδειξη. (α) Το ότι το x_0 είναι σημείο συνέχειας της f σημαίνει εξ ορισμού ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$, για κάθε $x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ Θέτοντας $\varepsilon = f(x_0) > 0$ παίρνουμε το συμπέρασμα. (β) Θεωρούμε την $-f$ και εφαρμόζουμε το (α). □

Πόρισμα 3.2.2. *Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in X$ σημείο συνέχειας της f.*

(α) Αν $M \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0) < M$ τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) < M$ για κάθε $x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

(β) Αν $m \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $m < f(x_0)$ τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $m < f(x)$ για κάθε $x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

(γ) Αν $m, M \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $m < f(x_0) < M$ τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $m < f(x) < M$ για κάθε $x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Απόδειξη. (α) Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = M - f(x)$. Η g είναι συνεχής στο x_0 και $g(x_0) > 0$. Εφαρμόζωντας την Πρόταση 3.2.1(α) παίρνουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $g(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) < M$ για κάθε $x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

(β) Θεωρούμε την $-f$ και εφαρμόζουμε το (α) για το $-m$.

(γ) Από το (α) υπάρχει $\delta_1 > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) < M$ για κάθε $x \in X \cap (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$. Ομοίως από το (β) υπάρχει $\delta_2 > 0$ τέτοιο ώστε $m < f(x)$ για κάθε $x \in X \cap (x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2)$. Για $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ έχουμε το ζητούμενο. □

3.3 Συνέχεια και ακολουθίες - Αρχή Μεταφοράς

Το παρακάτω θεώρημα λέει ότι η f είναι συνεχής σε ένα $x_0 \in X$ αν και μόνο αν μεταφέρει τις ακολουθίες που είναι συγκλίνουσες στο x_0 σε ακολουθίες που είναι συγκλίνουσες στο $f(x_0)$. Για τον λόγο αυτό καλείται και **Αρχή Μεταφοράς**.

Θεώρημα 3.3.1. *Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in X$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα.*

(α) Η f είναι συνεχής στο x_0.

(β) Για κάθε ακολουθία (x_n) στο X με $x_n \to x_0$ έπεται ότι $f(x_n) \to f(x_0)$.

Απόδειξη. **(α)** $\Rightarrow$ **(β)** : Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0. Έστω (x_n) ακολουθία στο X με $x_n \to x_0$. Θα δείξουμε ότι $f(x_n) \to f(x_0)$. Έστω $\varepsilon > 0$. Λόγω της συνέχειας της f στο x_0 υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$x \in X \text{ και } |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \tag{3.3.1}$$

Επειδή η (x_n) συγκλίνει στο x_0 υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x_0| < \delta \tag{3.3.2}$$

Έστω $n \geq n_0$. Από την (3.3.2) έχουμε $|x_n - x_0| < \delta$ και άρα από την (3.3.1) (για $x = x_n$) έπεται ότι $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$. Άρα για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$ για όλα τα $n \geq n_0$. Συνεπώς $f(x_n) \to f(x_0)$.

(β) $\Rightarrow$ **(α)** Υποθέτουμε ότι $f(x_n) \to f(x_0)$ για κάθε ακολουθία (x_n) στο X με $x_n \to x_0$. Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0. Έστω προς απαγωγή σε άτοπο ότι η f δεν είναι συνεχής στο x_0. Όπως είδαμε αυτό σημαίνει ότι υπάρχει κάποιο $\varepsilon_0 > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x \in X$ με $|x - x_0| < \delta$ αλλά $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$. Άρα για $n \in \mathbb{N}$, θέτοντας $\delta = 1/n$ έχουμε ότι υπάρχει $x_n \in X$ με

$$|x_n - x_0| < 1/n \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N} \tag{3.3.3}$$

αλλά

$$|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0 \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N} \tag{3.3.4}$$

Η ακολουθία (x_n) που σχηματίζεται με αυτό τον τρόπο συγκλίνει στο x_0 αφού από την (3.3.3) έχουμε $x_n - x_0 \to 0 \Leftrightarrow x_n \to x_0$. Άρα από την υπόθεσή μας θα πρέπει $f(x_n) \to f(x_0)$. Συνεπώς υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon_0 \text{ για κάθε } n \geq n_0$$

το οποίο έρχεται σε αντίφαση με την (3.3.4). □

Η Αρχή Μεταφοράς μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για να δείξουμε ότι μια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ είναι ασυνεχής σε ένα σημείο $x_0 \in X$. Πράγματι, από το Θεώρημα 3.3.1 έχουμε ότι η f είναι ασυνεχής στο x_0 αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία (x_n) στο X με $x_n \to x_0$ αλλά $f(x_n) \nrightarrow f(x_0)$. Ειδικότερα έχουμε το εξής.

Πόρισμα 3.3.2. *Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in X$. Αν υπάρχουν δύο ακολουθίες (x_n) και (x'_n) με $\lim_n x_n = \lim_n x'_n = x_0$ αλλά $\lim_n f(x_n) \neq \lim_n f(x'_n)$ τότε η f είναι ασυνεχής στο x_0.*

Απόδειξη. Αν η f ήταν συνεχής στο x_0, από την Αρχή Μεταφοράς θα έπρεπε $\lim_n f(x_n) = \lim_n f(x'_n) = f(x_0)$, άτοπο. Άρα η f είναι ασυνεχής στο x_0. □

Παράδειγμα 3.3.3. Χρησιμοποιώντας το Πόρισμα 3.3.2 μπορούμε να δώσουμε έναν άλλο τρόπο απόδειξης για το ότι η συνάρτηση Dirichlet (Παράδειγμα 3.1.5) δεν είναι συνεχής σε κανένα σημείο. Πράγματι έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Έστω (q_n) ακολουθία ρητών και (a_n) ακολουθία αρρήτων με με $q_n \to x_0$ και

$a_n \to x_0$ (τέτοιες ακολουθίες υπάρχουν από πυκνότητα ρητών και αρρήτων). Έχουμε $f(q_n) = 1$, για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και άρα $\lim_n f(q_n) = 1$. Από την άλλη πλευρά $f(a_n) = 0$, για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και άρα $\lim_n f(a_n) = 0$.

3.4 Πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων

Με την Αρχή Μεταφοράς αποδεικνύεται πολύ εύκολα ότι η συνέχεια διατηρείται μέσω αλγεβρικ'ων πράξεων και σύνθεσης συναρτήσεων.

Θεώρημα 3.4.1. *Έστω $f, g : X \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in X$ τέτοιο ώστε οι f και g είναι συνεχείς στο x_0. Τότε ισχύουν τα παρακάτω.*

(α) Η συνάρτηση $f + g$ είναι συνεχής στο x_0.

(β) Η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι συνεχής στο x_0.

(γ) Αν επιπλέον $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in X$ η συνάρτηση $\dfrac{f}{g}$ είναι συνεχής στο x_0.

Απόδειξη. Θα δείξουμε μόνο το (α). Τα (β) και (γ) αποδεικνύονται ομοίως. Έστω (x_n) ακολουθία στο X με $x_n \to x_0$. Αφού οι f, g είναι συνεχείς στο x_0 έχουμε ότι $f(x_n) \to f(x_0)$ και $g(x_n) \to g(x_0)$. Άρα $f(x_n) + g(x_n) \to f(x_0) + g(x_0)$. Από Αρχή Μεταφοράς η συνάρτηση $f + g$ είναι συνεχής στο x_0. □

Θεώρημα 3.4.2. *Έστω $g : X \to \mathbb{R}$ και $f : Y \to \mathbb{R}$ με $f(X) \subseteq Y$ ώστε να ορίζεται η σύνθεση $F : X \to \mathbb{R}$ με $F(x) = f(g(x))$ για κάθε $x \in X$. Αν η g είναι συνεχής στο x_0 και η f είναι συνεχής στο $g(x_0)$ τότε η F είναι συνεχής στο x_0.*

Απόδειξη. Έστω (x_n) ακολουθία στο X με $x_n \to x_0$. Αφού η g είναι συνεχής στο x_0, από Αρχή Μεταφοράς έχουμε ότι $g(x_n) \to x_0$. Ομοίως επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 έχουμε ότι $f(g(x_n) \to f(g(x_0))$. Από Αρχή Μεταφοράς η σύνθεση $F = f \circ g$ των f και g είναι συνεχής στο x_0. □

3.5 Συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες σε διαστήματα των πραγματικών αριθμών

Στην παράγραφο αυτή θα αποδείξουμε δύο βασικές ιδιότητες που έχουν οι συνεχείς συναρτήσεις $f : X \to \mathbb{R}$ στην περίπτωση όπου το X είναι κλειστό και φραγμένο διάστημα του $\mathbb{R}$.

3.5.1 Το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών

Ένα από τα σημαντικότερα θεωρήματα για συνεχείς συναρτήσεις είναι το Θεώρημα Ενδιαμέσων τιμών που διατυπώνεται ως εξής.

Θεώρημα 3.5.1. *(Bolzano) Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(a) < 0 < f(b)$ ή $f(b) < 0 < f(a)$. Τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$.*

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 3.5.1 θυμίζουμε τις παρακάτω δύο προτάσεις.

Πρόταση 3.5.2. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και άνω φραγμένο. Τότε υπάρχει ακολουθία (a_n) στο A με $a_n \to \sup A$.*

Απόδειξη. Από την χαρακτηριστική ιδιότητα του supremum, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $a \in A$ με $s - \varepsilon < a \leq s$. Θέοντας $\varepsilon = 1/n$ έχουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να επιλέξουμε $a_n \in A$ τέτοιο ώστε

$$\sup A - \frac{1}{n} < a_n \leq \sup A$$

Από το Θεώρημα των Ισοσυγκλινουσών ακολουθιών έπεται ότι η ακολουθία (a_n) συγκλίνει στο $\sup A$. □

Πρόταση 3.5.3. *Έστω (y_n) συγκλίνουσα ακολουθία. Αν $y_n \geq 0$ τότε $\lim_n y_n \geq 0$. Αντίστοιχα αν $y_n \leq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε $\lim_n y_n \leq 0$.*

Απόδειξη. Έστω $y_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και έστω $y = \lim_n y_n$. Έστω προς απαγωγή σε άτοπο ότι $y < 0$. Επειδή $y_n \to y$ για $\varepsilon = |y| > 0$ θα υπήρχε $n_0 \in \mathbb{N}$ με $|y_n - y| < |y| \Rightarrow y_n < 0$ για κάθε $n \geq n_0$. Άτοπο, αφού $y_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ομοίως αν $y_n \leq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.5.1. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f(a) < 0 < f(b)$ (αν $f(b) < 0 < f(a)$ θεωρούμε την $-f$). Ορίζουμε $A = \{x \in [a,b] : f(x) < 0\}$. Το A είναι μη κενό αφού περιέχει το a. Επίσης είναι άνω φραγμένο από το b. Άρα από την Αρχή Πληρότητας του $\mathbb{R}$ το A έχει supremum. Θέτουμε $\xi = \sup A$ και θα δείξουμε ότι $f(\xi) = 0$.

Καταρχάς η f ορίζεται στο ξ αφού $\xi \in [a,b]$ (πράγματι, $a \leq \xi$ διότι $a \in A$ και ξ άνω φράγμα του A και $\xi \leq b$ διότι το b είναι άνω φράγμα του A και το ξ είναι το μικρότερο άνω φράγμα του A). Επειδή $\xi = \sup A$ από την Πρόταση 3.5.2 υπάρχει ακολουθία (a_n) στο A με $a_n \to \xi$. Από Αρχή Μεταφοράς $f(a_n) \to f(\xi)$ και επειδή $f(a_n) < 0$ ($a_n \in A$) από Πρόταση 3.5.3 έχουμε ότι

$$\lim_n f(a_n) = f(\xi) \leq 0 \tag{3.5.1}$$

Αυτό μας δίνει και ότι $\xi \neq b$ αφού $f(b) > 0$ και άρα $\xi < b$. Επιλέγουμε τώρα μια ακολουθία (b_n) στο $(\xi, b]$ με $b_n \to \xi$ (π.χ. $b_n = \xi + \dfrac{d}{n}$ όπου $d = b - \xi$). Αφού η f είναι συνεχής στο ξ έπεται ότι $f(b_n) \to f(\xi)$. Επειδή $b_n \notin A$ ($b_n > \xi = \sup A$), έχουμε ότι $f(b_n) \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα από Πρόταση 3.5.3,

$$\lim_n f(b_n) = f(\xi) \geq 0 \tag{3.5.2}$$

Από τις (3.5.1) και (3.5.2) προκύπτει ότι $f(\xi) = 0$. □

Το Θεώρημα 3.5.1 διατυπώνεται και γενικότερα ως εξής.

Θεώρημα 3.5.4. *(Θεώρημα των Ενδιάμεσων Τιμών γενική μορφή) Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής όπου I διάστημα του $\mathbb{R}$ και έστω a, b στο I με $a < b$ και $f(a) \neq f(b)$. Αν $f(a) < f(b)$ τότε για κάθε $\eta \in \mathbb{R}$ με $f(a) < \eta < f(b)$ υπάρχει $\xi \in (a,b)$ με $f(\xi) = \eta$. Ομοίως αν $f(a) > f(b)$.*

Απόδειξη. Έστω $f(a) < f(b)$. Θεωρούμε την συνάρτηση $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) - \eta$, για κάθε $x \in [a,b]$. Η g είναι συνεχής και $g(a) < 0 < g(b)$. Από το Θεώρημα 3.5.1 υπάρχει $\xi \in (a,b)$ με $g(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = \eta$. Αν $f(a) > f(b)$ θεωρείστε την $g(x) = \eta - f(x)$. □

Πόρισμα 3.5.5. *Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής όπου I διάστημα του $\mathbb{R}$. Αν $f(x) \neq 0$ τότε η f διατηρεί το ίδιο πρόσημο σε όλο το I, δηλαδή είτε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in I$ είτε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in I$.*

Απόδειξη. Αν η f έπαιρνε ετερόσημες τιμές τότε από το Θεώρημα 3.5.4 θα έπαιρνε και την τιμή 0. □

Με χρήση του Θεωρήματος Ενδιάμεσων Τιμών μπορούμε να αποδείξουμε την ύπαρξη της n-οστής ρίζας ενός οποιουδήποτε θετικού αριθμού.

Πόρισμα 3.5.6. *Έστω $a > 0$ και $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$. Τότε υπάρχει $x > 0$ με $x^n = a$.*

Απόδειξη. Η συνάρτηση $f(x) = x^n - a$ είναι συνεχής (προκύπτει από πράξεις συνεχών) και παίρνει αρνητικές και θετικές τιμές (π.χ. $f(0) = -a$ και $f(a+1) = (a+1)^n - a > a + 1 - a = 1 > 0$). Άρα υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ με $0 < x < a + 1$ τέτοιο ώστε $f(x) = 0$ ισοδύναμα $x^n = a$. □

3.5.2 Το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής

Μια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ θα καλείται *φραγμένη* αν υπάρχουν $m, M \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $m \leq f(x) \leq M$ για όλα τα $x \in X$. Είναι εύκολο να δούμε ότι η f είναι φραγμένη αν υπάρχει $K \geq 0$ με $|f(x)| \leq K$.

Πρόταση 3.5.7. *Κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη.*

Απόδειξη. Έστω προς απαγωγή σε άτοπο ότι η f δεν είναι φραγμένη. Τότε για κάθε $M > 0$ υπάρχει $x \in [a, b]$ τέτοιο ώστε $|f(x)| > M$. Άρα για $K = 1$ μπορούμε να επιλέξουμε $x_1 \in [a, b]$ με $|f(x_1)| > 1$. Ομοίως για $K = 2$ επιλέγουμε $x_2 \in [a, b]$ με $|f(x_2)| > 2$. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο σχηματίζουμε μια ακολουθία (x_n) στο $[a, b]$ με

$$|f(x_n)| > n \tag{3.5.3}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Η (x_n) είναι φραγμένη και άρα από το Θεώρημα Bolzano–Weierstrass περιέχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία (x_{k_n}). Έστω $x_0 = \lim x_{k_n}$. Επειδή $a \leq x_{k_n} \leq b$ θα είναι και $a \leq x_0 \leq b$. Άρα η f ορίζεται στο x_0 και συνεπώς αφού $x_{k_n} \to x_0$ από Αρχή Μεταφοράς θα πρέπει $f(x_{k_n}) \to f(x_0)$. Όμως, από την (3.5.3), έχουμε $|f(x_{k_n})| > k_n$ και επειδή όπως έχουμε δεί $k_n \geq n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έπεται ότι $|f_{k_n}(x)| > n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα η $(f_{k_n}(x))$ δεν είναι φραγμένη και συνεπώς δεν μπορεί να είναι και συγκλίνουσα, άτοπο. □

Θεώρημα 3.5.8. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε η f λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.*

Απόδειξη. Από την Πρόταση 3.5.7 η f είναι φραγμένη, δηλαδή το σύνολο τιμών της f είναι φραγμένο. Θέτουμε $s = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$ και θα δείξουμε ότι υπάρχει $x \in [a, b]$ με $f(x) = s$ (για να δείξουμε ότι η f λαμβάνει ελάχιστη τιμή θέτουμε $\tau = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$ και εργαζόμαστε ομοίως). Ας υποθέσουμε ότι αυτό δεν συμβαίνει, οπότε

$$f(x) < s \tag{3.5.4}$$

για κάθε $x \in [a, b]$. Μπορούμε τότε να ορίσουμε την συνάρτηση $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x) = \frac{1}{s - f(x)}$$

Από την χαρακτηριστική ιδιότητα του supremum, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να επιλέξουμε $x_n \in [a, b]$ με την ιδιότητα

$$s - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq s \tag{3.5.5}$$

Από τις (3.5.4) και (3.5.5) παίρνουμε ότι $0 < s - f(x) < \frac{1}{n}$ και άρα $g(x_n) > n$. Αυτό όμως σημαίνει ότι η g δεν είναι άνω φραγμένη, άτοπο αφού είναι συνεχής και ορίζεται σε κλειστό φραγμένο διάστημα. □

Από τα Θεωρήματα 3.5.4 και 3.5.8 παίρνουμε το παρακάτω πόρισμα.

