

Μαθηματική Ανάλυση:
Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών
και Διανυσματική Ανάλυση

Σημειώσεις από τις παραδόσεις

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Αθήνα – 2024

Περιεχόμενα

1	Ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^d$, Ακολουθίες, Όριο και συνέχεια συνάρτησης	1
1.1	Ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^d$	1
1.1.1	Βασικοί ορισμοί	1
1.1.2	Το σύννητες εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^d$	1
1.1.3	Η Ευκλείδεια νόρμα και απόσταση στον $\mathbb{R}^d$	2
1.1.4	Βασικές περιοχές σημείων στον $\mathbb{R}^d$	3
1.1.5	Χαρακτηρισμοί σημείων και υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$	3
1.2	Ακολουθίες στον χώρο $\mathbb{R}^d$	5
1.2.1	Βασικοί ορισμοί	5
1.2.2	Θεώρημα Bolzano-Weierstrass στον $\mathbb{R}^d$	6
1.2.3	Ακολουθίες Cauchy στον $\mathbb{R}^d$	7
1.3	Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών	8
1.3.1	Ταξινόμηση συναρτήσεων πολλών μεταβλητών	8
1.3.2	Ανάλυση μιας συνάρτησης $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$ σε συνιστώσες συναρτήσεις.	10
1.4	Όριο συνάρτησης πολλών μεταβλητών	10
1.4.1	Όριο βαθμωτής συνάρτησης	11
1.5	Όριο γενικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών	14
1.6	Συνέχεια συνάρτησης πολλών μεταβλητών	14
1.7	Ερωτήσεις και Ασκήσεις	15
2	Παραγωγήση πραγματικής συνάρτησης δύο μεταβλητών	17
2.1	Μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης	17
2.2	Παράγωγος κατά κατεύθυνση	19
2.3	Παράγωγος και διαφορικό	20
2.4	Εφαπτόμενο επίπεδο	23
2.5	Κλίση, σχέση παραγώγου και κατά κατεύθυνση παραγώγων	23
2.6	Σχέση παραγώγου και μερικών παραγώγων	27
2.7	Ερωτήσεις και Ασκήσεις	29
3	Πρώτος κανόνας αλυσίδας, Θεώρημα μέσης τιμής	31
3.1	Καμπύλες στον $\mathbb{R}^2$	31
3.2	Κανόνας αλυσίδας	32
3.3	Εφαρμογές	34
3.3.1	Ισοσταθμικές καμπύλες και κλίση	34

3.3.2	Θεώρημα μέσης τιμής για πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών	35
3.3.3	Κανόνας αλυσίδας για μερικές παραγώγους	36
3.4	Ασκήσεις	37
4	Παράγωγοι ανώτερης τάξης	43
4.1	Μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης	43
4.2	Συμμετρία των μεικτών παραγώγων	44
4.3	Μερικές παράγωγοι ανώτερης τάξης	47
5	Θεώρημα Taylor για πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών	49
5.1	Σύντομη επανάληψη	49
5.2	Η συνάρτηση $F(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$	50
5.3	Τύπος Taylor για πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών	52
5.4	Θεώρημα Taylor για πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών	55
6	Τοπικά ακρότατα πραγματικών συναρτήσεων δύο μεταβλητών	63
6.1	Βασικές έννοιες	63
6.1.1	Τοπικά ακρότατα	63
6.1.2	Συνεχείς συναρτήσεις σε συμπαγή σύνολα	63
6.1.3	Κρίσιμα σημεία	64
6.2	Τετραγωνικές μορφές στον $\mathbb{R}^2$	65
6.3	Το κριτήριο δεύτερης παραγώγου για τοπικά ακρότατα σε ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$	68
6.4	Ολικά ακρότατα σε κλειστά και φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ με εσωτερικό	73
6.5	Τοπικά ακρότατα υπό συνθήκη – Μέθοδος των πολλαπλασιαστών Lagrange	74
6.6	Ασκήσεις	78
7	Θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης	81
7.1	Το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης για δύο μεταβλητές	81
7.2	Το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης για πολλές μεταβλητές	85
8	Διπλό ολοκλήρωμα	89
8.1	Διπλό ολοκλήρωμα σε ορθογώνιο	89
8.2	Σύνολα μέτρου 0 και θεώρημα Lebesgue σε ορθογώνια	97
8.3	Διπλό ολοκλήρωμα πάνω σε φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$	102
8.4	Θεώρημα Fubini σε απλά χωρία	107
8.5	Θεώρημα αντικατάστασης	111
8.5.1	Μετασχηματισμοί στο επίπεδο	111
8.5.2	Θεώρημα αντικατάστασης	112
8.6	Εφαρμογές του διπλού ολοκληρώματος	118
8.6.1	Υπολογισμός όγκων	118
8.6.2	Υπολογισμός εμβαδών επίπεδων χωρίων	121
8.6.3	Υπολογισμός μάζας και κέντρου μάζας	122
8.6.4	Επίλυση προβλήματος αρχικών τιμών	123

