Πρόταση 0.1 (Ανισότητες Stirling). *Για κάθε πραγματικό αριθμό $x > 0$ ισχύουν οι ανισότητες:*

(1) $\ln(x+1) < \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{x+1}$

(2) $1 < \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2}\right)\ln(x+1) < 1 + \dfrac{x^2}{x+1}$

Απόδειξη. Για την (1) θεωρούμε τη συνάρτηση $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{x+1} - \ln(x+1)$$

Η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = x + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} = x\left[1 - \frac{1}{(x+1)^2}\right] > 0,$$

για κάθε $x > 0$. Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα και άρα $f(x) > f(0) = 0$ για κάθε $x > 0$, αποδεικνύοντας την ανισότητα.

Για τη (2) έχουμε καταρχήν, λόγω της (1), ότι

$$\frac{\ln(x+1)}{x} < \frac{x}{2} + \frac{1}{x+1},\ \forall\, x > 0,$$

ενώ από γνωστή ανισότητα έχουμε ακόμα ότι

$$\ln(x+1) < x,\ \forall\, x > 0.$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω ανισότητες λαμβάνουμε ότι

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)\ln(x+1) < \frac{x}{2} + \frac{1}{x+1} + \frac{x}{2} = x + \frac{1}{x+1} = 1 + \frac{x^2}{x+1}$$

για κάθε $x > 0$, αποδεικνύοντας το δεύτερο σκέλος της ανισότητας (2).

Για το πρώτο σκέλος της (2), θεωρούμε τη συνάρτηση $g\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x) = \ln(x+1) - \frac{2x}{x+2}$$

Η g είναι παραγωγίσιμη με

$$g'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{4}{(x+2)^2} = \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2} > 0,\ \forall\, x > 0.$$

Έπεται τώρα ότι η g είναι γνησίως αύξουσα και άρα $g(x) > g(0) = 0$ για κάθε $x > 0$. Άμεση συνέπεια αυτής της ανισότητας είναι το πρώτο σκέλος της (2). $\square$

Θεώρημα 0.2. *Αν $a_n = \dfrac{(n!)e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$ και $b_n = a_n e^{-\frac{1}{n}}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

(1) *Η ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι γνησίως φθίνουσα.*

(2) *Η ακολουθία* $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ *είναι γνησίως αύξουσα.*
(3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *με* $1 \leq a < +\infty$.

Απόδειξη. Για το (1) έχουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{[(n+1)!]e^{n+1}}{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}}\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{(n!)e^n} = (n+1)e\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{(n+1)(n+1)^{n+\frac{1}{2}}}\\ &= \frac{e}{(1+\frac{1}{n})^{n+\frac{1}{2}}}.\end{aligned}$$

Κατά συνέπεια, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ αν και μόνο αν $e < \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$. Η τελευταία ανισότητα ισοδυναμεί με την

$$1 < (n+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{n})$$

η οποία είναι αληθής ως ειδική περίπτωση του πρώτου σκέλους της δεύτερης ανισότητας Stirling, για $x = \dfrac{1}{n}$. Αποδείχτηκε ότι $a_{n+1} < a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή η $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Για το (2) έχουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n}e^{(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})} = \frac{e^{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}}{(1+\frac{1}{n})^{n+\frac{1}{2}}},$$

κάνοντας χρήση της ισότητας στην αρχή της απόδειξης του (1). Έπεται τώρα ότι $b_{n+1} > b_n$ αν και μόνο αν

$$(n+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{n}) < 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n^2}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}.$$

Η τελευταία ανισότητα είναι αληθής ως ειδική περίπτωση του δεύτερου σκέλους της δεύτερης ανισότητας Stirling, για $x = \dfrac{1}{n}$. Είναι σαφές τώρα ότι $b_n < b_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και άρα η $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι γνησίως αύξουσα.

Για το (3), έχουμε, λόγω του (1), ότι η $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μία γνησίως φθίνουσα ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών και συνεπώς υπάρχει το όριο $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ και είναι ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός. Θα δειχτεί ότι $a \geq 1$. Πράγματι, έχουμε από το (2) ότι

$$1 = b_1 \leq b_n < a_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

και άρα $1 \leq a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ □

Θεώρημα 0.3 (Θεώρημα Wallis). *Θέτουμε* $x_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}\dfrac{4^n}{\sqrt{n}}$, *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$. *Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

(1) $x_n\sqrt{\dfrac{2n}{2n+1}} < \sqrt{\pi} < x_n$, *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.
(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{\pi}$

Απόδειξη. Κάνοντας χρήση της παραγοντικής ολοκλήρωσης δείχνουμε εύκολα ότι

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)dx = \frac{2n-1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2}(x)dx,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