Πόρισμα 3.5.9. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε υπάρχουν $m \leq M$ στο $\mathbb{R}$ με $f([a,b]) = [m,M]$. Με άλλα λόγια οι συνεχείς συναρτήσεις μεταφέρουν κλειστά και φραγμένα διαστήματα σε κλειστά και φραγμένα διαστήματα.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 3.5.8 η f λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Έστω $m = \min\{f(x) : x \in [a,b]\}$ και $M = \max\{f(x) : x \in [a,b]\}$. έχουμε $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [a,b]$ και άρα $f([a,b]) \subseteq [m,M]$. Από την άλλη μεριά αν $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$ τότε από το Θεώρημα 3.5.4 για κάθε $y \in (m,M)$ υπάρχει ξ μεταξύ των x_1, x_2 με $f(\xi) = \eta$ και άρα $[m,M] \subseteq f([a,b])$. Συνεπώς $f([a,b]) = [m,M]$. □

3.6 Συνεχείς και 1-1 συναρτήσεις

Έστω $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}$ και $f : X \to \mathbb{R}$. Η f καλείται *γνησίως αύξουσα* αν για κάθε $x_1, x_2 \in X$ με $x_1 < x_2$ ισχύει ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Αντίστοιχα η f καλείται *γνησίως φθίνουσα* αν για κάθε $x_1, x_2 \in X$ με $x_1 < x_2$ ισχύει ότι $f(x_1) > f(x_2)$. Η f καλείται *γνησίως μονότονη* αν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα. Τέλος η f καλείται $1-1$ αν για κάθε $x_1, x_2 \in X$ με $x_1 \neq x_2$ έχουμε ότι $f(x_1) \neq f(x_2)$. Είναι άμεσο ότι κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι $1-1$. Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά. Για παράδειγμα η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} x & \text{αν } x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & \text{αν } x > 0 \end{cases}$ είναι 1-1 αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη. Παρατηρείστε ότι η συνάρτηση αυτή δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$. Αυτό δεν είναι τυχαίο όπως φαίνεται από το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 3.6.1. *Έστω I διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f : I \to \mathbb{R}$ μια $1-1$ συνάρτηση. Αν η f είναι συνεχής τότε είναι γνησίως μονότονη.*

Απόδειξη. Έστω $a < b$ στο I. Έχουμε $f(a) \neq f(b)$ και άρα είτε $f(a) < f(b)$ είτε $f(a) > f(b)$. Ας υποθέσουμε ότι $f(a) < f(b)$. Θα δείξουμε ότι για κάθε $x < y$ στο I ισχύει ότι $f(x) < f(y)$ δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα. Πράγματι έστω $x < y$ στο I. Ορίζουμε την συνάρτηση $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(t) = f(tx + (1-t)a) - f(ty + (1-t)b)$$

για κάθε $t \in [0,1]$. έχουμε ότι η g είναι καλά ορισμένη λόγω του ότι το I είναι διάστημα. Επιπλέον είναι και συνεχής. Επειδή $a < b$ και $x < y$ έχουμε ότι $tx + (1-t)a < ty + (1-t)b$ για κάθε $t \in [0,1]$. Ειδικότερα, $tx + (1-t)a \neq ty + (1-t)b$ για κάθε $t \in [0,1]$ και άρα αφού η f είναι 1-1, $g(t) \neq 0$ για όλα τα $t \in [0,1]$. Όμως η g είναι συνεχής και άρα διατηρεί πρόσημο. Επειδή $g(0) = f(a) - f(b) < 0$ έπεται ότι και $g(1) = f(x) - f(y) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(y)$. □

3.7 Συνέχεια μονότονων συναρτήσεων

Το επόμενο θεώρημα δίνει μια ικανή συνθήκη για την συνέχεια μονότονων συναρτήσεων.

Θεώρημα 3.7.1. *Έστω $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}$ και $f : X \to \mathbb{R}$ μονότονη συνάρτηση. Αν το σύνολο τιμών $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$ της f αποτελεί ένα διάστημα του $\mathbb{R}$ τότε η f είναι συνεχής συνάρτηση.*

Απόδειξη. Έστω ότι η $f : X \to \mathbb{R}$ είναι αύξουσα συνάρτηση. Έστω $x_0 \in X$ και έστω $\varepsilon > 0$. Θα βρούμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ για κάθε $x \in X$ με $|x - x_0| < \delta$. Θέτουμε $J = f(X)$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για το $f(x_0)$ και το J: Είτε το $f(x_0)$ είναι εσωτερικό σημείο του J είτε είναι άκρο του.

Ας υποθέσουμε ότι είναι εσωτερικό σημείο του J. Τότε υπάρχει $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ τέτοιο ώστε

$$[f(x_0) - \varepsilon', f(x_0) + \varepsilon'] \subseteq J \tag{3.7.1}$$

Επειδή $J = f(X)$ υπάρχουν $x_1, x_2 \in X$ με

$$f(x_1) = f(x_0) - \varepsilon' \quad \text{και} \quad f(x_2) = f(x_0) + \varepsilon' \tag{3.7.2}$$

Αφού $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$ και η f είναι αύξουσα θα πρέπει $x_1 < x_0 < x_2$. Επιλέγουμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq (x_1, x_2) \tag{3.7.3}$$

Τότε για κάθε $x \in X$ με $|x - x_0| < \delta$ έχουμε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) &\overset{(3.7.3)}{\Rightarrow} x_1 < x < x_2 \\ &\Rightarrow f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \\ &\overset{(3.7.2)}{\Rightarrow} f(x_0) - \varepsilon' \leq f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon' \\ &\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon' < \varepsilon \end{aligned}$$

Αν το $f(x_0)$ είναι άκρο του J η απόδειξη είναι παρόμοια. Π.χ. αν είναι άνω άκρο τότε επιλέγουμε $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ με $[f(x_0) - \varepsilon', f(x_0)] \subseteq J$ και εργαζόμαστε ομοίως. Αντίστοιχα αν το $f(x_0)$ είναι κάτω άκρο του J. □

Παρατήρηση 3.7.2. Το Θεώρημα 3.7.1 δίνει μια ικανή συνθήκη για την συνέχεια μιας μονότονης συνάρτησης. Η συνθήκη αυτή δεν είναι απαραίτητα αναγκαία αν η f δεν ορίζεται σε διάστημα. Για παράδειγμα η συνάρτηση $f : (0,1) \cup (1,2) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \in (0,1) \\ 2 & \text{αν } x \in (1,2) \end{cases}$ είναι αύξουσα και συνεχής αλλά το πεδίο τιμών της είναι το διστύλο $\{1, 2\}$.

Ως άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 3.7.1 και του Θεωρήματος των Ενδιάμεσων Τιμών έχουμε το επόμενο Κριτήριο Συνέχειας για μονότονες συναρτήσεις που ορίζονται σε διαστήματα του $\mathbb{R}$.

Θεώρημα 3.7.3. *Έστω I διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f : I \to \mathbb{R}$ μονότονη. Τότε η f είναι συνεχής αν και μόνο αν το $f(I)$ είναι διάστημα.*

Απόδειξη. Αν η f είναι συνεχής τότε από το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών η f μεταφέρει διαστήματα σε διαστήματα και άρα το $f(I)$ είναι διάστημα. Αντίστροφα, αν το $f(I)$ είναι διάστημα τότε από το Θεώρημα 3.7.1 έχουμε ότι η f είναι συνεχής. □

Το Θεώρημα 3.7.1 έχει και κάποιες συνέπειες σχετικά με την συνέχεια της αντίστροφης συνάρτησης.

Θεώρημα 3.7.4. *Έστω I διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής και $1-1$. Τότε η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 3.6.1 η f είναι γνησίως μονότονη. Άρα και η αντίστροφη $f^{-1} : f(I) \to I$ θα είναι γνησίως μονότονη. Επειδή το σύνολο τιμών της αντίστροφης είναι το I που είναι διάστημα του $\mathbb{R}$ από το Θεώρημα 3.7.1 η f^{-1} είναι συνεχής. □

3.8 Ομοιόμορφη συνέχεια

Ο ορισμός της συνέχειας μιας συνάρτησης $f : X \to \mathbb{R}$ σε ένα σημείο $x_0 \in X$ λέει ότι η f είναι συνεχής αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $x \in X$ με $|x - x_0| < \delta$ έχουμε ότι $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Αν η f είναι συνεχής σε διάφορα σημεία $x_0 \in X$ τότε ο θετικός αριθμός δ γενικά θα εξαρτάται μόνο από το ε αλλά και από το σημείο $x_0 \in X$, δηλαδή θα είναι στην ουσία μια συνάρτηση δύο μεταβλητών $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$. Στην περίπτωση όπου η f είναι συνεχής και το δ δεν εξαρτάται από τα σημεία $x_0 \in X$ έχουμε μια ισχυρότερη έννοια που καλείται *ομοιόμορφη συνέχεια*. Ο ακριβής ορισμός είναι ο εξής.

Ορισμός 3.8.1. *Έστω $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}$ και $f : X \to \mathbb{R}$. Η f θα καλείται **ομοιόμορφα συνεχής** αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο για κάθε $x, y \in X$ με $|x - y| < \delta$ ισχύει ότι $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.*

Παράδειγμα 3.8.2. Η συνάρτηση $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. Πράγματι για κάθε $\varepsilon > 0$ το $\delta = \varepsilon$ ικανοποιεί τον Ορισμό 3.8.1.

Πρόταση 3.8.3. *Έστω $f : X \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής τότε είναι συνεχής.*

Απόδειξη. Έστω $x_0 \in X$ και έστω $\varepsilon > 0$. Από τον Ορισμό 3.8.1 υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $x \in X$ με $|x - x_0| < \delta$ τότε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Άρα η f είναι συνεχής στο x_0. □

Όπως θα δούμε παρακάτω το αντίστροφο της Πρότασης 3.8.3 δεν ισχύει, δηλαδή δεν είναι κάθε συνεχής και ομοιόμορφα συνεχής.

Το επόμενο θεώρημα συνδέει τις ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις με τις ακολουθίες και είναι μια αντίστοιχη Αρχή Μεταφοράς για ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις.

Θεώρημα 3.8.4. *Έστω $f : X \to \mathbb{R}$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα.*

(α) Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(β) Για κάθε ζεύγος (x_n), (y_n) ακολουθιών στο X με $|x_n - y_n| \to 0$ ισχύει ότι $|f(x_n) - f(y_n)| \to 0$.

Απόδειξη. (α) $\Rightarrow$ (β): Έστω ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής και έστω (x_n), (y_n) ακολουθίες στο X με $|x_n - y_n| \to 0$. Θα δείξουμε ότι $|f(x_n) - f(y_n)| \to 0$. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $x, y \in X$ και $|x - y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Επειδή $|x_n - y_n| \to 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $|x_n - y_n| < \delta$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα για κάθε $n \geq n_0$ θα έχουμε $|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$. Συνεπώς για κάθε $\varepsilon > 0$ βρήκαμε $n_0 \in \mathbb{N}$ με $|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$. Αυτό σημαίνει ότι $|f(x_n) - f(y_n)| \to 0$.

(β) $\Rightarrow$ (α): Έστω ότι για κάθε ζεύγος (x_n), (y_n) ακολουθιών στο X με $|x_n - y_n| \to 0$ ισχύει ότι $|f(x_n) - f(y_n)| \to 0$. Έστω ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Συνεπώς υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε για οποιοδήποτε $\delta > 0$ θα μπορούσαμε να βρούμε $x, y \in X$ με $|x - y| < \delta$ αλλά $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$. Άρα για οποιοδήποτε $n \in \mathbb{N}$ και για $\delta = \frac{1}{n}$ θα υπάρχουν $x_n, y_n \in X$ με $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ και $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Αλλά τότε για τις ακολουθίες (x_n) και (y_n) έχουμε $|x_n - y_n| \to 0$ αλλά $|f(x_n) - f(y_n)| \nrightarrow 0$, άτοπο. □

Το Θεώρημα 3.8.4 χρησιμοποιείται πολλές φορές και για να δείξουμε ότι μια συνάρτηση δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Πράγματι από το Θεώρημα 3.8.4 έπεται ότι μια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής αν και μόνο αν υπάρχουν δύο ακολουθίες (x_n) και (y_n) στο X με $|x_n - y_n| \to 0$ αλλά $|f(x_n) - f(y_n)| \nrightarrow 0$.

Παράδειγμα 3.8.5. Η συνάρτηση $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής αλλά δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Πράγματι, έστω

$$x_n = n + \frac{1}{n} \quad \text{και} \quad y_n = n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε $|x_n - y_n| = \dfrac{1}{n} \to 0$ αλλά

$$f(x_n) - f(y_n)| = |\left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - n^2| = 2 + \frac{1}{n^2} \to 2$$

Θεώρημα 3.8.6. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Απόδειξη. Έστω ότι η f δεν ήταν ομοιόμορφα συνεχής. Τότε, όπως είδαμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.8.4, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα $\varepsilon > 0$ και δύο ακολουθίες (x_n), (y_n) στο $[a, b]$ με $|x_n - y_n| \to 0$ αλλά $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Από το Θεώρημα Bolzano–Weirstrass, η (x_n), ως φραγμένη ακολουθία, θα έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία (x_{k_n}) και επειδή $a \leq x_{k_n} \leq b$ θα πρέπει και $a \leq \lim x_{k_n} \leq b$. Άρα το όριο της (x_{k_n}) είναι ένα σημείο $x_0 \in [a, b]$. Επειδή $|x_n - y_n| \to 0$ έπεται ότι $x_{k_n} - y_{k_n} \to 0$ και άρα και η αντίστοιχη υπακολουθία (y_{k_n}) της (y_n) συγκλίνει στο x_0. Άρα οι ακολουθίες (x_{k_n}) και (y_{k_n}) περιέχονται στο $[a, b]$ και συγκλίνουν στο ίδιο όριο $x_0 \in [a, b]$. Η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και συνεπώς από την Αρχή Μεταφοράς, οι ακολουθίες $(f(x_{k_n})$ και $(f(y_{k_n})$ συγκλίνουν στο $f(x_0)$. Αλλά τότε $f(x_{k_n}) - f(y_{k_n}) \to 0$ το οποίο είναι αδύνατον να συμβαίνει αφού $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. □

Αν $f : X \to \mathbb{R}$ και $\emptyset \neq Y \subseteq X$ η συνάρτηση $g : Y \to \mathbb{R}$ όπου $g(y) = f(y)$ για κάθε $y \in Y$ καλείται *ο περιορισμός της f στο Y* και συμβολίζεται με $f|_Y$. Είναι εύκολο να δούμε ότι αν μια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής ή ομοιόμορφα συνεχής τότε και κάθε περιορισμός της είναι συνεχής ή αντίστοιχα ομοιόμορφα συνεχής. Από το Παράδειγμα 3.8.5 έχουμε ότι η συνεχής συνάρτηση $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Παρόλα αυτά το Θεώρημα 3.8.6 λέει ότι ο περιορισμός της f σε οποιοδήποτε κλειστό και φραγμένο διάστημα είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Γενικά έχουμε το παρακάτω πόρισμα του Θεωρήματος 3.8.6.

Πόρισμα 3.8.7. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και έστω $X \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και φραγμένο. Τότε η $f|_X$ είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση.*

Απόδειξη. Έστω $a \leq x \leq b$ για κάθε $x \in X$. Από το Θεώρημα 3.8.6 ο περιορισμός της f στο $[a, b]$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. Περιορίζοντας ακόμη μια φορά στο $X \subseteq [a, b]$ παίρνουμε ότι η $f|X$ ως περιορισμός ομοιόμορφα συνεχούς είναι ομοιόμορφα συνεχής. □

Παρατήρηση 3.8.8. Γενικά δεν ισχύει ότι κάθε συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε ένα φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι και ομοιόμορφα συνεχής. Για παράδειγμα η συνάρτηση $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \dfrac{1}{x}$ για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι συνεχής αλλά δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Πράγματι, αν $x_n = \dfrac{1}{n}$ και $y_n = \dfrac{2}{n}$ τότε $|x_n - y_n| = \dfrac{1}{n} \to 0$ αλλά $|f(x_n) - f(y_n)| = \dfrac{n}{2} \to +\infty$.

3.9 Σημεία Συσσώρευσης και Όρια συναρτήσεων

*Στα επόμενα με X θα συμβολίζουμε ένα **μη κενό υποσύνολο του** $\mathbb{R}$. Επίσης για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ με $X \setminus \{x_0\}$ θα συμβολίζουμε το σύνολο όλων των $x \in X$ με $x \neq x_0$. Παρατηρείστε ότι αν $x_0 \notin X$ τότε $X \setminus \{x_0\} = X$.*

3.9.1 Όριο συνάρτησης σε πραγματικό αριθμό

Ορισμός 3.9.1. *(**Σημείο συσσώρευσης**) Ένα σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ καλείται σημείο συσσώρευσης του X αν για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x \in X \setminus \{x_0\}$ τέτοιο ώστε $|x - x_0| < \delta$.*

Για παράδειγμα αν $X = (0,1)$ τότε κάθε $x_0 \in [0,1]$ είναι σημείο συσσώρευσης του X.

Πρόταση 3.9.2. *(**Ακολουθιακός χαρακτηρισμός σημείων συσσώρευσης**) Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(α) Το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του X.

(β) Υπάρχει ακολουθία (x_n) στο $X \setminus \{x_0\}$ τέτοια ώστε $x_n \to x_0$.

Απόδειξη. (α) $\Rightarrow$ (β): Έστω ότι το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του X. Από τον Ορισμό 3.9.1 θέτοντας $\delta = 1/n$ έχουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n \in X \setminus \{x_0\}$ με $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$. Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $x_0 - \dfrac{1}{n} < x_n < x_0 + \dfrac{1}{n}$ και συνεπώς από το κριτήριο των Ισοσσυγκλινουσών ακολουθιών η ακολουθία (x_n) που επιλέγεται με αυτόν τον τρόπο συγκλίνει στο x_0.

(β)$\Rightarrow$(α): Έστω ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) στο $X \setminus \{x_0\}$ τέτοια ώστε $x_n \to x_0$. Θα δείξουμε ότι το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του X, δηλαδή ικανοποιεί τον Ορισμό 3.9.1. Πράγματι έστω $\delta > 0$. Αφού $x_n \to x_0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $|x_n - x_0| < \delta$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα για $x = x_{n_0}$ έχουμε $x \in X \setminus \{x_0\}$ και $|x - x_0| < \delta$. □

Ορισμός 3.9.3. *Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ σημείο συσσώρευσης του X, $f : X \to \mathbb{R}$ συνάρτηση και $\ell \in \mathbb{R}$. Θα λέμε ότι **το όριο της f στο x_0 είναι το ℓ** και θα γράφουμε $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in X$ με $0 < |x - x_0| < \delta$ ισχύει ότι $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.*

Ορισμός 3.9.4. *Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ σημείο συσσώρευσης του X και $f : X \to \mathbb{R}$ συνάρτηση.*

*(α) Θα λέμε ότι **το όριο της f στο x_0 είναι το $+\infty$** και θα γράφουμε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ αν για κάθε $N > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in X$ με $0 < |x - x_0| < \delta$ ισχύει ότι $f(x) > N$.*

*(β) Θα λέμε ότι **το όριο της f στο x_0 είναι το $-\infty$** και θα γράφουμε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ αν για κάθε $N > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in X$ με $0 < |x - x_0| < \delta$ ισχύει ότι $f(x) < -N$.*

Για παράδειγμα $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} = +\infty$. Πράγματι για κάθε $M > 0$ μπορούμε να θέσουμε $\delta = \dfrac{1}{M}$.

Το επόμενο θεώρημα είναι το ανάλογο της Αρχής Μεταφοράς για συνεχείς συναρτήσεις (Θεώρημα 3.3.1) και αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο.

Θεώρημα 3.9.5. *(**Αρχή Μεταφοράς για όρια**) Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ σημείο συσσώρευσης του X, $f : X \to \mathbb{R}$ συνάρτηση και $L \in \mathbb{R}$ ή $L = \pm\infty$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(α) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$.

(β) Για κάθε ακολουθία (x_n) στο $X \setminus \{x_0\}$ με $x_n \to x_0$ ισχύει ότι $f(x_n) \to L$.

Πόρισμα 3.9.6. *Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ σημείο συσσώρευσης του X και $f : X \to \mathbb{R}$ συνάρτηση. Αν υπάρχουν δύο ακολουθίες (x_n) και (y_n) στο $X \setminus \{x_0\}$ με $x_n \to x_0$, $y_n \to x_0$ αλλά $\lim_n f(x_n) \neq \lim_n f(y_n)$ τότε το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ δεν υπάρχει.*

Παράδειγμα 3.9.7. Δείξτε ότι το $\lim\limits_{x\to 0}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ δεν υπάρχει.

Απόδειξη. Έστω $x_n = \dfrac{1}{2n\pi}$ και $y_n = \dfrac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε $x_n \to 0$, $y_n \to 0$ αλλά $\cos\left(\frac{1}{x_n}\right) = \cos(2n\pi) = 1$ ενώ $\cos\left(\frac{1}{y_n}\right) = \cos\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς $\lim\limits_{n}\cos\left(\frac{1}{x_n}\right) \neq \lim\limits_{n}\cos\left(\frac{1}{y_n}\right)$ και άρα το $\lim\limits_{x\to 0}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ δεν υπάρχει. □

3.9.2 Όριο συνάρτησης στο άπειρο

Οι Ορισμοί 3.9.3 και 3.9.4 γενικεύονται για μη φραγμένα πεδία ορισμού ως εξής.