9 Τριπλό Ολοκλήρωμα	125
9.1 Τριπλό ολοκλήρωμα σε ορθογώνιο	125
9.2 Ολοκλήρωση σε xy -απλά χωρία	126
9.3 Ολοκλήρωση σε yz -απλά χωρία	126
9.4 Ολοκλήρωση σε xz -απλά χωρία	127
9.5 Παραδείγματα	127
9.6 Αλλαγή μεταβλητών στο τριπλό ολοκλήρωμα	136
9.6.1 Θεώρημα αντικατάστασης	136
9.6.2 Μετασχηματισμός σφαιρικών συντεταγμένων	137
10 Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα	143
10.1 Καμπύλες στο επίπεδο	143
10.2 Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στο επίπεδο	147
10.2.1 Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα α' είδους	147
10.2.2 Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β' είδους	147
10.2.3 Ανεξαρτησία του ολοκληρώματος από τον δρόμο	151
10.3 Θεώρημα Green	159
10.4 Υπολογισμός εμβαδού με επικαμπύλιο ολοκλήρωμα	165
10.5 Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στον χώρο	166
10.5.1 Βασικοί ορισμοί	166
10.5.2 Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στον χώρο	167
10.5.3 Ανεξαρτησία του ολοκληρώματος από τον δρόμο	169
11 Επιφανειακό ολοκλήρωμα	173
11.1 Επιφάνειες στον χώρο	173
11.1.1 Επιφάνειες	173
11.1.2 Απλές κανονικές επιφάνειες	177
11.2 Επιφανειακό ολοκλήρωμα	178
11.2.1 Επιφανειακό ολοκλήρωμα βαθμωτής συνάρτησης	178
11.2.2 Επιφανειακό ολοκλήρωμα διανυσματικής συνάρτησης	182
11.2.3 Θεώρημα απόκλισης του Gauss	186
11.3 Θεώρημα Stokes	188

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^d$, Ακολουθίες, Όριο και συνέχεια συνάρτησης

1.1 Ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^d$

1.1.1 Βασικοί ορισμοί

Ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^d$ είναι το σύνολο όλων των σημείων (ή διανυσμάτων)

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$$

(όπου $x_i \in \mathbb{R}$ για κάθε $1 \leq i \leq d$), εφοδιασμένο με τις πράξεις της πρόσθεσης:

$$(x_1, \dots, x_d) + (y_1, \dots, y_d) = (x_1 + y_1, \dots, x_d + y_d)$$

για κάθε $(x_1, \dots, x_d), (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$ και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού:

$$\lambda(x_1, \dots, x_d) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_d)$$

για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και κάθε $(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$.

Τα διανύσματα $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $\mathbf{e}_d = (0, \dots, 0, 1)$ αποτελούν τη λεγόμενη *συνήθη βάση* του $\mathbb{R}^d$. Παρατηρήστε ότι τα διανύσματα $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d$ είναι όντως μια βάση του $\mathbb{R}^d$ αφού είναι γραμμικά ανεξάρτητα και επίσης αν $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$ είναι τυχόν διάνυσμα του $\mathbb{R}^d$ τότε

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) = \sum_{i=1}^d x_i \mathbf{e}_i.$$

1.1.2 Το σύννηθες εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^d$

Για κάθε ζεύγος διανυσμάτων $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$ και $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$ ορίζουμε

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^d x_i y_i.$$

Το $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ είναι (το σύννηθες) εσωτερικό γινόμενο των $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι ικανοποιεί τα παρακάτω:

- (1) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \sum_{i=1}^d x_i^2 \geq 0$ και άρα $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$ αν και μόνο αν $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- (2) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$.
- (3) $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$.
- (4) $(\lambda \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$.