και

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(x)dx = \frac{2n}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1}(x)dx,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Οι παραπάνω αναδρομικές σχέσεις άμεσα οδηγούν στις ακόλουθες σχέσεις

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)dx = \frac{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}{\prod_{k=1}^{n}(2k)}\left(\frac{\pi}{2}\right),\ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

και

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(x)dx = \frac{\prod_{k=1}^{n}(2k)}{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}\left(\frac{1}{2n+1}\right),\ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Στοιχειώδεις αλγεβρικές πράξεις δίνουν ισοδύναμα ότι

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)dx = \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\left(\frac{\pi}{2}\right),\ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

και

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(x)dx = \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}\left(\frac{1}{2n+1}\right),\ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Όμως, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1}(x)dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(x)dx$$

και άρα οι παραπάνω ισότητες δίνουν ότι

$$\frac{4^{n-1}[(n-1)!]^2}{(2n-2)!}\left(\frac{1}{2n-1}\right) > \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\left(\frac{\pi}{2}\right) > \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}\left(\frac{1}{2n+1}\right)$$

ή,

$$\frac{4^n(n!)^2}{2n[(2n)!]} > \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\left(\frac{\pi}{2}\right) > \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}\left(\frac{1}{2n+1}\right)$$

ή,

$$\left[\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}\right]^2\left(\frac{1}{n}\right) > \pi > \left[\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}\right]^2\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{2n}{2n+1}\right)$$

ή,

$$x_n^2 > \pi > \frac{2n}{2n+1}x_n^2,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

και η (1) αποδείχτηκε. Για τον ισχυρισμό (2) έχουμε ότι

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}}{2n+1},\ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

και άρα

$$\frac{x_{n+1}^2}{x_n^2} = \frac{4n^2+4n}{4n^2+4n+1} < 1,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Συνεπώς η ακολουθία $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μία γνησίως φθίνουσα ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Θα υπάρχει λοιπόν το όριο $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, με x μη αρνητικό πραγματικό αριθμό. Έπεται τώρα άμεσα από την (1) ότι $x = \sqrt{\pi}$. □

Πόρισμα 0.4 (Θεώρημα Stirling)**.**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}} = \sqrt{2\pi}$$

Απόδειξη. Αν $a_n = \dfrac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε γνωρίζουμε από το Θεώρημα 0.2 ότι $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ όπου $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 1$. Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι

$$\frac{a_n^2}{a_{2n}} = \frac{(n!)^2 e^{2n}(2n)^{2n}\sqrt{2n}}{n^{2n+1}[(2n)!]e^{2n}},\ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

και άρα

$$\frac{a_n^2}{a_{2n}} = \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}},\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Παίρνοντας όρια για $n \to \infty$ και στα δύο μέλη της παραπάνω ισότητας, λαμβάνουμε ότι

$$a = \sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}\frac{4^n}{\sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}$$

από το Θεώρημα Wallis. □

Παρατήρηση . $\lim_{n\to\infty}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}\dfrac{1}{4^n} = 0$ *και* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{1}{4^n} = +\infty$. *Η εναλλάσουσα σειρά* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{1}{4^n}$ *συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. Πράγματι, θέτοντας* $c_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}\dfrac{1}{4^n}$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$, *έχουμε ότι*

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{2n+1}{2n+2},\ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

και άρα η ακολουθία $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ *είναι γνησίως φθίνουσα. Έπεται τώρα ότι* $c_1 = \dfrac{1}{2}$ *και*

$$c_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{2k+1}{2k+2}\right), \; \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Παίρνοντας λογαρίθμους και στα δύο μέλη της ανωτέρω ισότητας λαμβάνουμε

$$\ln(2c_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{2k+1}{2k+2}\right), \; \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Λαμβάνοντας υπόψη το όριο $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ *και εφαρμόζοντας το κριτήριο οριακής σύγκρισης για τις σειρές* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$ *και*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{2n+1}\right),$$

συμπεραίνουμε ότι $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right) = +\infty$. *Συνεπώς,*

$$\lim_{n\to\infty}\ln(2c_{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right) = -\infty,$$

καταλήγοντας στο συμπέρασμα ότι $\displaystyle\lim_{n\to\infty} c_n = 0$. *Συμπεραίνουμε επίσης, μέσω του κριτηρίου Leibnitz, ότι η εναλλάσουσα σειρά* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n c_n$ *συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. Τέλος, εφαρμόζοντας το κριτήριο Raabe-Duhamel για τη σειρά* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, *έχουμε ότι*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{c_{n+1}}{c_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+2} = \frac{1}{2} < 1,$$

και άρα $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n = +\infty$.