Ορισμός 3.9.8. *Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ και $\ell \in \mathbb{R}$.*

*(α) Υποθέτουμε ότι το X δεν είναι άνω φραγμένο. Θα λέμε ότι **το όριο της f στο $+\infty$ είναι το ℓ** και θα γράφουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in X$ με $x > M$ ισχύει ότι $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.*

*(β) Υποθέτουμε ότι το X δεν είναι κάτω φραγμένο. Θα λέμε ότι **το όριο της f στο $-\infty$ είναι το ℓ** και θα γράφουμε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in X$ με $x < -M$ ισχύει ότι $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.*

Ορισμός 3.9.9. *Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$.*

(α) Υποθέτουμε ότι το X δεν είναι άνω φραγμένο.

*(i) Θα λέμε ότι **το όριο της f στο $+\infty$ είναι το $+\infty$** και θα γράφουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ αν για κάθε $N > 0$ υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in X$ με $x > M$ ισχύει ότι $f(x) > N$.*

*(ii) Θα λέμε ότι **το όριο της f στο $+\infty$ είναι το $-\infty$** και θα γράφουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ αν για κάθε $N > 0$ υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in X$ με $x > M$ ισχύει ότι $f(x) < -N$.*

(β) Υποθέτουμε ότι το X δεν είναι κάτω φραγμένο.

*(i) Θα λέμε ότι **το όριο της f στο $-\infty$ είναι το $+\infty$** και θα γράφουμε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ αν για κάθε $N > 0$ υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in X$ με $x < -M$ ισχύει ότι $f(x) > N$.*

*(ii) Θα λέμε ότι **το όριο της f στο $-\infty$ είναι το $-\infty$** και θα γράφουμε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ αν για κάθε $N > 0$ υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in X$ με $x < -M$ ισχύει ότι $f(x) < -N$.*

Ορισμός 3.9.10. *Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$. Αν το X δεν είναι άνω φραγμένο θα λέμε ότι το $+\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του X. Αντίστοιχα αν το X δεν είναι κάτω φραγμένο θα λέμε ότι το $-\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του X.*

Το Θεώρημα 3.9.5 γενικεύεται τώρα ως εξής.

Θεώρημα 3.9.11. ***(Γενική Αρχή Μεταφοράς για Όρια)*** *Έστω x_0 (πεπερασμένο ή άπειρο) σημείο συσσώρευσης του X, $f : X \to \mathbb{R}$ συνάρτηση και $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(α) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$.

(β) Για κάθε ακολουθία (x_n) στο $X \setminus \{x_0\}$ με $x_n \to x_0$ ισχύει ότι $f(x_n) \to L$.

Πόρισμα 3.9.12. *Έστω $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ και έστω $y_n = f(n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ (πεπερασμένο ή άπειρο) τότε $\lim_n y_n = L$.*

Απόδειξη. Προκύπτει από το Θεώρημα 3.9.11 για την ακολουθία (x_n) με $x_n = n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. □

3.10 Συνέχεια και Όρια

Στα επόμενα με X θα συμβολίζουμε ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Ορισμός 3.10.1. ***(Απομονωμένα σημεία)*** *Ένα σημείο $x_0 \in X$ θα καλείται απομονωμένο σημείο του X αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in X \setminus \{x_0\}$ ισχύει ότι $|x - x_0| \geq \delta$.*

Συγκρίνοντας τους Ορισμό 3.10.1 με τον Ορισμό 3.9.1 έχουμε την εξής πρόταση.

Πρόταση 3.10.2. *Ένα σημείο $x_0 \in X$ είναι απομονωμένο σημείο του X αν και μόνο αν δεν είναι σημείο συσσώρευσης του X.*

Παράδειγμα 3.10.3. Το $\mathbb{N}$ ή το $\mathbb{Z}$ αποτελούνται από απομονωμένα σημεία. Πράγματι ο Ορισμός 3.10.1 ικανοποιείται για $X = \mathbb{N}$ ή $X = \mathbb{Z}$ για $\delta = 1$.

Πρόταση 3.10.4. *Έστω $f : X \to \mathbb{R}$.*

(α) Αν το x_0 είναι απομονωμένο σημείο του X τότε η f είναι συνεχής στο x_0.

(β) Αν το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του X τότε η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Απόδειξη. (α) Έστω x_0 είναι απομονωμένο σημείο του X. Τότε κατά τετριμμένο τρόπο ικανοποιείται ο ορισμός της συνέχειας στο x_0. Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$. Έστω $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|x - x_0| \geq \delta$ για κάθε $x \in X \setminus \{x_0\}$. Τότε για κάθε $x \in X$ με $|x - x_0| < \delta$ ισχύει ότι $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ αφού το μοναδικό σημείο του X που απέχει από το x_0 απόσταση γνήσια μικρότερη του δ είναι μόνο το $x = x_0$.

(β) Έστω $x_0 \in X$ σημείο συσσώρευσης του X. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\text{η } f \text{ είναι συνεχής στο } x_0 &\Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in X)\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \delta \\
&\Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in X)\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \delta \\
&\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)
\end{aligned}$$

□

Πόρισμα 3.10.5. *Κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής.*

Απόδειξη. Έστω $x_0 \in \mathbb{Z}$. Όπως παρατηρήσαμε στο Παράδειγμα 3.10.3 το x_0 είναι απομονωμένο σημείο του $\mathbb{Z}$. Από την Πρόταση 3.10.4 έχουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0. □

3.11 Πλευρικά όρια

Ορισμός 3.11.1. *Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$ και $x_0 \in \mathbb{R}$.*

*(α) Το x_0 θα καλείται **δεξιό σημείο συσσώρευσης του** X αν για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x \in X \setminus \{x_0\}$ τέτοιο ώστε $x > x_0$ και $x_0 < x < x_0 + \delta$.*

(β) Το x_0 θα καλείται ***αριστερό σημείο συσσώρευσης του*** *X αν για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x \in X \setminus \{x_0\}$ τέτοιο ώστε $x_0 - \delta < x < x_0$.*

(γ) Το x_0 θα καλείται ***αμφίπλευρο σημείο συσσώρευσης του*** *X αν είναι και δεξί και αριστερό σημείο συσσώρευσης του X.*

Παράδειγμα 3.11.2. Αν $X = (a, b)$ τότε το σημείο $x_0 = a$ είναι δεξιό σημείο συσσώρευσης του X το $x_0 = b$ είναι αριστερό και κάθε $x_0 \in (a, b)$ είναι αμφίπλευρο.

Είναι εύκολο να δούμε ότι κάθε σημείο συσσώρευσης ενός υποσυνόλου του $\mathbb{R}$ είναι είτε δεξιό είτε αριστερό είτε αμφίπλευρο.

Ορισμός 3.11.3. *(Πεπερασμένα Πλευρικά Όρια) Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό, $f : X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ σημείο συσσώρευσης και $\ell \in \mathbb{R}$.*

(α) Έστω ότι το x_0 είναι δεξιό σημείο συσσώρευσης του X. Λέμε ότι το ***δεξιό όριο της*** *f* ***στο*** *x_0 είναι το ℓ και γράφουμε $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in X$ με $x_0 < x < x_0 + \delta$ ισχύει ότι $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.*

(β) Έστω ότι το x_0 είναι αριστερό σημείο συσσώρευσης του X. Λέμε ότι το ***αριστερό όριο της*** *f* ***στο*** *x_0 είναι το ℓ και γράφουμε $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in X$ με $x_0 - \delta < x < x_0$ ισχύει ότι $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.*

Ορισμός 3.11.4. *(Άπειρα Πλευρικά Όρια) Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό, $f : X \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in \mathbb{R}$ σημείο συσσώρευσης.*

(α) Έστω ότι το x_0 είναι δεξιό σημείο συσσώρευσης του X.

(α1) Λέμε ότι το δεξιό όριο της f στο x_0 είναι το $+\infty$ και γράφουμε $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ αν για κάθε $N > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in X$ με $x_0 < x < x_0 + \delta$ ισχύει ότι $f(x) > N$.

(α2) Λέμε ότι το δεξιό όριο της f στο x_0 είναι το $-\infty$ και γράφουμε $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$ αν για κάθε $N > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in X$ με $x_0 < x < x_0 + \delta$ ισχύει ότι $f(x) < -N$.

(β) Έστω ότι το x_0 είναι αριστερό σημείο συσσώρευσης του X.

(β1) Λέμε ότι το αριστερό όριο της f στο x_0 είναι το $+\infty$ και γράφουμε $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ αν για κάθε $N > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in X$ με $x_0 - \delta < x < x_0$ ισχύει ότι $f(x) > N$.

(β2) Λέμε ότι το αριστερό όριο της f στο x_0 είναι το $-\infty$ και γράφουμε $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$ αν για κάθε $N > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in X$ με $x_0 - \delta < x < x_0$ ισχύει ότι $f(x) < -N$.

Η επόμενη πρόταση αποδεικνύεται άμεσα από τους ορισμούς

Πρόταση 3.11.5. *Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in \mathbb{R}$ σημείο συσσώρευσης του X και $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.*

(α) Αν το x_0 είναι δεξιό σημείο συσσώρευσης αλλά δεν είναι αριστερό τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ αν και μόνο αν $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$.

(β) Αν το x_0 είναι αριστερό σημείο συσσώρευσης αλλά δεν είναι δεξιό τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ αν και μόνο αν $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$.

(γ) *Αν το* x_0 *είναι αμφίπλευρο σημείο συσσώρευσης τότε* $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ *αν και μόνο αν* $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$.

Πόρισμα 3.11.6. *Έστω* $f : X \to \mathbb{R}$ *και* $x_0 \in \mathbb{R}$ *αμφίπλευρο σημείο συσσώρευσης του* X. *Το* $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *δεν υπάρχει αν και μόνο αν είτε (1) και τα δύο πλευρικά όρια υπάρχουν αλλά είναι διαφορετικά μεταξύ τους, είτε (2) ένα τουλάχιστον από τα πλευρικά όρια δεν υπάρχει.*

Ορισμός 3.11.7. *(Είδη ασυνεχειών) Έστω* $f : X \to \mathbb{R}$ *και έστω* $x_0 \in X$ *σημείο ασυνέχειας της* f.

(i) *Θα λέμε ότι η* f *παρουσιάζει στο* x_0 *ασυνέχεια α΄* ***είδους*** *αν υπάρχει το* $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *αλλά* $f(x_0) \neq \lim_{x\to x_0} f(x)$.

(ii) *Θα λέμε ότι η* f *παρουσιάζει στο* x_0 *ασυνέχεια β΄* ***είδους*** *αν και τα δύο πλευρικά όρια* $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ *και* $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ *υπάρχουν αλλά είναι διαφορετικά μεταξύ τους.*

(iii) *Θα λέμε ότι η* f *παρουσιάζει στο* x_0 *ασυνέχεια γ΄* ***είδους*** *αν ένα τουλάχιστον από τα πλευρικά όρια* $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$, $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ *δεν υπάρχει.*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Παράγωγος

4.1 Ορισμός και βασικές ιδιότητες

Ορισμός 4.1.1. *Έστω I διάστημα του $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in I$. Το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ αν υπάρχει (πεπερασμένο ή άπειρο) θα καλείται* ***παράγωγος*** *f στο x_0 και θα συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Η συνάρτηση f θα καλείται* ***παραγωγίσιμη*** *στο x_0 αν η παράγωγος $f'(x_0)$ της f στο x_0 υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.*

Θεώρημα 4.1.2. *Αν η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in I$ τότε είναι και συνεχής στο x_0.*

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0)) &= \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right)\\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0) = f'(x_0)\cdot 0 = 0\end{aligned}$$

□

Παρατήρηση 4.1.3. Το αντίστροφο του Θεωρήματος 4.1.2 δεν ισχύει. Π.χ. η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι συνεχής αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$. Πράγματι, το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ δεν υπάρχει αφού

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x} = 1$$

ενώ

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x} = -1$$

Θεώρημα 4.1.4. ***(Πράξεις και Παράγωγος)*** *Έστω I διάστημα του $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ και $f, g : I \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες στο $x_0 \in I$.*

(α) Η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει ότι

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

(β) Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση λf είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει ότι

$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$$

(γ) Η συνάρτηση fg είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει ότι

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

(δ) Αν $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$ και $g'(x_0) \neq 0$ τότε η συνάρτηση $\dfrac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει ότι

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

4.2 Κανόνας Αλυσίδας

Θεώρημα 4.2.1. *Έστω I, J διαστήματα του $\mathbb{R}$, $g : J \to I$ και $f : I \to \mathbb{R}$. Έστω $x_0 \in J$. Αν η g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$ τότε η $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει ότι $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$.*

Απόδειξη. Ορίζουμε την συνάρτηση $\varphi : J \to \mathbb{R}$ όπου

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} & \text{αν } x \neq x_0 \\ g'(x_0) & \text{αν } x = x_0 \end{cases}$$

Ομοίως θέτουμε $y_0 = g(x_0)$ και ορίζουμε την συνάρτηση $\psi : I \to \mathbb{R}$ όπου

$$\psi(y) = \begin{cases} \frac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0} & \text{αν } y \neq y_0 \\ g'(y_0) & \text{αν } y = y_0 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in I$,

$$g(x) - g(x_0) = \varphi(x)(x - x_0)$$

Επιπλέον η φ είναι συνεχής στο x_0 αφού

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0) = \varphi(x_0)$$

Αντίστοιχα, για κάθε $y \in J$,

$$f(y) - f(y_0) = \psi(y)(y - y_0)$$

και η ψ είναι συνεχής στο $y_0 = g(x_0)$, αφού

$$\lim_{y \to y_0} \psi(y) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} = f'(y_0) = \psi(y_0)$$

Επειδή και η g είναι συνεχής στο x_0 έπεται ότι και η σύνθεση $\psi \circ g$ θα είναι συνεχής στο x_0 δηλαδή

$$\lim_{x \to x_0} \psi(g(x)) = \psi(g(x_0)) = f'(g(x_0))$$

Συνεπώς, για κάθε $x \in I$,

$$\begin{aligned} f(g(x)) - f(g(x_0)) &= \psi(g(x))(g(x) - g(x_0)) \\ &= \psi(g(x))\varphi(x)(x - x_0) \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} (\psi(g(x)) \cdot \varphi(x)) \\ &= \lim_{x \to x_0} \psi(g(x)) \cdot \lim_{x \to x_0} \varphi(x) \\ &= f'(g(x_0))g'(x_0) \end{aligned}$$

□

4.3 Το Θεώρημα των Ενδιαμέσων Τιμών για παραγώγους

Στο Κεφάλαιο 3 είδαμε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα του $\mathbb{R}$ έξει την ιδιότητα των ενδιάμεσων τιμών (Θεώρημα 3.5.4). Το επόμενο θεώρημα λέει ότι η συνάρτηση της παραγώγου μιας σσυνάρτησης έχει πάντα την ιδιότητα των ενδιάμεσων τιμών παρόλο που μπορεί να μην είναι συνεχής.

Θεώρημα 4.3.1. *(Darboux) Έστω I διάστημα του $\mathbb{R}$ και έστω $f : I \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Τότε η f' (ασχέτως αν είναι συνεχής ή όχι) ικανοποιεί την ιδιότητα των Ενδιάμεσων Τιμών, δηλαδή για κάθε $a < b$ στο I με $f'(a) < f'(b)$ (αντ. $f'(a) > f'(b)$) και για κάθε $\lambda \in (f'(a), f'(b))$ (αντ. $\lambda \in (f'(b), f'(a))$) υπάρχει $\xi \in (a, b)$ με $f'(\xi) = \lambda$.*

Απόδειξη. Έστω $a < b$ στο I με $f'(a) < f'(b)$ και έστω $\lambda \in (f'(a), f'(b))$. Ορίζουμε $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) - \lambda x$ για κάθε $x \in [a, b]$. Η g είναι παραγωγίσιμη και ισχύει ότι $g'(x) = f'(x) - \lambda$ για κάθε $x \in [a, b]$. Από την υπόθεση $f'(a) < \lambda < f'(b)$ έχουμε $g'(a) < 0 < g'(b)$ και άρα αρκεί να βρούμε $\xi \in (a, b)$ με $g'(\xi) = 0$.

Έστω προς απαγωγή σε άτοπο ότι $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$. Τότε από το Θεώρημα Rolle έπεται ότι η g είναι 1-1 και άρα ως συνεχής σε διάστημα του $\mathbb{R}$ είτε είναι γνησίως αύξουσα είτε είναι γνησίως φθίνουσα (Θεώρημα 3.6.1). Αν ήταν γνησίως αύξουσα τότε για κάθε $x \in (a, b)$ θα είχαμε $g(a) < g(x)$ και άρα

$$\frac{g(x) - g(a)}{x - a} > 0 \Rightarrow g'(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \geq 0$$

άτοπο. Αντίστοιχα αν η g ήταν γνησίως φθίνουσα τότε για κάθε $x \in (a, b)$, θα είχαμε $g(x) > g(b)$ και άρα

$$\frac{g(x) - g(b)}{x - b} < 0 \Rightarrow g'(b) = \lim_{x \to b^-} \frac{g(x) - g(b)}{x - b} \leq 0$$

και πάλι άτοπο.

Καταλήξαμε σε άτοπο επειδή υποθέσαμε ότι $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$. Άρα η υπόθεση αυτή είναι λανθασμένη και συνεπώς υπάρχει $\xi \in (a, b)$ με $g'(\xi) = 0$ ή ισοδύναμα $f'(\xi) = \lambda$. □

4.4 Παράγωγος Αντίστροφης Συνάρτησης

Θεώρημα 4.4.1. *Έστω I διάστημα του $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής και $1-1$. Έστω $x_0 \in I$ τέτοιο ώστε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $f'(x_0) \neq 0$. Τότε η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $y_0 = f(x_0)$ και ισχύει ότι*

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Απόδειξη. Η $f^{-1} : J \to I$ είναι συνεχής, όπου $J = f(I)$ (Θεώρημα 3.7.4). Έστω (y_n) ακολουθία στο $J \setminus \{y_0\}$ με $y_n \to y_0$. Έστω επίσης (x_n) η ακολουθία στο $I \setminus \{x_0\}$ με $x_n = f^{-1}(y_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή η f^{-1} είναι συνεχής, από Αρχή Μεταφοράς για συνεχείς συναρτήσεις έπεται ότι $x_n \to x_0$. Άρα, από Αρχή Μεταφοράς για όρια (Θεώρημα 3.9.5) έχουμε ότι

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

και συνεπώς,

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}{y_n - y_0} = \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}} \to \frac{1}{f'(x_0)}$$

Άρα για οποιαδήποτε ακολουθία (y_n) στο $J \setminus \{y_0\}$ με $y_n \to y_0$ ισχύει ότι $\dfrac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}{y_n - y_0} \to \dfrac{1}{f'(x_0)}$. Πάλι τώρα από την Αρχή Μεταφοράς για όρια έχουμε $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \lim\limits_{y\to y_0} \dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \dfrac{1}{f'(x_0)}$. □

4.5 Το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού

Το Θεώρημα Μέσης Τιμής είναι ένα από τα βασικότερα θεωρήματα στην Ανάλυση. Στηρίζεται στο παρακάτω αποτέλεσμα γνωστό και ως *Θεώρημα Fermat*.