Αν $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$ τότε λέμε ότι τα $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ είναι *ορθογώνια*. Παρατηρήστε ότι $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0$ για κάθε $i \neq j$, δηλαδή οποιαδήποτε δύο διαφορετικά διανύσματα της συνήθους βάσης του $\mathbb{R}^d$ είναι ορθογώνια.

1.1.3 Η Ευκλείδεια νόρμα και απόσταση στον $\mathbb{R}^d$

Για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ ορίζουμε το *μέτρο* (ή *νόρμα*) του $\mathbf{x}$ να είναι η ποσότητα

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^d x_i^2}.$$

Κατ' αναλογία προς την ιδιότητα $|x| = \sqrt{x^2}$ για $x \in \mathbb{R}$, παρατηρούμε ότι

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}.$$

Πρόταση 1.1.1 (Ανισότητα Cauchy-Schwarz). Αν $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ είναι δύο διανύσματα στον $\mathbb{R}^d$ τότε

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|,$$

ή *ισοδύναμα*

$$\left| \sum_{i=1}^d x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^d x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^d y_i^2}$$

για κάθε $x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_d \in \mathbb{R}$.

Επίσης είναι εύκολο να διαπιστώσουμε τις παρακάτω ιδιότητες (ανάλογες των ιδιοτήτων της απόλυτης τιμής στο $\mathbb{R}$):

1. $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ και $\|\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
2. $\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|$.
3. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

Τέλος, όπως στο $\mathbb{R}$ η απόσταση δύο πραγματικών αριθμών είναι η απόλυτη τιμή της διαφοράς τους, η ποσότητα

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^d |x_i - y_i|^2}$$

ορίζεται να είναι η *απόσταση* των $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_d)$. Παρατηρήστε ότι

1. $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{y}$.

2. $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$ και
3. $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| + \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|$.

1.1.4 Βασικές περιοχές σημείων στον $\mathbb{R}^d$

Έστω $\mathbf{x}_0 = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ και $\varepsilon > 0$. Το σύνολο

$$B_\varepsilon(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon\}$$

καλείται *ανοικτή μπάλα του $\mathbb{R}^d$ με κέντρο το $\mathbf{x}_0$ και ακτίνα ε* . Με άλλα λόγια, η ανοικτή μπάλα $B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ αποτελείται από όλα τα σημεία του $\mathbb{R}^d$ που απέχουν από το $\mathbf{x}_0$ απόσταση γνήσια μικρότερη από ε . Οι ανοικτές μπάλες $B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ λέγονται και *βασικές ανοικτές περιοχές του $\mathbf{x}_0$* . Το σύνολο

$$\overline{B}_\varepsilon(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq \varepsilon\}$$

καλείται *κλειστή μπάλα του $\mathbb{R}^d$ με κέντρο $\mathbf{x}_0$ και ακτίνα ε* . Τέλος, το σύνολο

$$S_\varepsilon(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = \varepsilon\}$$

καλείται *κλειστή σφαίρα του $\mathbb{R}^d$ με κέντρο $\mathbf{x}_0$ και ακτίνα ε* . Είναι φανερό ότι

$$\overline{B}_\varepsilon(\mathbf{x}_0) = B_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \cup S_\varepsilon(\mathbf{x}_0).$$

1.1.5 Χαρακτηρισμοί σημείων και υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$

Δίνουμε παρακάτω κάποιους χαρακτηρισμούς σημείων και υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$.

Ορισμός 1.1.2. Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^d$.

- (1) Ένα σημείο $\mathbf{x} \in X$ καλείται **μεμονωμένο σημείο του X** αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $X \cap B_\delta(\mathbf{x}) = \{\mathbf{x}\}$. Ισοδύναμα, η απόσταση κάθε άλλου σημείου του X από το $\mathbf{x}$ είναι τουλάχιστον δ .
- (2) Ένα σημείο $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ καλείται **σημείο συσσώρευσης του X** αν για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $\mathbf{y} \in X$ με $0 < \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \delta$. Ισοδύναμα, οσοδήποτε κοντά στο $\mathbf{x}$ υπάρχει σημείο του X διαφορετικό από το $\mathbf{x}$.
- (3) Ένα σημείο $\mathbf{x} \in X$ καλείται **εσωτερικό σημείο του X** αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq X$.

