

ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
1ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Άσκηση 1. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει ρητός αριθμός a τέτοιος ώστε $a^2 = 3$.

Άσκηση 2. (α) Αποδείξτε ότι ο αριθμός $\sqrt{6}$ είναι άρρητος.

(β) Αποδείξτε ότι ο αριθμός $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ είναι άρρητος.

Άσκηση 3. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή αποδείξτε ότι, για κάθε φυσικό αριθμό n , ισχύει η ταυτότητα

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n + 1) = \frac{n(n + 1)(n + 2)}{3}.$$

Άσκηση 4. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή αποδείξτε ότι, για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύουν οι ανισότητες

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$$

και

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{2n - 1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n + 1}}.$$

Άσκηση 5. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή αποδείξτε ότι, για κάθε πραγματικό αριθμό x και για κάθε φυσικό αριθμό n , ισχύει η ανισότητα

$$|\sin nx| \leq n |\sin x|.$$

Άσκηση 6. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή αποδείξτε ότι το πλήθος των υποσυνόλων ενός συνόλου με n στοιχεία είναι ίσο με 2^n .

Άσκηση 7. Ένας φυσικός αριθμός $p > 1$ λέγεται πρώτος αν οι μόνοι φυσικοί αριθμοί που διαιρούν τον p είναι ο 1 και ο p . Αποδείξτε με επαγωγή ότι κάθε φυσικός αριθμός $n \geq 2$ γράφεται ως γινόμενο πρώτων, δηλαδή υπάρχουν $k \in \mathbb{N}$ και (όχι απαραίτητα διακεκριμένοι) πρώτοι p_1, \dots, p_k τέτοιοι ώστε $n = p_1 p_2 \dots p_k$.