Θεώρημα 4.5.1. *(Fermat) Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in I$ εσωτερικό σημείο του I το οποίο είναι τοπικό ακρότατο της f. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε $f'(x_0) = 0$.*

Απόδειξη. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του I μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πλευρικά όρια για την παράγωγο. Συγκεκριμμένα, αφού το όριο $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ υπάρχει θα υπάρχουν και τα πλευρικά όρια $\lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και $\lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και θα είναι ίσα με την $f'(x_0)$. Ας υποθέσουμε ότι το x_0 είναι τοπικό μέγιστο, δηλαδή υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in I$ με $|x - x_0| < \delta$ ισχύει ότι $f(x_0) \geq f(x)$. μπορούμε να υποθέσουμε μικραίνοντας το δ αν χρειάζεται ότι το διάστημα $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ περιέχεται όλο στο I. Ειδικότερα, για $x \in X$ με $0 < x < x_0 + \delta$ θα έχουμε ότι $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ και άρα

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Από την άλλη μεριά, για $x \in I$ με $x_0 - \delta < x < x_0$ θα έχουμε ότι $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ οπότε

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Από τα παραπάνω έπεται ότι $f'(x_0) = 0$. □

Θεώρημα 4.5.2. ***(Θεώρημα Rolle)*** *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b). Αν $f(a) = f(b)$ τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ με $f'(\xi) = 0$.*

Απόδειξη. Η f ως συνεχής σε κλειστό φραγμένο διάστημα λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Έστω $M = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$ και $m = \min\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1) $M = m$. Τότε, αφού $m \leq f(x) \leq M$ έπεται ότι η f είναι σταθερή και άρα $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (a, b)$.

2) $M > m$. Τότε αφού $f(a) = f(b)$ μια τουλάχιστον από τις ακρότατες τιμές M, m θα λαμβάνεται από την f σε κάποιο σημείο $\xi \in [a, b]$ με $\xi \neq a$ και $\xi \neq b$. Άρα υπάρχει $\xi \in (a, b)$ που είναι ολικό (άρα και τοπικό) ακρότατο της f, οπότε από το Θεώρημα 4.5.1, $f'(\xi) = 0$. □

Πόρισμα 4.5.3. *Έστω I διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του I. Αν $f'(x) \neq 0$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του I τότε η f είναι γνησίως μονότονη.*

Απόδειξη. Έστω $a < b$ στο I. Είναι $[a, b] \subseteq I$ και άρα η f είναι συνεχής στο $[a, b]$. Ομοίως είναι εύκολο να δούμε ότι το (a, b) περιέχεται στο εσωτερικό του I και άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο (a, b). Αν $f(a) = f(b)$ τότε από το Θεώρημα Rolle θα υπήρχε $\xi \in (a, b)$ με $f'(\xi) = 0$ άτοπο. Άρα η f είναι $1-1$ στο I. Από το Θεώρημα 3.6.1 η f είναι γνησίως μονότονη. □

Θεώρημα 4.5.4. ***(Θεώρημα Μέσης Τιμής)*** *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b). Τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Απόδειξη. Έστω $\lambda = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Ορίζουμε την συνάρτηση $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = f(x) - f(a) - \lambda(x - a)$, για κάθε $x \in [a, b]$. Η g είναι συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b) (με $g'(x) = f'(x) - \lambda$ για κάθε $x \in (a, b)$). Επειδή $g(a) = 0 = g(b)$ από το Θεώρημα Rolle έπεται ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ με $g'(\xi) = 0$. Επειδή $g'(\xi) = f'(\xi) - \lambda$ έπεται ότι $f'(\xi) = \lambda = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. □

Πόρισμα 4.5.5. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b). Τότε η f είναι αύξουσα (αντίστοιχα φθίνουσα) αν και μόνο αν $f'(x) \geq 0$ (αντ. $f'(x) \leq 0$) για κάθε $x \in (a, b)$.*

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι αύξουσα (αν f φθίνουσα εργαζόμαστε ομοίως). Έστω $x \in (a, b)$. Τότε για κάθε $h \in \mathbb{R}$ με $x + h \in [a, b]$ έχουμε, $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0$ και συνεπώς, $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0$. Αντίστροφα, έστω ότι $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$ και έστω $a \leq x_1 < x_2 \leq b$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής έπεται ότι υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ με $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) \geq 0$ και άρα $f(x_1) \leq f(x_2)$. □

Πόρισμα 4.5.6. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b). Αν η f' είναι φραγμένη τότε η f είναι συνάρτηση Lipschitz. Ειδικότερα, αν $|f'(x)| \leq K$ για κάθε $x \in (a, b)$ τότε*

$$|f(y) - f(x)| \leq K|y - x|$$

για κάθε $x, y \in [a, b]$.

Απόδειξη. Έστω $x, y \in [a, b]$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $x < y$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει $\xi \in (x, y)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\xi) \Rightarrow |f(y) - f(x)| = |f'(\xi)| \cdot |y - x| \leq K|y - x|$$

□

4.6 Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy

Μια γενίκευση του Θεωρήματος Μέσης Τιμής είναι το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 4.6.1. *Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμες στο (a, b). Αν $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$ τότε $g(b) \neq g(a)$ και υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε*

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Απόδειξη. Έχουμε ότι $g(a) \neq g(b)$ διότι διαφορετικά από Θεώρημα Rolle θα υπήρχε $\xi \in (a, b)$ με $g'(\xi) = 0$, άτοπο. Θέτουμε $\lambda = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ και ορίζουμε την συνάρτηση $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ με τύπο $h(x) = f(x) - f(a) - \lambda(g(x) - g(a))$, για κάθε $x \in [a, b]$. Έχουμε ότι η h είναι συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b) με $h'(x) = f'(x) - \lambda g'(x)$ για κάθε $x \in (a, b)$. Επειδή $h(a) = 0 = h(b)$ από το Θεώρημα Rolle έπεται ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ με $h'(\xi) = 0$. Επειδή $h'(\xi) = f'(\xi) - \lambda g'(\xi)$ έπεται ότι $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lambda = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$. □

Παρατήρηση 4.6.2. Παρατηρείστε ότι το Θεώρημα 4.6.1 δίνει το κλασικό Θεώρηαμ Μέσης Τιμής για $g(x) = x$. Επίσης σημειώνουμε εδώ ότι γενικά δεν ισχύει ότι για δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ υπάρχει κοινό $\xi \in (a, b)$ με $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$ και $g(b) - g(a) = g'(\xi)(b - a)$. Π.χ. αν $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ και $g(x) = x^3$ τότε $f(1) - f(0) = 1 = 2\xi \Rightarrow \xi = 1/2$ ενώ $g(1) - g(0) = 1 = 3\xi^2 \Rightarrow \xi = 1/\sqrt{3}$. Παρόλα αυτά, το Θεώρημα 4.6.1 λέει ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{f(1) - f(0)}{g(1) - g(0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \Leftrightarrow 1 = \frac{2\xi}{3\xi^2} \Leftrightarrow \xi = \frac{2}{3}$$

4.7 Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

4.7.1 Η συνάρτηση τόξο εφαπτομένης

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \tan x, \text{ για κάθε } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

. Ισχύει ότι

$$f'(x) = f^2(x) + 1$$

για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Πράγματι, έστω $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Έχουμε $f'(x) = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{(\sin x)' \cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x + 1 = f^2(x) + 1$.

Επίσης η f είναι γνησίως αύξουσα και επί. Πράγματι, $f'(x) = f^2(x) + 1 > 0$ και άρα η f είναι γνησίως αύξουσα. Επίσης, $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty$ και $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} \tan x = -\infty$. Άρα η f λαμβάνει απεριόριστα

μεγάλες κατά μέτρο θετικές και αρνητικές τιμές. Άρα για κάθε $y \in \mathbb{R}$ μπορούμε να βρούμε $f(x_1) < 0$ και $f(x_2) > 0$ με $f(x_1) < y < f(x_2)$. Επειδή τώρα η f είναι συνεχής, από το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών υπάρχει x μεταξύ των x_1 και x_2 με $f(x) = y$.

Η $f^{-1}(x)$ συμβολίζεται με $\arctan x$. Παρατηρείστε ότι η $\arctan x$ είναι μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση από όλο το $\mathbb{R}$ επί του ανοικτού φραγμένου διαστήματος $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Η συνάρτηση $\arccos x$ αντιστοιχεί σε κάθε $x \in [-1, 1]$ το μοναδικό $y \in [0, \pi]$ με $\cos y = x$. Πχ. $\arccos 0 = \pi/2$, $\arccos(-1) = \pi$, $\arccos 1 = 0$, $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Πρόταση 4.7.1. *Για κάθε $y \in \mathbb{R}$ ισχύει* $(\arctan y)' = \dfrac{1}{y^2+1}$.

Απόδειξη. Έστω $y \in \mathbb{R}$ και έστω $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $y = f(x) = \tan x$. Έχουμε

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f^2(x)+1} = \frac{1}{y^2+1}$$

□

4.7.2 Η συνάρτηση τόξο συνημιτόνου.

Έστω

$$f(x) = \cos x, \quad x \in [0, \pi]$$

Η f είναι συνεχής, γνησίως φθίνουσα και με σύνολο τιμών το $[-1, 1]$. Άρα ορίζεται η αντίστροφή της που την συμβολίζουμε με $\arccos x$, (διαβάζεται "τόξο συνημιτόνου x"). Η συνάρτηση $\arccos x$ έχει πεδίο ορισμού το $[-1, 1]$, σύνολο τιμών το $[0, \pi]$, είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα.

Η συνάρτηση $\arccos x$ αντιστοιχεί σε κάθε $x \in [-1, 1]$ το μοναδικό $y \in [0, \pi]$ με $\cos y = x$. Πχ. $\arccos 0 = \pi/2$, $\arccos(-1) = \pi$, $\arccos 1 = 0$, $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Πρόταση 4.7.2. *Για κάθε $y \in (-1, 1)$ ισχύει ότι* $(\arccos y)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

Απόδειξη. Έστω $y \in (-1, 1)$ και έστω $x \in (0, \pi)$ με $y = f(x) = \cos x$. Έχουμε $-1 < \sin x < 0$ οπότε

$$f'(x) = (\cos x)' = \sin x = -\sqrt{1 - \cos^2 x} \neq 0$$

και άρα από το Θεώρημα 4.4.1 παίρνουμε

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

□

4.7.3 Η συνάρτηση τόξο ημιτόνου.

Έστω

$$f(x) = \sin x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Η f είναι συνεχής, γνησίως αύξουσα και με σύνολο τιμών το $[-1,1]$. Άρα ορίζεται η αντίστροφή της που την συμβολίζουμε με $\arcsin x$. Η συνάρτηση $\arcsin x$ έχει πεδίο ορισμού το $[-1,1]$, σύνολο τιμών το $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα.

Η συνάρτηση $\arcsin x$ αντιστοιχεί σε κάθε $x \in [-1,1]$ το μοναδικό τόξο $y \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ με $\sin y = x$. Πχ. $\arcsin 0 = 0$, $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$, $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Πρόταση 4.7.3. *Για κάθε $y \in (-1,1)$ ισχύει ότι* $(\arcsin y)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

Απόδειξη. Έστω $y \in (-1,1)$ και $x \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ με $f(x) = \sin x = y$. Έχουμε $0 < \cos x < 1$ και άρα

$$f'(x) = \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} \neq 0$$

Άρα από το Θεώρημα 4.4.1, παίρνουμε

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

□

4.8 Οι υπερβολικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Στην παράγραφο αυτή θα ορίσουμε τις υπερβολικές συναρτήσεις. Οι συναρτήσεις αυτές καλούνται συνήθως υπερβολικές τριγωνομετρικές διότι μπορούν να ορισθούν μέσω της ισοσκελούς υπερβολής $x^2 - y^2 = 1$ με έναν τρόπο ανάλογο με εκείνον με τον οποίο ορίζονται οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις μέσω του μοναδιαίου κύκλου.

4.8.1 Η συνάρτηση υπερβολικό συνημίτονο.

Η συνάρτηση

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{4.8.1}$$

καλείται *υπερβολικό συνημίτονο* και ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση $\cosh x$ είναι *άρτια* συνάρτηση δηλαδή

$$\cosh(-x) = \cosh x, \ \forall x \in \mathbb{R} \tag{4.8.2}$$

αφού,

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh x$$

Επίσης,

$$\cosh x \geq 1, \ \forall x \in \mathbb{R} \tag{4.8.3}$$

αφού αν θέσουμε $y = e^x$ τότε $y > 0$ και

$$\cosh x = \frac{y + \frac{1}{y}}{2} = \frac{y^2 + 1}{2y} \geq 1 \Leftrightarrow y^2 + 1 \geq 2y \Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (y-1)^2 \geq 0$$

Ακόμη, επειδή ο μέσος όρος δύο πραγματικών αριθμών είναι πάντα μεταξύ των αριθμών αυτών έχουμε ότι

$$e^{-x} < \cosh x < e^x, \ \forall x > 0 \tag{4.8.4}$$

και αντίστοιχα

$$e^x < \cosh x < e^{-x}, \ \forall x < 0 \tag{4.8.5}$$

Επίσης,

$$(\cosh x)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{4.8.6}$$

Παρατηρούμε ότι $(\cosh x)' < 0$ για $x < 0$ και $(\cosh x)' > 0$ για $x > 0$. Άρα η $\cosh x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ με $\cosh(0) = 1$ να είναι η ελάχιστη τιμή της. Επιπλέον είναι εύκολο να δούμε ότι

$$\lim_{x\to-\infty} \cosh x = \lim_{x\to+\infty} \cosh x = +\infty. \tag{4.8.7}$$

και άρα το σύνολο τιμών της $\cosh x$ (δηλαδή το σύνολο $\{\cosh x : x \in \mathbb{R}\}$) είναι το $[1, +\infty)$. Η καμπύλη που σχηματίζει η γραφική παράσταση της $\cosh x$ μοιάζει με παραβολή (δηλαδή σαν αυτήν της συνάρτησης x^2) και καλείται *αλυσσοειδής* γιατί είναι το σχήμα που παίρνει μια αλυσίδα όταν την κρεμάσουμε οριζόντια από τα δύο άκρα της.

4.8.2 Η συνάρτηση υπερβολικό ημίτονο.

Η συνάρτηση

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{4.8.8}$$

καλείται *υπερβολικό ημίτονο* και ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση $\sinh x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι *περιττή* συνάρτηση δηλαδή

$$\sinh(-x) = -\sinh x \tag{4.8.9}$$

Έχουμε

$$(\sinh x)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x \tag{4.8.10}$$

και άρα η $\sinh x$ είναι γνησίως αύξουσα. Επειδή επιπλέον

$$\lim_{x\to-\infty} \sinh x = -\infty \text{ και } \lim_{x\to+\infty} \sinh x = +\infty \tag{4.8.11}$$

το σύνολο τιμών της είναι όλο το $\mathbb{R}$. Η γραφική της παράσταση μοιάζει με της συνάρτησης $f(x) = x^3$.

Παρατηρείστε ότι από την (4.8.6) έχουμε

$$(\cosh x)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x \tag{4.8.12}$$

Επίσης είναι εύκολο να επαληθεύσουμε με πράξεις την εξής ταυτότητα

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \ \forall x \in \mathbb{R} \tag{4.8.13}$$

και άρα αφού $\cosh x > 0$,

$$\cosh x = \sqrt{1 + \sinh^2 x} \tag{4.8.14}$$

Παρατήρηση 4.8.1. Η (4.8.13), δείχνει την σχέση των συναρτήσεων $\cosh x$ και $\sinh x$ με την ισοσκελή υπερβολή, δηλαδή την καμπύλη του επιπέδου που αποτελείται από όλα τα σημεία (x, y) που ικανοποιούν την σχέση $x^2 - y^2 = 1$. Πράγματι, αποδεικνύεται ότι ένα σημείο (x, y) του επιπέδου ανήκει στον δεξί κλάδο της ισοσκελούς υπερβολής αν και μόνο αν τα x, y γράφονται υπό την μορφή

$$\begin{cases} x = \cosh t \\ y = \sinh t \end{cases} \tag{4.8.15}$$

όπου το t ισούται με το διπλάσιο εμβαδό του χωρίου που φράσεται από την ακτίνα που ενώνει το κέντρο των αξόνων $O(0, 0)$ με το σημείο (x, y) της υπερβολής, την υπερβολή και τον x-άξονα. Αυτό το γεγονός έρχεται σε αναλογία με τα σημεία (x, y) του μοναδιαίου κύκλου του οποίου τα σημεία δίνονται από τις εξισώσεις

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \tag{4.8.16}$$

4.8.3 Η συνάρτηση υπερβολική εφαπτομένη.

Η συνάρτηση

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \ x \in \mathbb{R} \tag{4.8.17}$$

καλείται *υπερβολική εφαπτομένη*. Η $\tanh x$ είναι περιττή,

$$\tanh(-x) = -\tanh x, \ \forall x \in \mathbb{R} \tag{4.8.18}$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι

$$\begin{aligned} (\tanh x)' = \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)' &= \frac{(\sinh x)' \cosh x - \sinh x (\cosh x)'}{\cosh^2 x} \\ &= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} \\ &= \frac{1}{\cosh^2 x} > 0 \end{aligned} \tag{4.8.19}$$

και άρα η $\tanh x$ είναι γνησίως αύξουσα. Επίσης,

$$\lim_{x\to+\infty} \tanh x = +1 \tag{4.8.20}$$

Πράγματι

$$\lim_{x\to+\infty} \tanh x = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x(1-e^{-2x})}{e^x(1+e^{-2x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 1$$

Παρόμοια, έχουμε

$$\lim_{x\to-\infty} \tanh x = -1 \tag{4.8.21}$$

Με άλλα λόγια οι ευθείες $y = \pm 1$ αποτελούν οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης της $\tanh x$. Η γραφική παράσταση της $\tanh x$ μοιάζει με αυτήν της $\arctan x$.

4.8.4 Αντίστροφες Υπερβολικές Συναρτήσεις

Όπως είδαμε η συνάρτηση $\sinh x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μια γνησίως αύξουσα και άρα αντιστρέψιμη συνάρτηση. Η αντίστροφή της συμβολίζεται με $\sinh^{-1} x$.

Πρόταση 4.8.2. *Η αντίστροφη της συνάρτησης* $\sinh x$ *δίνεται από τον τύπο*

$$\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \ \forall x \in \mathbb{R} \tag{4.8.22}$$

Η συνάρτηση $\sinh^{-1} x$, $x \in \mathbb{R}$ *είναι παραγωγίσιμη και ισχύει ότι*

$$\left(\sinh^{-1} x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \tag{4.8.23}$$

Απόδειξη. Έστω $x \in \mathbb{R}$ και έστω

$$y = \sinh^{-1} x \tag{4.8.24}$$

Άρα $x = \sinh y = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$. Θέτοντας $w = e^y$, έχουμε

$$x = \frac{w - \frac{1}{w}}{2} = \frac{w^2-1}{2w} \Leftrightarrow w^2 - 2xw - 1 = 0 \tag{4.8.25}$$

Η (4.8.25) έχει λύσεις

$$w_{1,2} = x \pm \sqrt{x^2+1}$$

Επειδή $w = e^y > 0$ και $x - \sqrt{x^2+1} < 0$ παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} w = x + \sqrt{x^2+1} &\Leftrightarrow e^y = x + \sqrt{x^2+1} \\ &\Leftrightarrow y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \end{aligned}$$

Άρα

$$\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα της Παραγώγου της Αντίστροφης συνάρτησης: Έστω

$y \in \mathbb{R}$ και έστω $y = \sinh x$. Τότε

$$\left(\sinh^{-1} y\right)' = \frac{1}{(\sinh x)'} = \frac{1}{\cosh x} \overset{(4.8.14)}{=} \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 x}} = \frac{1}{1+y^2}$$

και άρα θέτοντας "x" αντί για "y" πάιρνουμε ότι

$$\left(\sinh^{-1} x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

□

Η συνάρτηση $\cosh x$, $x \in \mathbb{R}$ ως άρτια δεν είναι $1-1$ και άρα δεν αντιστρέφεται. Όμως αν περιοριστούμε στα $x \geq 0$ η $\cosh x$ είναι μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση από το $[0,+\infty)$ στο $[1,+\infty)$. Αν συμβολίσουμε με $\cosh^{-1} x$ την αντίστροφη της $\cosh x$ στο διάστημα $[0,+\infty)$ παίρνουμε την εξής πρόταση.