Ορισμός 1.1.3. Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^d$.

- (1) Το X καλείται **ανοικτό** αν για κάθε σημείο $\mathbf{x}$ του X υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq X$. Ισοδύναμα, αν κάθε σημείο του X είναι εσωτερικό του σημείου.
- (2) Το X καλείται **κλειστό** αν το $X^c = \mathbb{R}^d \setminus X$ (δηλαδή το συμπλήρωμά του) είναι ανοικτό.
- (3) Το X καλείται **φραγμένο** αν υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $\|\mathbf{x}\| \leq M$ (ισοδύναμα, το X είναι υποσύνολο της κλειστής μπάλας $\overline{B}_M(\mathbf{0})$ με κέντρο το $\mathbf{0}$ και ακτίνα M).

Πρόταση 1.1.4. Κάθε μονοσύνολο του $\mathbb{R}^d$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$.

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. Για να δείξουμε ότι το $\{\mathbf{x}\}$ είναι κλειστό πρέπει να δείξουμε ότι το συμπλήρωμά του, δηλαδή το σύνολο $\mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{x}\}$ είναι ανοικτό. Έστω $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{x}\}$. Τότε $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$ και άρα $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| > 0$. Θέτοντας $\delta = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$ έχουμε $\mathbf{x} \notin B_\delta(\mathbf{y})$ και άρα $B_\delta(\mathbf{y}) \subseteq \mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{x}\}$. Δηλαδή, για κάθε $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{x}\}$ υπάρχει $\delta > 0$ με $B_\delta(\mathbf{y}) \subseteq \mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{x}\}$, άρα το $\mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{x}\}$ είναι ανοικτό. $\square$

Πρόταση 1.1.5. (α) Κάθε ανοικτή μπάλα είναι ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$.

(β) Αντίστοιχα, κάθε κλειστή μπάλα είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$.

Απόδειξη. (α) Έστω $B = B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ μια ανοικτή μπάλα του $\mathbb{R}^d$. Έστω $\mathbf{x} \in B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$. Θέτουμε

$$(1.1.1) \quad \delta = \varepsilon - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|.$$

Αφού $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon$ έχουμε ότι $\delta = \varepsilon - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| > 0$. Θα δείξουμε ότι $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq B$. Πράγματι, έστω $\mathbf{y} \in B_\delta(\mathbf{x})$. Τότε $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ και, από την τριγωνική ανισότητα,

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \stackrel{(1.1.1)}{=} \varepsilon.$$

Συνεπώς, $\mathbf{y} \in B$. Επειδή το $\mathbf{y}$ ήταν τυχόν σημείο της $B_\delta(\mathbf{x})$, έπεται ότι $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq B$. Επίσης, το B είναι φραγμένο αφού για κάθε $\mathbf{x} \in B$ έχουμε

$$\|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| + \|\mathbf{x}_0\| \leq \varepsilon + \|\mathbf{x}_0\| = M.$$

(β) Έστω $C = \mathbb{R}^d \setminus \overline{B}_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ και $\mathbf{x} \in C$. Τότε $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| > \varepsilon$ και άρα

$$(1.1.2) \quad \delta = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| - \varepsilon > 0.$$

Θα δείξουμε ότι $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq C$, ισοδύναμα $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| > \varepsilon$ για κάθε $\mathbf{y} \in B_\delta(\mathbf{x})$. Πράγματι, έστω $\mathbf{y} \in B_\delta(\mathbf{x})$. Τότε, από την τριγωνική ανισότητα,

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| < \delta + \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\|$$

και συνεπώς

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| > \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| - \delta \stackrel{(1.1.2)}{=} \varepsilon.$$

Επίσης, όπως στο (α) δείχνουμε ότι η $\overline{B}_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ είναι φραγμένη. □

Η επόμενη πρόταση δίνει έναν χρήσιμο χαρακτηρισμό των κλειστών συνόλων.

Πρόταση 1.1.6. Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^d$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(1) Το X είναι κλειστό.

(2) Το X περιέχει όλα τα σημεία συσσώρευσής του.