Πρόταση 4.8.3. *Η αντίστροφη της συνάρτησης* $\cosh x$ *στο διάστημα* $[0,+\infty)$*, δίνεται από τον τύπο*

$$\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \quad \forall x \in [1,+\infty) \tag{4.8.26}$$

Η συνάρτηση $\cosh^{-1} x$*,* $x \in [1,+\infty)$ *είναι παραγωγίσιμη και ισχύει ότι*

$$\left(\cosh^{-1} x\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \tag{4.8.27}$$

Η απόδειξη της Πρότασης 4.8.3 είναοι ανάλογη με εκείνη της Πρότασης 4.8.2 και αφήνεται ως άσκηση.

Τέλος, όπως είδαμε η $\tanh x$ είναι μια γνησιως αύξουσα συνάρτηση από το $\mathbb{R}$ στο $(-1,1)$. Η αντίστροφή της συμβολίζεται με $\tanh^{-1} x$ και είναι μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση από το $(-1,1)$ στο $\mathbb{R}$.

Πρόταση 4.8.4. *Η αντίστροφη της συνάρτησης* $\tanh x$ *στο διάστημα* $[0,+\infty)$*, δίνεται από τον τύπο*

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad \forall x \in (-1,1) \tag{4.8.28}$$

Η συνάρτηση $\tanh^{-1} x$*,* $x \in (-1,1)$ *είναι παραγωγίσιμη και ισχύει ότι*

$$\left(\tanh^{-1} x\right)' = \frac{1}{1-x^2} \tag{4.8.29}$$

Απόδειξη. Έστω $x \in \mathbb{R}$. Τότε

$$\begin{aligned} y = \tanh^{-1} x \Leftrightarrow x = \tanh y &= \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1} \\ \Leftrightarrow e^{2y} &= \frac{1+x}{1-x} \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \end{aligned}$$

Επίσης

$$\begin{aligned}\left(\tanh^{-1} x\right)' &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)' \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1-x}{1+x}\cdot\left(\frac{1+x}{1-x}\right)' \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{2}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x^2}\end{aligned}$$

□

4.9 Απροσδιόριστες μορφές - Κανόνες de l' Hospital

Θεώρημα 4.9.1. *Έστω $-\infty \le a < b \le +\infty$ και $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε για κάθε $x \in (a,b)$ ισχύει ότι $g(x) \neq 0$ και $g'(x) \neq 0$.*

(α) Αν $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$ τότε $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ υπό την προυπόθεση ότι το $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ υπάρχει (πεπερασμένο ή άπειρο).

(β) Αντίστοιχα αν $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \lim\limits_{x\to b^-} g(x) = 0$ τότε $\lim\limits_{x\to b^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to b^-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ υπό την προυπόθεση ότι το $\lim\limits_{x\to b^-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ υπάρχει (πεπερασμένο ή άπειρο).

Απόδειξη. Θα δείξουμε μόνο το (α) (το (β) αποδεικνύεται ομοίως). Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

Περίπτωση 1: $a \in \mathbb{R}$.

Στην περίπτωση αυτή επεκτείνουμε τις συναρτήσεις f και g στο $x = a$ θέτοντας $f(a) = g(a) = 0$. Έστω (x_n) ακολουθία στο (a,b) με $x_n \to a$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy (Θεώρημα 4.6.1), για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $\xi_n \in (a, x_n)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(a) - f(x_n)}{g(a) - g(x_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}$$

Επειδή $a < \xi_n < x_n$ και $x_n \to a$ από το Κριτήριο των Ισοσυγκλινουσών ακολουθιών έπεται ότι $\xi_n \to a$. Άρα $\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} = \dfrac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} \to L$, αφού $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$.

Άρα για κάθε ακολουθία (x_n) στο (a,b) με $x_n \to a$ έπεται ότι $\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} = L$. Από Αρχή Μεταφοράς για όρια αυτό σημαίνει ότι $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

Περίπτωση 2: $a = -\infty$.

Στην περίπτωση αυτή, χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $b < 0$ και θεωρούμε τις συναρτήσεις $F, G : \left(\dfrac{1}{b}, 0\right) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$F(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{και} \quad G(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^-} F(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$ και ομοίως $\lim\limits_{x\to 0^-} G(x) = 0$. Επιπλέον, για κάθε $x \in \left(\dfrac{1}{b}, 0\right)$, από τον κανόνα Αλυσίδας έχουμε $F'(x) = -f'\left(\dfrac{1}{x}\right)\cdot\dfrac{1}{x^2}$ και αντίστοιχα $G'(x) = -g'\left(\dfrac{1}{x}\right)\cdot\dfrac{1}{x^2} \neq 0$.

Με βάση τα παραπάνω και την Περίπτωση 1 για $a = 0$, έχουμε

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to0^-}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{g\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to0^-}\frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x\to0^-}\frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x\to0^-}\frac{-f'\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x^2}}{-g'\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

□

Το Θεώρημα 4.9.1 έχει ανάλογες εκδοχές για απροσδιοριστίες της μορφής $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ή πιο γενικότερα για περιπτώσεις όπου $\lim g(x) = \pm\infty$. Αναφέρουμε χωρίς απόδειξη το παρακάτω ανάλογο του Θεωρήματος 4.9.1.

Θεώρημα 4.9.2. *Έστω $-\infty \le a < b \le +\infty$ και $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε για κάθε $x \in (a, b)$ ισχύει ότι $g(x) \neq 0$ και $g'(x) \neq 0$.*

(α) Αν $\lim_{x\to a^+}|g(x)| = +\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ υπό την προυπόθεση ότι το $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ υπάρχει (πεπερασμένο ή άπειρο).

(β) Αντίστοιχα αν $\lim\limits_{x\to b^-}|g(x)| = +\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to b^-}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ υπό την προυπόθεση ότι το $\lim\limits_{x\to b^-}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ υπάρχει (πεπερασμένο ή άπειρο).

4.10 Πολυώνυμα Taylor

Οι πιο απλές πραγματικές συναρτήσεις είναι οι *πολυωνυμικές*, δηλαδή οι συναρτήσεις της μορφής

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

όπου $a_0, a_1, \ldots, a_n$ σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Στις πολυωνυμικές συναρτήσεις μπορούμε να βρούμε σχετικά εύκολα τις τιμές τους και γενικά να μελετήσουμε τις ιδιότητές τους. Όμως η πλειονότητα των συναρτήσεων που χρησιμοποιούμε στην πράξη είναι συναρτήσεις που δεν μπορούν να γραφούν ως πολυώνυμα όπως πχ. η εκθετική συνάρτηση e^x, η λογαριθμική συνάρτηση $\ln x$, οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις $\cos x$ (συνημίτονο του x), $\sin x$ (ημίτονο του x) $\tan x$ (εφαπτομένη του x) κλπ. Τα πολυώνυμα Taylor αποτελούν πολυωνυμικές προσεγγίσεις αυτών των συναρτήσεων.

Ορισμός 4.10.1. *Έστω $f : I \to \mathbb{R}$, όπου I διάστημα του $\mathbb{R}$, $a \in I$ και $n \in \mathbb{N}$. Έστω ότι η f είναι n-φορές παραγωγίσιμη στο a. Το πολυώνυμο*

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{4.10.1}$$

καλείται πολυώνυμο Taylor της f το τάξης n με κέντρο το a.

Επίσης ορίζουμε το πολυώνυμο Taylor της f μηδενικής τάξης με κέντρο το a να είναι το σταθερό πολυώνυμο

$$T_0(x) = f(a) \tag{4.10.2}$$

Για παράδειγμα αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη και $a \in \mathbb{R}$ τότε τα πολυώνυμα Taylor τάξης

$n = 0, 1, 2$ της f με κέντρο το a είναι τα εξής :

$$T_0(x) = f(a), \quad T_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a), \quad T_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$$

Παράδειγμα 4.10.2. Τα πολυώνυμα Taylor της συνάρτησης $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, με κέντρο το $a = 0$ δίνονται από τον τύπο

$$T_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

Ομοίως τα πολυώνυμα Taylor της συνάρτησης $g(x) = \ln(1+x)$, $x \in (-1, +\infty)$ με κέντρο το $a = 0$ δίνονται από τον τύπο

$$T_n(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

Πρόταση 4.10.3. *Έστω $n \geq 0$ ακέραιος, $f : I \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση και $a \in I$. Τότε η παράγωγος του πολυωνύμου Taylor τάξης $n+1$ της f με κέντρο το a είναι ίση με το πολυώνυμο Taylor τάξης n της f' με κέντρο το a, δηλαδή αν με $T_{n+1,f}$ συμβολίσουμε το πολυώνυμο Taylor τάξης $n+1$ της f και αντίστοιχα με $T_{n,f'}$ το πολυώνυμο Taylor τάξης n της f' με κέντρο το a, τότε*

$$T'_{n+1,f}(x) = T_{n,f'}(x) \tag{4.10.3}$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned} T'_{n+1,f}(x) &= \left(f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n+1)}(a)}{n!}(x-a)^{n+1}\right)' \\ &= \frac{f'(a)}{1!} + \frac{f''(a)}{2!}2(x-a) + \cdots + + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(n+1)(x-a)^n \\ &= f'(a) + \frac{f''(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n+1)}(a)}{n!}(x-a)^n = T_{n,f'}(x) \end{aligned}$$

□

Θεώρημα 4.10.4. *(Taylor) Έστω $n \geq 0$ ακέραιος. Έστω I διάστημα του $\mathbb{R}$, $a \in I$ και $f : I \to \mathbb{R}$, $(n+1)$-φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Τότε για κάθε $x \in I$ με $x \neq a$ υπάρχει ένας αριθμός ξ στο ανοικτό διάστημα με άκρα τα a και x τέτοιος ώστε*

$$f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \tag{4.10.4}$$

όπου T_n είναι το πολυώνυμο Taylor της f το τάξης n με κέντρο το a.

Απόδειξη. Το θεώρημα θα αποδειχθεί με επαγωγή. Για $n = 0$ το θεώρημα ισχύει, αφού από το κλασικό Θεώρημα Μέσης Τιμής έχουμε ότι για κάθε $x \neq a$ υπάρχει ξ στο ανοικτό διάστημα με άκρα τα a και x τέτοιο ώστε

$$f(x) = f(a) + f'(\xi)(x-a) = T_0(x) + \frac{f'(\xi)}{1!}(x-a)$$

Έστω ότι το θεώρημα ισχύει για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Έστω I διάστημα του $\mathbb{R}$, $a \in I$ και $f : I \to \mathbb{R}$, $(n+2)$-φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Έστω $T_{f,n+1}(x)$ το πολυώνυμο Taylor της f το τάξης $n+1$ με κέντρο το a. Έστω $x \in I$ με $x \neq a$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy (Θεώρημα 4.6.1) και την

Πρόταση 4.10.3, υπάρχει ξ' μεταξύ των x και a τέτοιο ώστε

$$\frac{f(x)-T_{f,n+1}(x)}{(x-a)^{n+2}}=\frac{f'(\xi')-T'_{f,n+1}(\xi')}{(n+2)(\xi'-a)^{n+1}}=\frac{1}{n+2}\frac{f'(\xi')-T_{f',n}(\xi')}{(\xi'-a)^{n+1}} \tag{4.10.5}$$

Εφαρμόζωντας τώρα την Επαγωγική Υπόθεση για $x=\xi'$ και $f=f'$ παίρνουμε ότι υπάρχει ξ μεταξύ των a και ξ' τέτοιο ώστε

$$\frac{f'(\xi')-T_{f',n}(\xi')}{(\xi'-a)^{n+1}}=\frac{(f')^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}=\frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Αντικαθιστώντας στην (4.10.5) παίρνουμε ότι

$$\frac{f(x)-T_{f,n+1}(x)}{(x-a)^{n+2}}=\frac{1}{n+2}\cdot\frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+1)!}=\frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!}$$

που δίνει την (4.10.4). □

Παράδειγμα 4.10.5. Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $0<x\leq 1$ ισχύει ότι

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}<e^x<1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{3}{(n+1)!} \tag{4.10.6}$$

Π. χ. για $n=9$ και $x=1$ παίρνουμε την εξής πολύ καλή προσσέγγιση του e:

$$2,718281<e<2,718282$$

Απόδειξη. Από το Παράδειγμα 4.10.2 έχουμε ότι το πολυώνυμο Taylor τάξης n της $f(x)=e^x$ με κέντρο το $a=0$ δίνεται από τον τύπο

$$T_n(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$$

Έστω $n\geq 1$ ακέραιος και έστω $x\in(0,1]$. Από το Θεώρημα 4.10.4 υπάρχει $\xi\in(0,x)$ τέτοιο ώστε

$$e^x=T_n(x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}=T_n(x)+\frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1} \tag{4.10.7}$$

Επειδή η $e^x>0$ και $0<x\leq 1$ έχουμε ότι $\dfrac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}>0$ και άρα από την (4.10.7) προκύπτει ότι

$$T_n(x)<e^x \tag{4.10.8}$$

Από την άλλη μεριά η συνάρτηση e^x είναι γνησίως αύξουσα και επειδή $0\leq x\leq 1$ έχουμε ότι $e^\xi<e<3$ και άρα από την (4.10.7) παίρνουμε ότι

$$e^x<T_n(x)+\frac{3}{(n+1)!}. \tag{4.10.9}$$

Από τις (4.10.8) και (4.10.9) προκύπτει τώρα άμεσα η (4.10.6). □

Θεώρημα 4.10.6. *(Taylor) Έστω $n\geq 1$ ακέραιος. Έστω I διάστημα του $\mathbb{R}$, $a\in I$ και $f:I\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε η f είναι n-φορές παραγωγίσιμη στο a. Τότε*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-T_n(x)}{(x-a)^n}=0 \tag{4.10.10}$$

Ισοδύναμα, για κάθε $x \in I$ με $x \neq a$

$$f(x) = T_n(x) + \varepsilon(x)(x-a)^n \quad \text{με} \quad \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0 \tag{4.10.11}$$

όπου T_n είναι το πολυώνυμο Taylor της f το τάξης n με κέντρο το a.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε το θεώρημα με Επαγωγή στο $n \in \mathbb{N}$. Για $n = 1$ προκύπτει άμεσα από την παραγωγισιμότητα της f στο a. Πράγματι,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_1(x)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a) = 0$$

Έστω $k \in \mathbb{N}$ και έστω ότι το Θεώρημα 4.10.6 ισχύει για κάποιο $n \in \mathbb{N}$.

Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ μια $(n+1)$-φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση σε ένα $a \in I$. Θα δείξουμε ότι

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_{n+1,f,a}(x)}{(x-a)^{n+1}} = 0$$

Επειδή

$$\lim_{x\to a}(f(x) - T_n(x)) = f(a) - f(a) = 0$$

το όριο $\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_{n+1,f,a}(x)}{(x-a)^{n+1}}$ είναι απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$. Άρα από τον κανόνα De l'Hospital και την Πρόταση 4.10.3 έχουμε

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}} = \lim_{x\to a} \frac{[f(x) - T_{n+1}(x)]'}{[(x-a)^{n+1}]'} = \frac{1}{n+1} \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - T_{n,f'}(x)}{(x-a)^n} = 0$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από την επαγωγική υπόθεση αφού η f' είναι n-φορές παραγωγίσιμη στο a. □

Πόρισμα 4.10.7. *(Κριτήριο για τοπικά ακρότατα) Έστω $n \in \mathbb{N}$, I διάστημα του $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ και $a \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε η f είναι $2n$-φορές παραγωγίσιμη στο a. Αν $f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{2n-1}(a) = 0$ και $f^{2n}(a) > 0$ (αντ. $f^{2n}(a) < 0$) τότε το a είναι γνήσιο τοπικό ελάχιστο (αντ. μέγιστο) της f, δηλαδή υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(a) < f(x)$ (αντ. $f(a) > f(x)$) για κάθε $x \in I$ με $|x-a| < \delta$.*

Απόδειξη. Έστω $f^{2n}(a) > 0$ (αν $f^{2n}(a) < 0$ η απόδειξη είναι παρόμοια ή μπορούμε να θεωρήσουμε την $-f$). Επειδή $f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{2n-1}(a) = 0$ έπεται οτι

$$T_{2n,f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(2n-1)}(a)}{(2n-1)!}(x-a)^{2n-1} + \frac{f^{(2n)}(a)}{(2n)!}(x-a)^{2n} = f(a) + \frac{f^{(2n)}(a)}{(2n)!}(x-a)^{2n}$$

και άρα από το Θεώρημα 4.10.6, έχουμε

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_{2n,f,a}(x)}{(x-a)^{2n}} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - f^{(2n)}(a)(x-a)^{2n}}{(x-a)^{2n}} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^{2n}} = f^{(2n)}(a) > 0$$

Αυτό σημαίνει ότι το πηλίκο $\frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^{2n}}$ είναι θετικό όταν το x είναι αρκετά κοντά στο a. Συνεπώς, επειδή $(x-a)^{2n} > 0$ για κάθε $x \neq a$, θα πρέπει και ο αριθμητής $f(x) - f(a)$ να είναι θετικός όταν το x είναι αρκετά κοντά στο a. Με άλλα λόγια υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) > f(a)$ για κάθε $x \in I$ με $|x-a| < \delta$. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Το ολοκλήρωμα Riemann

5.1 Ορισμός του Ολοκληρώματος

Σταθεροποιούμνε για τα επόμενα ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a, b]$ του $\mathbb{R}$ και μια φραγμένη συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

5.1.1 Διαμερίσεις

Κάθε πεπερασμένο υποσύνολο P του $[a, b]$ που περιέχει τα σημεία a, b καλείται ***διαμέριση*** του $[a, b]$. Συνήθως τις διαμερίσεις του $[a, b]$ τις συμβολίζουμε απαριθμώντας τα σημεία τους σε αύξουσα μορφή. Αν $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$ μια διαμέριση του $[a, b]$ τότε για κάθε $1 \leq i \leq n$ συμβολίζουμε με Δx_i το μήκος του διαστήματος $[x_{i-1}, x_i]$, δηλαδή

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

Ο θετικός αριθμός

$$\lambda(P) = \max\{\Delta x_i : 1 \leq i \leq n\}$$

καλείται ***λεπτότητα*** της διαμέρισης P. Η λεπτότητα δείχνει κατά κάποιο τρόπο πόσο πυκνά είναι τοποθετημένα τα σημεία της διαμέρισης μέσα στο διάστημα $[a, b]$. Όσο πιο μικρή είναι η $\lambda(P)$ τόσο πιο μικρά κενά υπάρχουν μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων της P.

Παρατηρείστε ότι

$$[a, b] = \bigcup_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i]$$

και

$$b - a = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i$$

5.1.2 Κάτω και άνω αθροίσματα

Το άθροισμα

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$$

όπου για κάθε $1 \leq i \leq n$,

$$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

καλείται ***κάτω άθροισμα της*** f ***ως προς την*** P. Αντίστοιχα, το άθροισμα,

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$

όπου $1 \leq i \leq n$,

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

καλείται ***άνω άθροισμα της*** f ***ως προς την*** P.

Πρόταση 5.1.1. *(α) Για κάθε διαμέριση P του $[a, b]$ έχουμε*

$$L(f, P) \leq U(f, P) \tag{5.1.1}$$

(β) Έστω P, R δύο διαμερίσεις του $[a, b]$ τέτοιες ώστε $P \subseteq R$. Τότε

$$L(f, P) \leq L(f, R) \leq U(f, R) \leq U(f, P) \tag{5.1.2}$$

Απόδειξη. (α) Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$. Έχουμε

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \text{ και } U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

όπου $m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ και $M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, για κάθε $1 \leq i \leq n$. Επειδή $m_i \leq M_i$ και $\Delta x_i > 0$ έχουμε ότι $m_i \Delta x_i \leq M_i \Delta x_i$ για κάθε $1 \leq i \leq n$ και άρα

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = U(f, P)$$

(β) Είναι εύκολο να δούμε ότι αρκεί να δειχθεί η πρόταση στην περίπτωση που η R έχει ένα μόνο σημείο παραπάνω από την P (ύστερα η απόδειξη προχωρά εύκολα με επαγωγή). Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ μια διαμέριση του $[a, b]$ και έστω $R = P \cup \{y\}$ όπου $y \notin P$. Τότε υπάρχει μοναδικό $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ με $x_{i_0-1} < y < x_{i_0}$. Συνεπώς,

$$L(f, R) = \sum_{i<i_0} m_i \Delta x_i + m'_{i_0}(y - x_{i_0-1}) + m''_{i_0}(x_i - y) + \sum_{i<i_0} m_i \Delta x_i$$

όπου $m'_{i_0} = \inf\{f(x) : x \in [x_{i_0-1}, y]\}$ και $m''_{i_0} = \inf\{f(x) : x \in [y, x_{i_0}]\}$. Θυμίζουμε τώρα ότι αν $A, B \subseteq \mathbb{R}$ κάτω φραγμένα τότε έχουμε $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$ (δείτε Ασκήσεις Φυλλαδίου 1). Άρα

$$m_{i_0} = \min\{m'_{i_0}, m''_{i_0}\}$$

Άρα $m'_{i_0} - m_{i_0} \geq 0$, $m''_{i_0} - m_{i_0} \geq 0$, οπότε

$$\begin{aligned} L(f,R) - L(f,P) &= m'_{i_0}(y - x_{i_0-1}) + m''_{i_0}(x_i - y) - m_{i_0}(x_{i_0} - x_{i_0-1}) \\ &= m'_{i_0}(y - x_{i_0}) + m''_{i_0}(x_{i_0} - y) - m_{i_0}(y - x_{i_0}) - m_{i_0}(x_i - y) \\ &= (m'_{i_0} - m_{i_0})(y - x_{i_0-1}) + (m''_{i_0} - m_{i_0})(x_{i_0} - y) \geq 0 \end{aligned} \tag{5.1.3}$$

Με όμοιο τρόπο δείχνουμε και την αντίστοιχη ανισότητα για τα $U(f,P)$ και $U(f,R)$. □

Παρατήρηση 5.1.2. Η ανισότητα (5.1.2) δείχνει ότι το κάτω άθροισμα μεγαλώνει ενώ το άνω άθροισμα μικραίνει όταν από μια διαμέριση περνάμε σε μια άλλη που μεγαλύτερη την περιέχει.

Πόρισμα 5.1.3. *Για οποιεσδήποτε δύο διαμερίσεις P_1, P_2 του $[a,b]$ ισχύει ότι*

$$L(f,P_1) \leq U(f,P_2) \tag{5.1.4}$$

Απόδειξη. Έστω P_1, P_2 δύο διαμερίσεις του $[a,b]$. Θέτουμε

$$R = P_1 \cup P_2$$

Τότε η R είναι μια διαμέριση του $[a,b]$ με $P_1 \subseteq R$ και $P_2 \subseteq R$. Από την Πρόταση 5.1.1 παίρνουμε ότι

$$L(f,P_1) \leq L(f,R) \text{ και } U(f,R) \leq U(f,P_2)$$

Επειδή $L(f,R)] \leq U(f,R)$ συμπεραίνουμε ότι $L(f,P_1) \leq U(f,P_2)$. □

5.1.3 Κάτω και άνω ολοκλήρωμα

Θέτουμε

$$L(f) = \{L(f,P) : P \text{ διαμέριση του } [a,b]\}$$

και

$$U(f) = \{U(f,P) : P \text{ διαμέριση του } [a,b]\}$$

Από το Πόρισμα 5.1.3 έχουμε ότι κάθε στοιχείο του $L(f)$ είναι μικρότερο ή ίσο κάθε στοιχείου του $U(f)$. Υπενθυμίζουμε εδώ ότι αν έχουμε $A, B \subseteq \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $a \leq b$ για κάθε $a \in A$ και για κάθε $b \in B$ τότε $\sup A \leq \inf B$ (δείτε Ασκήσεις Φυλλαδίου 1). Άρα

$$\sup L(f) \leq \inf U(f) \tag{5.1.5}$$

Το $\sup L(f)$ καλείται ***κάτω ολοκλήρωμα της*** f και συμβολίζεται με

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx$$

και το $\inf U(f)$ καλείται ***άνω ολοκλήρωμα της*** f και συμβολίζεται με

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx$$

Άρα για κάθε φραγμένη συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ορίζονται δύο ολοκληρώματα το κάτω και το

άνω και για τα οποία ισχύει ότι

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \tag{5.1.6}$$

5.1.4 Ολοκληρώσιμες συναρτήσεις

Είμαστε τώρα έτοιμοι να δώσουμε τον ορισμό του ολοκληρώματος.

Ορισμός 5.1.4. *Η f θα καλείται **ολοκληρώσιμη** αν το κάτω ολοκλήρωμα της είναι ίσο με το άνω ολοκλήρωμά της. Στην περίπτωση αυτή η κοινή τιμή του άνω και κάτω ολοκληρώματος καλείται **ολοκλήρωμα** της f και συμβολίζεται με $\int_a^b f(x)\,dx$.*

Παράδειγμα 5.1.5. Κάθε σταθερή συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη. Πράγματι, αν $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = c$ τότε για κάθε διαμέριση P του $[a,b]$ $L(f,P) = U(f,P) = c(b-a)$. Άρα $L(f) = U(f) = \{c(b-a)\}$, οπότε $\underline{\int_a^b} c\,dx \leq \overline{\int_a^b} c\,dx = c(b-a)$. Συνεπώς

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$$

Θα δούμε ότι όλες οι συνεχείς και όλες οι μονότονες συναρτήσεις (συνεχείς ή όχι) είναι ολοκληρώσιμες. Υπάρχουν όμως και μη ολοκληρώσιμες συναρτήσεις.

Παράδειγμα 5.1.6. Η συνάρτηση Dirichlet $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ ρητός} \\ 0 & x \text{ άρρητος} \end{cases}$ δεν είναι ολοκληρώσιμη.

Πράγματι, έστω $P = \{0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1\}$ μια διαμέριση του $[0,1]$. Λόγω πυκνότητας αρρήτων, έχουμε ότι για κάθε $1 \leq i \leq n$, $m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = 0$ και άρα $L(f,P) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = 0$. Από την άλλη μεριά, λόγω πυκνότητας ρητών, έχουμε ότι για κάθε $1 \leq i \leq n$, $M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = 1$ και άρα $U(f,P) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \Delta x_i = 1$. Άρα $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = 0$ ενώ $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = 1$.

Ένα χρήσιμο κριτήριο ολοκληρωσιμότητας είναι το παρακάτω.

Πρόταση 5.1.7. *(Κριτήριο Riemann) Μια συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση P του $[a,b]$ τέτοια ώστε $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$.*

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και έστω $I = \int_a^b f(x)\,dx$. Έστω $\varepsilon > 0$. Έχουμε

$$I = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{L(f,P) : P \text{ διαμέριση του } [a,b]\}$$

Από την χαρακτηριστική ιδιότητα του supremum υπάρχει διαμέριση P_1 του $[a,b]$ τέτοια ώστε

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < L(f,P_1) \tag{5.1.7}$$

Ομοίως,

$$I = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\{U(f,P) : P \text{ διαμέριση του } [a,b]\}$$

και άρα υπάρχει διαμέριση P_2 του $[a,b]$ τέτοια ώστε

$$U(f,P_2) < I + \frac{\varepsilon}{2} \tag{5.1.8}$$

Θέτουμε $P = P_1 \cup P_2$. Τότε $P_1, P_2 \subseteq P$ και άρα από την Πρόταση 5.1.1 έχουμε

$$L(f,P_1) \leq L(f,P) \leq U(f,P) \leq U(f,P_2) \tag{5.1.9}$$

Από τις (5.1.7)-(5.1.9) παίρνουμε τελικά ότι

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < L(f,P) \leq U(f,P) < I + \frac{\varepsilon}{2}$$

που σημαίνει ότι $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$.

($\Leftarrow$) Έστω ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση P του $[a,b]$ τέτοια ώστε $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$. Από τον ορισμό του κάτω και άνω ολοκληρώματος έχουμε

$$L(f,P) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq U(f,P)$$

Άρα

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon \tag{5.1.10}$$

Συνεπώς για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει ότι

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx < \varepsilon$$

και αυτό σημαίνει ότι αναγκαστικά $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ δηλαδή η f είναι ολοκληρώσιμη. □

Θεώρημα 5.1.8. *Κάθε μονότονη συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη.*

Απόδειξη. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ μονότονη συνάρτηση. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι η f είναι αύξουσα. Έστω $\varepsilon > 0$. Παρατηρούμε ότι για κάθε διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ του $[a,b]$ ισχύει ότι

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(x_i) \text{ και } m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(x_{i-1})$$

για όλα τα $1 \leq i \leq n$. Επίσης,

$$\sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}) = f(b) - f(a)$$

Άρα

$$\begin{aligned}
U(f,P) - L(f,P) &= \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i \\
&= \sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1})\,\Delta x_i \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1})\max_{1\leq i\leq n}\Delta x_i = \left(\sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1})\right)\lambda(P) = (f(b) - f(a))\lambda(P)
\end{aligned}$$

Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις: Είτε $f(b) - f(a) = 0$ και άρα η f είναι σταθερή και

$$U(f,P) - L(f,P) = 0 < \varepsilon$$

για κάθε διαμέριση P, είτε $f(b) - f(a) \neq 0$ οπότε για κάθε P με

$$\lambda(P) < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$$

έχουμε ότι $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$.

□

Θεώρημα 5.1.9. *Κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 3.8.6 η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. Άρα για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x, x' \in [a,b]$,

$$|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon \tag{5.1.11}$$

Έστω $\varepsilon > 0$ και έστω $0 < \varepsilon' < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$. Από το Θεώρημα 3.8.6 η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. Άρα υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x, x' \in [a,b]$,

$$|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon' \tag{5.1.12}$$

Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ διαμέριση του $[a,b]$ με

$$\lambda(P) < \delta$$

Επειδή η f είναι συνεχής, από το Θεώρημα 3.5.8, για κάθε $1 \leq i \leq n$ υπάρχουν $y_i, y_i' \in [x_{i-1}, x_i]$ τέτοια ώστε

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(y_i) \text{ και } m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(y_i')$$

για όλα τα $1 \leq i \leq n$. Επειδή $y_i, y_i' \in [x_{i-1}, x_i]$ και $x_i - x_{i-1} < \delta$ έπεται ότι και $|y_i - y_i'| < \delta$. Άρα από την (5.1.12) έχουμε

$$M_i - m_i = f(y_i) - f(y_i') < \varepsilon'$$

Άρα

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\left(f(y_i) - f(y_i')\right)\Delta x_i < \varepsilon' \sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = \varepsilon'(b-a) < \varepsilon$$

□

5.2 Ακολουθίες διαμερίσεων με λεπτότητα που τείνει στο μηδέν

Πρόταση 5.2.1. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και έστω P, R δύο διαμερίσεις του $[a,b]$ τέτοιες ώστε $P \subseteq R$. Έστω n το πλήθος των σημείων της R που δεν ανήκουν στην P και έστω $M = \sup\{|f(x)| : x \in [a,b]\}$. Τότε*

$$L(f,P) \le L(f,R) \le L(f,P) + 2Mn\lambda(P) \tag{5.2.1}$$

και

$$U(f,P) - 2Mn\lambda(P) \le U(f,R) \le U(f,P) \tag{5.2.2}$$

Απόδειξη. Όπως και στην Πρόταση 5.1.1 αρκεί να δειχθεί η πρόταση στην περίπτωση που $n = 1$ και μετά η απόδειξη προχωρά εύκολα με επαγωγή. Έστω λοιπόν $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ μια διαμέριση του $[a,b]$ και έστω $R = P \cup \{y\}$ όπου $y \notin P$. Τότε υπάρχει μοναδικό $i_0 \in \{1,\dots,n\}$ με $x_{i_0-1} < y < x_{i_0}$. Συνεπώς,

$$L(f,R) = \sum_{i<i_0} m_i \Delta x_i + m'_{i_0}(y - x_{i_0-1}) + m''_{i_0}(x_i - y) + \sum_{i<i_0} m_i \Delta x_i$$

όπου $m'_{i_0} = \inf\{f(x) : x \in [x_{i_0-1}, y]\}$ και $m''_{i_0} = \inf\{f(x) : x \in [y, x_{i_0}]\}$. Τότε $m'_{i_0} \ge m_{i_0}$, $m''_{i_0} \ge m_{i_0}$, οπότε

$$\begin{aligned} L(f,R) - L(f,P) &= m'_{i_0}(y - x_{i_0-1}) + m''_{i_0}(x_i - y) - m_{i_0}(x_{i_0} - x_{i_0-1}) \\ &= m'_{i_0}(y - x_{i_0}) + m''_{i_0}(x_{i_0} - y) - m_{i_0}(y - x_{i_0}) - m_{i_0}(x_i - y) \\ &= (m'_{i_0} - m_{i_0})(y - x_{i_0-1}) + (m''_{i_0} - m_{i_0})(x_{i_0} - y) \ge 0 \end{aligned} \tag{5.2.3}$$

Από την άλλη μεριά $m'_{i_0} - m_{i_0} \le |m'_{i_0}| + |m_{i_0}| \le 2M$ οπότε

$$L(f,R) - L(f,P) = (m'_{i_0} - m_{i_0})(y - x_{i_0-1}) + (m''_{i_0} - m_{i_0})(x_{i_0} - y) \le 2M(x_{i_0} - x_{i_0-1}) \le 2M\lambda(P)$$

Με όμοιο τρόπο δείχνουμε και την αντίστοιχη ανισότητα για τα $U(f,P)$ και $U(f,R)$. □

Παρατήρηση 5.2.2. Οι (5.2.1) και (5.2.2) δείχνουν ότι όταν από μια διαμέριση περνάμε σε μια άλλη που την περιέχει η αύξηση του κάτω αθροίσματος (αντίστοιχα η μείωση του άνω αθροίσματος) είναι ανάλογη της λεπτότητας της αρχικής διαμέρισης. Άρα το κάτω και άνω άθροισμα για μια διαμέριση με πολύ μικρή λεπτότητα παραμένει σχεδόν σταθερό όταν περνάμε σε μεγαλύτερες διαμερίσεις αρκεί βέβαια να μην έχουν πολλά παραπάνω σημεία από την αρχική διαμέριση.

Πρόταση 5.2.3. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και (P_n) μια ακολουθία διαμερίσεων του $[a,b]$ τέτοια ώστε $\lambda(P_n) \to 0$. Τότε*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} L(f,P_n) \text{ και } \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} U(f,P_n)$$

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό του κάτω ολοκληρώματος μπορούμε να βρούμε μια διαμέριση

P του $[a,b]$ τέτοια ώστε

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2} < L(f,P) \tag{5.2.4}$$

Έστω $M = \sup\{|f(x)| : x \in [a,b]\}$ και έστω $|P|$ το πλήθος των στοιχείων της P. Επειδή $\lambda(P_n) \to 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$\lambda(P_n) < \frac{\varepsilon}{4|P|M} \text{ για κάθε } n \geq n_0 \tag{5.2.5}$$

Ισχυριζόμαστε ότι $|\underline{\int_a^b} f(x)\,dx - L(f,P_n)| < \varepsilon$ γυα κάθε $n \geq n_0$. Πράγματι από την Πρόταση 5.1.1 έχουμε ότι για κάθε $n \geq n_0$

$$L(f,P) \leq L(f,P\cup P_n) \leq L(f,P_n) + 2M|P|\lambda(P_n) \leq L(f,P_n) + \frac{\varepsilon}{2} \tag{5.2.6}$$

Από την (5.2.4) και την (5.2.6) παίρνουμε

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2} < L(f,P_n) + \frac{\varepsilon}{2}$$

ισοδύναμα

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \varepsilon < L(f,P_n)$$

για κάθε $n \geq n_0$. Επειδή $L(f,P) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ για κάθε διαμέριση P του $[a,b]$ έχουμε

$$|L(f,P_n) - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx| < \varepsilon$$

για κάθε $n \geq n_0$. Άρα $L(f,P_n) \to \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$. Ομοίως δείχνουμε ότι $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_n U(f,P_n)$. □

Από την Πρόταση 5.2.3 και τον Ορισμό 5.1.4 των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων παίρνουμε άμεσα την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 5.2.4. *Μια συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία διαμερίσεων (P_n) του $[a,b]$ με $\lambda(P_n) \to 0$ ισχύει ότι*

$$\lim_n L(f,P_n) = \lim_n U(f,P_n)$$

και στην περίπτωση αυτή το κοινό όριο των δύο ακολουθιών είναι το $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

5.3 Αθροίσματα Riemann

Ορισμός 5.3.1. *(α) Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ μια διαμέριση του $[a,b]$. Με τον όρο **επιλογή ενδιάμεσων σημείων ως προς την** P εννοούμε ένα υποσύνολο $T = \{t_1 < t_2 < \cdots < t_n\}$ του $[a,b]$ με την ιδιότητα $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, για κάθε $1 \leq i \leq n$.*

(β) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση, $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ διαμέριση του $[a,b]$ και $T = \{t_1 < t_2 < \cdots < t_n\}$ μια επιλογή ενδιάμεσων σημείων ως προς την P. Το άθροισμα

$$R(f,P,T) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

*καλείται **άθροισμα Riemann** της f (ως προς την διαμέριση P και την επιλογή T).*

Πρόταση 5.3.2. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και (P_n) μια ακολουθία διαμερίσεων του $[a,b]$ τέτοια ώστε $\lambda(P_n) \to 0$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν δύο επιλογές $\underline{T_n}$ και $\overline{T_n}$ ενδιάμεσων σημείων ως προς την P_n τέτοιες ώστε*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} R(f,P_n,\underline{T_n}) \text{ και } \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} R(f,P_n,\overline{T_n})$$

Απόδειξη. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $P_n = \{a = x_0 < \cdots < x_{k_n} = b\}$. Για κάθε $1 \le i \le k_n$ επιλέγουμε $\underline{t_i} \in [x_{i-1}, x_i]$ τέτοιο ώστε

$$m_i \le f(\underline{t_i}) < m_i + \frac{1}{(b-a)n}$$

Ομοίως για κάθε $1 \le i \le k_n$ επιλέγουμε $\overline{t_i} \in [x_{i-1}, x_i]$ τέτοιο ώστε

$$M_i - \frac{1}{(b-a)n} < f(\overline{t_i}) \le M_i$$

Τότε

$$\sum_{i=1}^{k_n} m_i\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{k_n} f(\underline{t_i})\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{k_n}\left(m_i + \frac{1}{(b-a)n}\right)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{k_n} m_i\Delta x_i + \frac{1}{(b-a)n}\sum_{i=1}^{k_n}\Delta x_i = \sum_{i=1}^{k_n} m_i\Delta x_i + \frac{1}{n}$$

Άρα αν $\underline{T_n} = \{\underline{t_1}, \ldots, \underline{t_{m_n}}\}$, έχουμε

$$L(f,P_n) \le R(f,P_n,\underline{T_n}) \le L(f,P_n) + \frac{1}{n}$$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι αν $\overline{T_n} = \{\overline{t_1}, \ldots, \overline{t_{m_n}}\}$, τότε

$$U(f,P_n) - \frac{1}{n} \le R(f,P_n,\overline{T_n}) \le U(f,P_n)$$

Από την Πρόταση (5.2.3) έχουμε ότι $L(f,P_n) \to \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ και αντίστοιχα $U(f,P_n) \to \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$. Άρα από το Κριτήριο των Ισοσυγκλινουσών ακολουθιών έπεται ότι $\lim_n R(f,P_n,\underline{T_n}) = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ και $\lim_n R(f,P_n,\overline{T_n}) = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$. □

Πρόταση 5.3.3. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν υπάρχει $I \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε για κάθε ακολουθία διαμερίσεων (P_n) με $\lambda(P_n) \to 0$ και για κάθε ακολουθία (T_n) πεπερασμένων υποσυνόλων του $[a,b]$ τέτοια ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το T_n είναι μια επιλογή ενδιάμεσων σημείων ως προς την P_n, ισχύει ότι*

$$I = \lim_n R(f,P_n,T_n)$$

Στην περίπτωση αυτή $I = \int_a^b f(x)\,dx$.

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη. Έστω (P_n) ακολουθία διαμερίσεων με $\lambda(P_n) \to 0$ και έστω ακολουθία πεπερασμένων υποσυνόλων (T_n) του $[a,b]$ τέτοια ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το T_n είναι μια επιλογή ενδιάμεσων σημείων ως προς την P_n. Παρατηρούμε ότι

$$L(f,P_n) \le R(f,P_n,T_n) \le U(f,P_n)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από την Πρόταση 5.2.4

$$\lim_n L(f,P_n) = \lim_n U(f,P_n) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Από το Θεώρημα των Ισοσυγκλινουσών ακολουθιών έπεται ότι

$$\lim_n R(f,P_n,T_n) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Αντίστροφα, έστω ότι υπάρχει $I \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε για κάθε ακολουθία διαμερίσεων (P_n) με $\lambda(P_n) \to 0$ και για κάθε ακολουθία (T_n) πεπερασμένων υποσυνόλων του $[a,b]$ τέτοια ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το T_n είναι μια επιλογή ενδιάμεσων σημείων ως προς την P_n, ισχύει ότι

$$I = \lim_n R(f,P_n,T_n)$$

Από την Πρόταση 5.3.2 έπεται ότι

$$I = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

και άρα η f είναι ολοκληρώσιμη. □

Πόρισμα 5.3.4. *Έστω* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *ολοκληρώσιμη. Τότε*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f(1)}{n} = \int_0^1 f(x)\,dx \tag{5.3.1}$$

Απόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $P_n = \{0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \cdots < 1\}$ και $T_n = \{\frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \cdots < 1\}$. Τότε $\lambda(P_n) = \frac{1}{n} \to 0$ και άρα από την Πρόταση 5.3.3 έπεται το συμπέρασμα. □

Παράδειγμα 5.3.5. Έστω $k \in \mathbb{N}$. Τότε $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} = \dfrac{1}{k+1}$.

Πράγματι, έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^k$, για κάθε $x \in [0,1]$. Είναι εύκολο να δούμε ότι

$$\frac{f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f(1)}{n} = \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}}$$

και άρα από τον τύπο (5.3.1) παίρνουμε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} = \int_0^1 x^k\,dx = \frac{1}{k+1}$$

Σχόλιο 5.3.6. Ένας εναλλακτικός τρόπος για να ορίσουμε το ολοκλήρωμα είναι και ο εξής.

Ορισμός 5.3.7. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ και $I \in \mathbb{R}$. Θα γράφουμε*

$$I = \lim_{\lambda(P)\to 0} R(f,P,T)$$

αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|R(f,P,T) - I| < \varepsilon$ για κάθε διαμέριση P του $[a,b]$ με $\lambda(P) < \delta$ και για κάθε επιλογή T ενδιάμεσων σημείων ως προς την P.

*Αν υπάρχει το $\lim_{\lambda(P)\to 0} R(f,P,T)$ τότε η f θα καλείται **ολοκληρώσιμη** και το όριο αυτό θα καλείται το **ολοκλήρωμα** της f.*

Αποδεικνύεται ότι ο παραπάνω ορισμός είναι ισοδύναμος με τον Ορισμό 5.1.4 με την έννοια ότι μια συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη κατά τον Ορισμό 5.1.4 αν και μόνο αν είναι ολοκληρώσιμη κατά τον Ορισμό 5.3.7 και στην περίπτωση αυτή τα δύο ολοκληρώματα είναι ίδια.

5.4 Βασικές Ιδιότητες του Ολοκληρώματος

Πρόταση 5.4.1. ***(Γραμμικότητα)*** *(α) Έστω $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι ολοκληρώσιμη και ισχύει ότι*

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \tag{5.4.1}$$

(β) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση λf είναι ολοκληρώσιμη και ισχύει ότι

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx \tag{5.4.2}$$

Πόρισμα 5.4.2. *Έστω $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$. Τότε η συνάρτηση $\lambda f + \mu g$ είναι ολοκληρώσιμη και*

$$\int_a^b (\lambda f(x)+\mu g(x))\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx \tag{5.4.3}$$

Ισχύει επίσης ότι και το γινόμενο ολοκληρωσίμων συναρτήσεων είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

Πρόταση 5.4.3. *Έστω $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Τότε η συνάρτηση fg είναι ολοκληρώσιμη.*

Παρατήρηση 5.4.4. Η σχέση $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \cdot \int_a^b g(x)\,dx$ **δεν** είναι γενικά σωστή. Πχ. αν $f(x) = g(x) = x$ τότε $\int_0^1 f(x)g(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = 1/3$ ενώ $\int_a^b f(x)\,dx \cdot \int_a^b g(x)\,dx = \left(\int_0^1 x\,dx\right)^2 = \frac{1}{4}$.

Μια πολύ χρήσιμη ιδιότητα του ολοκληρώματος είναι και η επόμενη.

Πρόταση 5.4.5. ***(Προσθετικότητα)*** *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ και έστω $c \in (a,b)$. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ αν και μόνο αν είναι ολοκληρώσιμη στα $[a,c]$ και $[c,b]$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \tag{5.4.4}$$

Πρόταση 5.4.6. *(**Μονοτονία**) Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες. Αν $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$ τότε*

$$\int_a^b f(x)\, dx \geq \int_a^b g(x)\, dx$$

Πόρισμα 5.4.7. *Αν $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη με $f(x) \geq 0$ τότε $\displaystyle\int_a^b f(x) \geq 0$.*

Απόδειξη. Θέτουμε $g = 0$ και εφαρμόζουμε την Πρόταση 5.4.6. □

Πρόταση 5.4.8. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη. Τότε η συνάρτηση $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη και ισχύει ότι*

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx \tag{5.4.5}$$

5.5 Το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού

Το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού αποτελείται από δύο μέρη. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι το πρώτο μέρος του λέει ότι αν ολοκληρώσουμε την παράγωγο μιας συνάρτησης θα πάρουμε σαν αποτέλεσμα στην ίδια την συνάρτηση, συμβολικά

$$\int f'(x)\, dx = f(x)$$

ενώ το δεύτερο μέρος του λέει ότι το ίδιο θα συμβεί αν παραγωγίσουμε το ολοκλήρωμα μια συνάρτησης, δηλαδή

$$\left(\int f(x)\, dx \right)' = f(x)$$

Με άλλα λόγια αυτό που εκφράζει το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού είναι ότι η ολοκλήρωση και η διαφόριση είναι αντίστροφες διαδικασίες.

Θεώρημα 5.5.1. *(Θεμεμελιώδες θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού Ι) Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αν υπάρχει $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b) με $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in (a, b)$, τότε*

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) \tag{5.5.1}$$

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι για κάθε διαμέριση P του $[a, b]$ ισχύει ότι

$$L(f, P) \leq F(b) - F(a) \leq U(f, P) \tag{5.5.2}$$

Πράγματι, έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$ μια τυχαία διαμέριση του $[a, b]$. Παρατηρούμε ότι διαφορά $F(b) - F(a)$ γράφεται

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} (F(x_i) - F(x_{i-1})) \tag{5.5.3}$$

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει $t_i \in (x_{i-1}, x_i)$ (και άρα $t_i \in (a, b)$) για κάθε $i = 1, \ldots, n$, τέτοιο

ώστε

$$\frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = F'(t_i) = f(t_i) \Rightarrow F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(t_i)\Delta x_i \tag{5.5.4}$$

Άρα η (5.5.3) γράφεται

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i. \tag{5.5.5}$$

Επειδή

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \text{ και } U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \tag{5.5.6}$$

όπου $m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ και $M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$. και $t_i \in (x_{i-1}, x_i) \Rightarrow m_i \leq f(t_i) \leq M_i$ για κάθε $1 \leq i \leq n$, έπεται ότι

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \tag{5.5.7}$$

Άρα από την (5.5.5) έχουμε τελικά ότι $L(f, P) \leq F(b) - F(a) \leq U(f, P)$, για κάθε διαμέριση P του $[a, b]$. Συνεπώς η διαφορά $F(a) - F(b)$ είναι άνω φράγμα του $L(f) = \{L(f, P) : P$ διαμέριση του $[a, b]\}$ και κάτω φράγμα του $U(f) = \{U(f, P) : P$ διαμέριση του $[a, b]\}$. Άρα

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \sup L(f) \leq F(b) - F(a) \leq \inf U(f) = \overline{\int_a^b} f(x)\, dx \tag{5.5.8}$$

(διότι το supremum ενός υποσυνόλου του $\mathbb{R}$ είναι εξ ορισμού το μικρότερο άνω φράγμα και αντίστοιχα το infimum ενός υποσυνόλου του $\mathbb{R}$ είναι εξ ορισμού το μεγαλύτερο κάτω φράγμα.) Όμως επειδή η f είναι ολοκληρώσιμη, έχουμε $\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \overline{\int_a^b} f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$ και συνεπώς η (5.5.8) γράφεται

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq F(b) - F(a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \tag{5.5.9}$$

δηλαδή $\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$. □

Το Θεώρημα 5.5.1 δίνει και τα εξής πόρισμα.

Πόρισμα 5.5.2. *Έστω $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν η F' είναι ολοκληρώσιμη τότε*

$$\int_a^b F'(x)\, dx = F(b) - F(a) \tag{5.5.10}$$

Ορισμός 5.5.3. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Μια συνάρτηση $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ θα καλείται αρχική (ή αντιπαράγωγος) της f αν (α) είναι συνεχής στο $[a, b]$ και (β) είναι παραγωγίσιμη στο (a, b) με $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in (a, b)$.*

Η αρχική μιας συνάρτησης αν υπάρχει δεν είναι μοναδική, αλλά λόγω του Θεωρήματος Μέσης Τιμής όλες οι αρχικές μιας συνάρτησης f παράγονται ουσιαστικά από μια μόνο συνάρτηση με πρόσθεση

σταθεράς και άρα στην (5.5.1) δεν παίζει ρόλο ποιά αρχική συνάρτηση της f επιλέγουμε. Άρα το Θεώρημα 5.5.1 λέει ότι αν μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση έχει αρχική τότε το ολοκλήρωμά της ισούται με την διαφορά των τιμών της αρχικής της συνάρτησης στα άκρα του διαστήματος ολοκλήρωσης.

Όπως θα δούμε παρακάτω (Πόρισμα 5.5.7), κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ έχει αρχική. Υπάρχουν όμως ολοκληρώσιμες συναρτήσεις που δεν έχουν αρχική.

Πρόταση 5.5.4. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μονότονη (και συνεπώς, από το Θεώρημα 5.5.1, ολοκληρώσιμη). Αν η f δεν είναι συνεχής στο (a, b) τότε η f δεν έχει αρχική.*

Απόδειξη. Προς απαγωγή σε άτοπο, έστω ότι η f είχε μια αρχική F. Από το Θεώρημα του Darboux (Θεώρημα 4.3.1) το σύνολο τιμών $T = \{F'(x) : x \in (a, b)\}$ της F' είναι ένα διάστημα του $\mathbb{R}$. Αφού $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in (a, b)$ το T είναι και το σύνολο τιμών του περιορισμού της f στο (a, b). Συνεπώς η $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ είναι μονότονη συνάρτηση με σύνολο τιμών διάστημα του $\mathbb{R}$. Αλλά τότε (Θεώρημα 3.7.3) η $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ θα πρέπει να είναι συνεχής, άτοπο. □

Παράδειγμα 5.5.5. Θυμηθείτε ότι η συνάρτηση $\arctan x$ (ή $\tan^{-1} x$) ορίζεται ως η αντίστροφη της $f(x) = \tan x$ στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ και έχει παράγωγο

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1}\, dx = \int_0^1 (\arctan x)'\, dx = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}. \tag{5.5.11}$$

Θεώρημα 5.5.6. *(Θεμεμελιώδες θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού ΙΙ) Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση και έστω $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ με*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt \tag{5.5.12}$$

για κάθε $x \in [a, b]$ (για $x = a$ κατά σύμβαση δεχόμαστε ότι $F(a) = \int_a^a f(x)\, dx = 0$).

(α) Η F είναι συνεχής. Ειδικότερα η F ικανοποιεί την ανισότητα

$$\left|F(y) - F(x)\right| \le M|y - x| \tag{5.5.13}$$

όπου $M = \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$ και συνεπώς είναι μία Lipschitz συνάρτηση .

(β) Αν η f είναι συνεχής σε κάποιο $x_0 \in [a, b]$ τότε η F είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει ότι $F'(x_0) = f(x_0)$.

Απόδειξη. Καταρχάς παρατηρούμε ότι λόγω της ιδιότητας της Προσθετικότητας του ολοκληρώματος (Πρόταση 5.4.5) η F είναι καλά ορισμένη.

(α) Έστω $x, y \in [a, b]$. Αν $x = y$ τότε η ανισότητα είναι προφανής. Έστω $x \neq y$ και έστω $y > x$ (η απόδειξη είναι παρόμοια αν $y < x$). Από την Προσθετικότητα του Ολοκληρώματος έχουμε

$$F(y) = \int_a^y f(t)\, dt = \int_a^x f(t)\, dt + \int_x^y f(t)\, dt = F(x) + \int_x^y f(t)\, dt$$

και άρα από την (5.4.5) και την μονοτονία του ολοκληρώματος,

$$\Big|F(y) - F(x)\Big| = \Big|\int_x^y f(t)\ dt\Big| \le \int_x^y |f(t)|\ dt \le M(y-x)$$

(β) Επειδή

$$F'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$$

αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{x\to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$$

Ισοδύναμα, σύμφωνα με τον ορισμό του ορίου συνάρτησης πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$x \in [a,b] \text{ και } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \Big|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\Big| < \varepsilon \tag{5.5.14}$$

Έστω λοιπόν $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι συνεχής στο $x_0 \in [a,b]$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$x \in [a,b] \text{ και } |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/2 \tag{5.5.15}$$

Θα δείξουμε ότι το δ για το οποίο ισχύει η (5.5.15) ικανοποιεί και την (5.5.14).

Πράγματι, έστω $x \in [a,b]$ με $0 < |x - x_0| < \delta$. Ας υποθέσουμε ότι $x > x_0$ (η απόδειξη είναι παρόμοια για $x < x_0$). Παρατηρούμε ότι

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) = \frac{\int_{x_0}^x f(t)\ dt}{x - x_0} - f(x_0) = \frac{\int_{x_0}^x f(t)\ dt}{x - x_0} - \frac{\int_{x_0}^x f(x_0)\ dt}{x - x_0} = \frac{\int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))\ dt}{x - x_0}$$

Οπότε,

$$\begin{aligned}\Big|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\Big| &= \Big|\frac{\int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))\ dt}{x - x_0}\Big| \\ &\overset{(5.4.5)}{\le} \frac{\int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)|\ dt}{x - x_0} \\ &\overset{(5.5.15)}{\le} \frac{\int_{x_0}^x \frac{\varepsilon}{2}\ dt}{x - x_0} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\end{aligned}$$

□

Πόρισμα 5.5.7. *Κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ έχει αρχική.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 5.5.6 η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$ είναι παραγωγίσιμη με $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Άρα η F είναι μια αρχική της f. □

Πόρισμα 5.5.8. *(Θεώρημα Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τέτοιο ώστε*

$$\int_a^b f(x)\ dx = f(\xi)(b-a)$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 5.5.6 η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$ είναι παραγωγίσιμη με $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Εφαρμόζωντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την συνάρτηση F παίρνουμε

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = F'(\xi) \Leftrightarrow F(b) - F(a) = F'(\xi)(b - a) \Leftrightarrow \int_a^b f(x)\ dx = f(\xi)(b - a)$$

για κάποιο $\xi \in (a, b)$. □

Πόρισμα 5.5.9. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής με $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αν $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = 0$ τότε $f = 0$.*

Απόδειξη. Από το Από το Θεώρημα 5.5.6 η συνάρτηση $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη με $F'(x) = f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ και άρα η F είναι αύξουσα. Ειδικότερα, $F(a) \leq F(x) \leq F(b)$, για κάθε $x \in [a, b]$. Άρα αφού $F(a) = 0$ και $F(b) = \int_a^b f(x)\ dx = 0$, παίρνουμε ότι $F(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$, οπότε και $f(x) = F'(x) = 0$ για όλα τα $x \in [a, b]$. □

5.6 Μέθοδοι Ολοκλήρωσης

Υπάρχουν δύο μέθοδοι ολοκλήρωσης. Η πρώτη μέθοδος Ολοκλήρωσης προκύπτει από τον κανόνα παραγώγισης του γινομένου δύο συναρτήσεων

$$(fg)' = f'g + fg'$$

και καλείται **ολοκλήρωση κατά παράγοντες**. Η δεύτερη μέθοδος είναι συνέπεια του κανόνα αλυσίδας:

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t)$$

και καλείται **ολοκλήρωση με αντικατάσταση** (ή **ολοκλήρωση με αλλαγή μεταβλητής**).

Θεώρημα 5.6.1. *(Ολοκλήρωση κατά παράγοντες) Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες με f' και g' ολοκληρώσιμες τότε*

$$\int_a^b f'(x)g(x)\ dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\ dx \tag{5.6.1}$$

Απόδειξη. Οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς ως παραγωγίσιμες και άρα ολοκληρώσιμες. Συνεπώς οι fg, $f'g$ και fg' είναι ολοκληρώσιμες ως γινόμενο ολοκληρωσίμων. Επειδή $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ έχουμε ότι $f' \cdot g = (f \cdot g)' - f \cdot g'$. Άρα από την γραμμικότητα του ολοκληρώματος και το Θεώρημα 5.5.1,

$$\int_a^b f'(x)g(x)\ dx = \int_a^b (f(x)g(x))'\ dx - \int_a^b f(x) \cdot g'(x)\ dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x)\ dx.$$

□

Παράδειγμα 5.6.2.

$$\begin{aligned}\int_1^e \ln x\ dx = \int_1^e (x)' \ln x\ dx = [x\ln x]_1^e - \int_1^e x(\ln x)'\ dx &= [x\ln x]_1^e - \int_1^e x\frac{1}{x}\ dx \\ &= [x\ln x]_1^e - \int_1^e 1\ dx \\ &= [x\ln x]_1^e - [x]_1^e = [x\ln x - x]_1^e = [x(\ln x - 1)]_1^e\end{aligned}$$

Θεώρημα 5.6.3. *(Ολοκλήρωση με αντικατάσταση) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ παραγωγίσιμη με φ' ολοκληρώσιμη. Τότε*

$$\int_c^d f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\ dt = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x)\ dx \tag{5.6.2}$$

(όπου στην περίπτωση $\varphi(d) < \varphi(c)$, ορίζουμε ότι $\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x)\ dx = -\int_{\varphi(d)}^{\varphi(c)} f(x)\ dx$).

Απόδειξη. Έστω $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ μια αρχική της f (Πόρισμα 5.5.7). Τότε, από τον Κανόνα Αλυσίδας και από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού (Θεώρημα 5.5.1) έχουμε

$$\begin{aligned}\int_c^d f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\ dt &= \int_c^d F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\ dt \\ &= \int_c^d (F \circ \varphi)'(t)\ dt \\ &= (F \circ \varphi)\ (d) - (F \circ \varphi)\ (c) \\ &= F(\varphi(d)) - F(\varphi(c))\end{aligned} \tag{5.6.3}$$

Τώρα αν $\varphi(d) \geqslant \varphi(c)$ από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού έχουμε

$$F(\varphi(d)) - F(\varphi(c)) = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x)\ dx$$

αφού η F είναι μια αρχική της f. Αν τώρα συμβεί $\varphi(d) < \varphi(c)$ τότε

$$F(\varphi(d)) - F(\varphi(c)) = -(F(\varphi(c)) - F(\varphi(d))) = -\int_{\varphi(d)}^{\varphi(c)} f(x)\ dx$$

Συνεπώς κάνοντας στην περίπτωση αυτή την σύμβαση ότι με το σύμβολο $\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x)\ dx$ θα εννοούμε το $-\int_{\varphi(d)}^{\varphi(c)} f(x)\ dx$ το αποτέλεσμα και για τις δύο περιπτώσεις είναι το $\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x)\ dx$. □

Παράδειγμα 5.6.4. $\int_0^{\pi/2} \sin t \cdot \cos t\ dt = \dfrac{1}{2}$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin t \cos t\ dt &= \int_0^{\pi/2} \sin t(\sin t)'\ dt \\ &\overset{x=\sin t}{=} \int_0^1 x\ dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Παράδειγμα 5.6.5. $\int_0^{\pi/3} \tan t \; dt = \ln 2$. Πράγματι,

$$\int_0^{\pi/3} \tan t \; dt = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin t}{\cos t} \; dt = -\int_0^{\pi/3} \frac{(\cos t)'}{\cos t} \; dt$$
$$\overset{x=\cos t}{=} -\left(\int_1^{1/2} \frac{1}{x} \; dx\right) = \int_{1/2}^1 \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_{1/2}^1 = -\ln\frac{1}{2} = \ln 2$$

Πόρισμα 5.6.6. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Έστω $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ αύξουσα, επί και παραγωγίσιμη με φ' ολοκληρώσιμη. Τότε*

$$\int_a^b f(x) \; dx = \int_c^d f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \; dt \tag{5.6.4}$$

Απόδειξη. Αφού η $\varphi[c,d] \to [a,b]$ είναι αύξουσα και επί, θα πρέπει $\varphi(c) = a$ και $\varphi(d) = b$. Άρα από την (5.6.2) έχουμε

$$\int_c^d f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \; dt = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x) \; dx = \int_a^b f(x) \; dx$$

□

Παράδειγμα 5.6.7. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \; dx$$

Απόδειξη. Θέτουμε $x = \sin t$, $t \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Τότε

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \; dx &= \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \; (\sin t)' \; dt \\
&= \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| \cos t \; dt \\
&= \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cos t \; dt = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \; dt = I
\end{aligned}$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}
I = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \; dt &= \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t (\sin t)' \; dt \\
&= (\cos t \sin t)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} - \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)' \sin t \; dt \\
&= \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \; dt \\
&= \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t \; dt \\
&= \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt - I = \pi - I
\end{aligned}$$

και άρα $I = \frac{\pi}{2}$. Συνεπώς

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\ dx = \frac{\pi}{2}$$

□

Σημείωση 5.6.8. Αν η φ στο Πόρισμα 5.6.6 ειναι φθίνουσα και επί τότε $a = \varphi(d) < \varphi(c) = b$ και άρα από την (5.6.2) και την σύμβαση ότι $\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x)\ dx = -\int_{\varphi(d)}^{\varphi(c)} f(x)\ dx$ έχουμε

$$\int_c^d f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\ dt = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x)\ dx = -\int_{\varphi(d)}^{\varphi(c)} f(x)\ dx = -\int_a^b f(x)\ dx \tag{5.6.5}$$

Επειδή $\varphi' |geq 0$ (αντ. $\varphi' \leq 0$) αν φ αύξουσα (αντ. φθίνουσα) από τις (5.6.4) και (5.6.5) έπεται ότι για κάθε $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ μονότονη, επί και παραγωγίσιμη με φ' ολοκληρώσιμη ισχύει ότι

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_c^d f(\varphi(t)) \cdot |\varphi'(t)|\ dt \tag{5.6.6}$$

5.7 Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

Με τον όρο *ρητή συνάρτηση* εννοούμε μια συνάρτηση της μορφής $\frac{P(x)}{Q(x)}$ όπου $P(x), Q(x)$ πολυώνυμα με πραγματικο'υς συντελεστές. Αν ο βαθμός του πολυωνύμου $P(x)$ που βρίσκεται στον αριθμητή είναι γνήσια μεγαλύτερος από τον βαθμό του πολυωνύμου $Q(x)$ που είναι στον παρονομαστή τότε από την ταυτότητα της διαίρεσης των πολυωνύμων υπάρχουν δύο μοναδικά πολυώνυμα $\Pi(x)$ (*το πηλίκο*) και $R(x)$ (*το υπόλοιπο*) με τον βαθμό του $R(x)$ να είναι γνήσια μικρότερος του βαθμού του $Q(x)$ τέτοια ώστε $P(x) = \Pi(x) \cdot Q(x) + R(x)$ και άρα

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \Pi(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Οπότε,

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\ dx = \int \Pi(x)\ dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\ dx \tag{5.7.1}$$

Επειδή το ολοκλήρωμα ενός πολυωνύμου υπολογίζεται εύκολα,

$$\begin{aligned}\int (a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0)\ dx &= a_n \int x^n\ dx + \cdots + a_1 \int x\ dx + a_0 \int dx \\ &= \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \cdots + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x\end{aligned}$$

από την σχέση (5.7.1) βλέπουμε ότι η ολοκλήρωση μιας ρητής συνάρτησης ανάγεται στην ολοκλήρωση μιας ρητής συνάρτησης όπου ο βαθμός του αριθμητή είναι *γνήσια μικρότερος* του βαθμού του παρονομαστή.

Ορισμός 5.7.1. *Μια ρητή συνάρτηση* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *καλείται* ***γνήσια ρητή*** *όταν ο βαθμός του* $P(x)$ *είναι γνήσια μικρότερος του βαθμού του* $Q(x)$.

Για να ολοκληρώσουμε μια γνήσια ρητή συνάρτηση χρησιμοποιούμε μια μέθοδο που καλείται *διάσπαση σε απλά κλάσματα*. Το πρώτο βήμα αυτής της μεθόδου είναι η παραγοντοποίηση του παρονομαστή.

Αποδεικνύεται ότι ένα πολυώνυμο $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ με πραγματικούς συντελεστές και συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου $a_{n+1} = 1$ παραγοντοποιείται με μοναδικό τρόπο σε ένα γινόμενο πρωτοβαθμίων όρων της μορφής $x - \rho$, όπου $\rho \in \mathbb{R}$ και σε ένα γινόμενο δευτεροβαθμίων όρων (τριωνύμων) της μορφής $x^2 + bx + c$, τα οποία δεν έχουν πραγματικές ρίζες, με άλλα λόγια η διακρίνουσά τους είναι αρνητική. Πιο συγκεκριμένα έχουμε το εξής.

Θεώρημα 5.7.2. *Κάθε πολυώνυμο $Q(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ με πραγματικούς συντελεστές και συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου $a_{n+1} = 1$ γράφεται στην μορφή*

$$Q(x) = Q_1(x) \cdot Q_2(x)$$

όπου

$$Q_1(x) = \prod_{i=1}^{m}(x - \rho_i)^{n_i} \text{ και } Q_2(x) = \prod_{j=1}^{\ell}(x^2 + b_jx + c_j)^{k_j} \tag{5.7.2}$$

όπου $n_i, k_j \in \mathbb{N}$, $\rho_i, b_j, c_j \in \mathbb{R}$ και $\Delta_j = b_j^2 - 4c_j < 0$.

Την μορφή $Q(x) = Q_1(x) \cdot Q_2(x)$ με $Q_1(x), Q_2(x)$ όπως στην (5.7.2) θα την καλούμε *ανάλυση του $Q(x)$*. Αντιστοιχεί κατά κάποιο τρόπο στην γνωστή ανάλυση των ακεραίων σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Όπως οι πρώτοι αριθμοί δεν γράφονται ως γινόμενο μικρότερων αριθμών, τα πρωτοβάθμια πολυώνυμα καθώς και τα δευτεροβάθμια με αρνητική διακρίνουσα είναι τα μοναδικά πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές που δεν μπορούν να αναλυθούν σε γινόμενο άλλων απλούστερης μορφής.

Η διάσπαση τώρα μιας ρητής συνάρτησης σε απλά κλάσματα περιγράφεται στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 5.7.3. *Έστω $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ μία γνήσια ρητή συνάρτηση.*

(i) *Αν $Q(x) = (x - \rho)^n \cdot G(x)$, όπου $\rho \in \mathbb{R}$ και το $x - \rho$ δεν διαιρεί το $G(x)$ (ισοδύναμα $G(\rho) \neq 0$) τότε υπάρχουν μοναδικοί $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε*

$$\frac{P(x)}{(x-\rho)^n \cdot G(x)} = \frac{A_1}{x-\rho} + \cdots + \frac{A_n}{(x-\rho)^n} + \frac{R(x)}{G(x)} \tag{5.7.3}$$

όπου ο βαθμός του $R(x)$ είναι γνήσια μικρότερος του βαθμού του $G(x)$.

(ii) *Αν $Q(x) = (x^2 + bx + c)^k \cdot G(x)$ με $\Delta = b^2 - 4c < 0$ και το $x^2 + bx + c$ δεν διαιρεί το $G(x)$, τότε υπάρχουν μοναδικοί $B_1, C_1, \ldots, B_k, C_k \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε*

$$\frac{P(x)}{(x^2+bx+c)^k \cdot G(x)} = \frac{B_1x + C_1}{x^2+bx+c} + \cdots + \frac{B_kx + C_k}{(x^2+bx+c)^k} + \frac{R(x)}{G(x)} \tag{5.7.4}$$

όπου ο βαθμός του $R(x)$ είναι γνήσια μικρότερος του βαθμού του $G(x)$.

Παράδειγμα 5.7.4. Υπάρχουν μοναδικοί $A_1, \ldots, A_5 \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)^2(x^2+2x+5)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{A_3}{(x+1)^2} + \frac{A_4x + A_5}{x^2+2x+5}$$

Από το Θεώρημα 5.7.3 έχουμε ότι η ολοκλήρωση των γνήσια ρητών συναρτήσεων ανάγεται στην

ολοκλήρωση κλασμάτων της μορφής

$$\frac{1}{(x-\rho)^n} \quad \text{και} \quad \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^k} \text{ με } b^2-4c<0$$

Παράδειγμα 5.7.5. Να αναλυθεί η συνάρτηση $\dfrac{10x}{(x+1)(x^2+9)}$ σε απλά κλάσματα και να βρεθεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int \frac{10x}{(x+1)(x^2+9)}\,dx$.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.7.3 έχουμε

$$\frac{10x}{(x+1)(x^2+9)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+9} \tag{5.7.5}$$

όπου $A, B, C \in \mathbb{R}$.

Για να βρούμε τις σταθερές A, B, C εργαζόμαστε ως εξής: Κάνοντας ομώνυμα τα κλάσματα και εκτελώντας τις πράξεις στο δεξί μέλος της (5.7.5) παίρνουμε

$$\begin{aligned}\frac{10x}{(x+1)(x^2+9)} &= \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+9}\\ &= \frac{A(x^2+9)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2+9)}\\ &= \frac{(A+B)x^2+(B+C)x+9A+C}{(x+1)(x^2+9)}\end{aligned}$$

και άρα

$$(A+B)x^2+(B+C)x+9A+C = 10x$$

Συνεπώς έχουμε το σύστημα

$$A+B=0, B+C=10, 9A+C=0$$

απ΄ όπου συμπεραίνουμε ότι

$$A=-1, B=1, C=9$$

Άρα

$$\frac{10x}{(x+1)(x^2+9)} = -\frac{1}{x+1} + \frac{x+9}{x^2+9}$$

Οπότε

$$\int \frac{10x}{(x+1)(x^2+9)}\,dx = -\int \frac{1}{x+1}\,dx + \int \frac{x+9}{x^2+9}\,dx \tag{5.7.6}$$

Έχουμε

$$\int \frac{1}{x+1}\,dx = \ln|x+1|$$

και

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+9}{x^2+9}\,dx &= \frac{1}{9}\int \frac{x+9}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}\,dx \\
&\overset{t=x/3,dx=3dt}{=} \frac{1}{9}\int \frac{3t+9}{t^2+1}\,3\,dt \\
&= \int \frac{t+3}{t^2+1}\,dt \\
&= \int \frac{t}{t^2+1}\,dt + \int \frac{3}{t^2+1}\,dt \\
&\overset{u=t^2+1,du=2t\ dt}{=} \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} + 3\int \frac{1}{t^2+1}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\ln|u| + 3\arctan t = \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + 3\arctan t \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2}{9}+1\right) + 3\arctan\left(\frac{x}{3}\right) = \ln\sqrt{\frac{x^2}{9}+1} + 3\arctan\left(\frac{x}{3}\right).
\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned}
\frac{10x}{(x+1)(x^2+9)} &= -\ln|x+1| + \ln\sqrt{\frac{x^2}{9}+1} + 3\arctan\left(\frac{x}{3}\right) \\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{\frac{x^2}{9}+1}}{|x+1|}\right) + 3\arctan\left(\frac{x}{3}\right)
\end{aligned}$$

5.8 Μερικές γεωμετρικές εφαρμογές του ολοκληρώματος

5.8.1 Εμβαδά επίπεδων χωρίων

Το βασικό κίνητρο για τον ορισμό του ολοκληρώματος ήταν ο υπολογισμός καμπυλόγραμμων επίπεδων σχημάτων. Βασικά παραδείγματα τέτοιων σχημάτων είναι τα χωρία κάτω από το γράφημα μιας θετικής συνάρτησης. Πιο συγκεκριμμένα έχουμε το εξής.

Θεώρημα 5.8.1. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής και μη αρνητική συνάρτηση. Έστω*

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b \text{ και } 0 \le y \le f(x)\}$$

το υπογράφημα της f, δηλαδή το χωρίο του επιπέδου που περιορίζεται από το γράφημα της συνάρτησης, τον άξονα x και τις δύο κάθετες στον άξονα x στα σημεία $x = a$ και $x = b$. Τότε το εμβαδό του S ισούται με $\int_a^b f(x)\,dx$.

Παράδειγμα 5.8.2. Το εμβαδό E ενός κύκλου ακτίνας R δίνεται από τον τύπο $E = \pi R^2$.

Απόδειξη. Ο κύκλος του $\mathbb{R}^2$ με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα R αποτελείται από όλα τα σημεία (x,y) που ικανοποιούν την σχέση

$$x^2 + y^2 = R^2 \tag{5.8.1}$$

Θεωρώντας το άνω ημικύκλιο, δηλαδή τα σημεία (x,y) με $y > 0$ και λύνοντας την (5.8.1) ως προς y

βλέπουμε ότι αυτό είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad -R \leq x \leq R$$

Παρατηρούμε ότι το εμβαδό του κύκλου με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα R είναι το διπλάσιο του εμβαδού του ημικυκλίου, το οποίο με την σειρά του είναι το εμβαδό του υπογραφήματος της συνάρτησης f. Συνεπώς, από το Θεώρημα 5.8.1, έχουμε

$$E = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} = 2R\int_{-R}^{R} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2}\, dx \tag{5.8.2}$$

και κάνωντας την αντικατάσταση $y = x/R$ $dy = dx/R$ παίρνουμε

$$E = 2R^2\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - y^2}\, dy \tag{5.8.3}$$

Από το Παράδειγμα 5.6.7 έχουμε $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2}\, dy = \pi/2$ και άρα

$$E = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} = 2R^2\frac{\pi}{2} = \pi R^2$$

□

5.8.2 Μήκος επίπεδης καμπύλης

Με τον όρο *(επίπεδη) καμπύλη* θα εννοούμε ένα υποσύνολο του C του $\mathbb{R}^2$ για το οποίο υπάρχουν δύο συνεχείς συναρτήσεις

$$x(t), y(t) : I \to \mathbb{R}$$

όπου I ένα διάστημα του $\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = x(t) \quad \text{και } y = y(t),\ t \in [a,b]\}$$

Το ζεύγος $(x(t), y(t))$, $t \in [a,b]$ αποτελεί όπως λέμε *μια παραμετρική αναπαράσταση* της καμπύλης. Αν οι συναρτήσεις $x(t), y(t)$ είναι επιπλέον και παραγωγίσιμες ως προς t με συνεχείς παραγώγους τότε η παραμετρική αναπαράσταση θα καλείται *συνεχώς διαφορίσιμη*. Αν $I = [a,b]$ τότε τα *άκρα* της καμπύλης ορίζονται να είναι τα σημεία $A = (x(a), y(a))$ και $B = (x(b), y(b))$. Αν τα άκρα ταυτίζονται η καμπύλη καλείται *κλειστή*. Αν για κάθε σημείο (x,y) της καμπύλης εκτός ίσως των άκρων υπάρχει μοναδικό $t \in (a,b)$ με $x = x(t)$ και $y = y(t)$ τότε η παραμετρική αναπαράσταση της καμπύλης θα καλείται *απλή*.

Το *μήκος* της C ορίζεται μέσω των τεθλασμένων γραμμών με κορυφές σημεία της καμπύλης. Αποδεικνύεται ότι αν μια καμπύλη C έχει μια απλή και συνεχώς διαφορίσιμη παραμετρική αναπαράσταση $(x(t), y(t))$ $t \in [a,b]$ τότε το μήκος $L(C)$ της καμπύλης δίνεται από τον τύπο

$$L(C) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt \tag{5.8.4}$$

Παράδειγμα 5.8.3. Το μήκος L ενός κύκλου ακτίνας R δίνεται από τον τύπο $L = 2\pi R$.

Πράγματι, οι συναρτήσεις

$$x(t) = R\cos t, \quad y(t) = R\sin t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

αποτελούν παραμετρικές εξισώσεις ενός κύκλου ακτίνας $R > 0$ και κέντρου $(0, 0)$. Άρα, από τον τύπο (5.8.4), έχουμε

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t}\, dt = R^2 \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt = R^2 \int_0^{2\pi} dt = 2\pi R.$$

Στην περίπτωση όπου η C είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο τότε μια απλή και συνεχώς διαφορίσιμη παραμετρική αναπαράσταση της C δίνεται από τους τύπους $x(t) = t$ και $y(t) = f(t)$ για κάθε $t \in [a, b]$ και άρα η (5.8.4) παίρνει την μορφή

$$L(C) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx \tag{5.8.5}$$

Παράδειγμα 5.8.4. Να βρεθεί το μήκος της καμπύλης με εξίσωση $y = \ln(1 - x^2)$, $x \in [0, 1/2]$.

Έχουμε $f(x) = \ln(1 - x^2)$ και άρα

$$f'(x) = \frac{1}{1 - x^2}(1 - x^2)' = \frac{-2x}{1 - x^2}$$

για κάθε $x \in [0, 1/2]$. Συνεπώς

$$\begin{aligned}
L = \int_0^{1/2} \sqrt{1 + \frac{4x^2}{(1 - x^2)^2}}\, dx &= \int_0^{1/2} \sqrt{\frac{(1 + x^2)^2}{(1 - x^2)^2}}\, dx \\
&= \int_0^{1/2} \frac{1 + x^2}{1 - x^2}\, dx \\
&= \int_0^{1/2} \frac{2 - (1 - x^2)}{1 - x^2}\, dx \\
&= \int_0^{1/2} \left(\frac{2}{1 - x^2} - 1\right) dx \\
&= \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 + x} - 1\right) dx \\
&= [-\ln(1 - x) + \ln(1 + x) - x]_0^{1/2} \\
&= \left[\ln \frac{1 + x}{1 - x} - x\right]_0^{1/2} = \ln 3 - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$