Απόδειξη. (1) $\implies$ (2): Έστω ότι το X είναι κλειστό και έστω $\mathbf{x}$ σημείο συσσώρευσης του X . Υποθέτουμε, προς απαγωγή σε άτοπο, ότι $\mathbf{x} \notin X$. Τότε, $\mathbf{x} \in X^c = \mathbb{R}^d \setminus X$ και επειδή το X^c είναι ανοικτό θα υπάρχει $\delta > 0$ με $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq X^c$. Αλλά τότε $B_\delta(\mathbf{x}) \cap X = \emptyset$, άτοπο από τον ορισμό του σημείου συσσώρευσης.

(2) $\implies$ (1): Έστω ότι το X περιέχει όλα τα σημεία συσσώρευσής του. Θα δείξουμε ότι το X είναι κλειστό, ισοδύναμα ότι το X^c είναι ανοικτό. Πράγματι, έστω $\mathbf{x} \in X^c$. Επειδή το X περιέχει όλα τα σημεία συσσώρευσής του, το $\mathbf{x}$ δεν είναι σημείο συσσώρευσης του X . Συνεπώς, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε οποιοδήποτε $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ με $0 < \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \delta$ δεν ανήκει στο X . Επειδή, από την υπόθεση, και το $\mathbf{x}$ δεν ανήκει στο X , έχουμε ότι ολόκληρη η ανοικτή μπάλα $B_\delta(\mathbf{x})$ περιέχεται στο X^c , δηλαδή το $\mathbf{x}$ είναι όντως εσωτερικό σημείο του X^c . □

1.2 Ακολουθίες στον χώρο $\mathbb{R}^d$

1.2.1 Βασικοί ορισμοί

Ακολουθία στον $\mathbb{R}^d$ είναι κάθε απεικόνιση από το $\mathbb{N}$ στον $\mathbb{R}^d$.

Ορισμός 1.2.1. Έστω (x_n) ακολουθία στον $\mathbb{R}^d$ και $x \in \mathbb{R}^d$. Λέμε ότι το **όριο** της (x_n) είναι το x (ή ότι η (x_n) **συγκλίνει** στο x) αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\|x_n - x\| < \varepsilon$ για όλα τα $n \geq n_0$.

Συμβολικά θα γράφουμε $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ (ή πιο απλά $\lim x_n = x$) ή $x_n \rightarrow x$.

Παρατήρηση 1.2.2. Παρατηρήστε ότι $\lim x_n = x$ αν και μόνο αν κάθε ανοικτή μπάλα με κέντρο x περιέχει όλους τελικά τους όρους της (x_n) .

Πρόταση 1.2.3 (πρώτος χαρακτηρισμός της σύγκλισης στον $\mathbb{R}^d$). Έστω (x_n) ακολουθία στον $\mathbb{R}^d$ και $x \in \mathbb{R}^d$. Τότε $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ αν και μόνο αν $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$.

Απόδειξη. Θέτουμε $\alpha_n = \|x_n - x\|$, $n \in \mathbb{N}$. Από τον ορισμό της σύγκλισης ακολουθίας έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x &\iff \text{για κάθε } \varepsilon > 0 \text{ υπάρχει } n_0 \in \mathbb{N} \text{ ώστε για κάθε } n \geq n_0 \quad \|x_n - x\| < \varepsilon \\ &\iff \text{για κάθε } \varepsilon > 0 \quad \text{υπάρχει } n_0 \in \mathbb{N} \text{ ώστε για κάθε } n \geq n_0 \quad \alpha_n < \varepsilon \\ &\iff \text{για κάθε } \varepsilon > 0 \quad \text{υπάρχει } n_0 \in \mathbb{N} \text{ ώστε για κάθε } n \geq n_0 \quad |\alpha_n - 0| < \varepsilon \\ &\iff \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0. \end{aligned}$$

□

Πρόταση 1.2.4 (δεύτερος χαρακτηρισμός σύγκλισης στον $\mathbb{R}^d$). Έστω (x_n) ακολουθία στον $\mathbb{R}^d$ και $x \in \mathbb{R}^d$. Έστω

$$x_n = (x_{1,n}, \dots, x_{d,n}) \text{ και } x = (x_1, \dots, x_d).$$

Τότε $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ αν και μόνο αν $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{i,n} = x_i$ για όλα τα $1 \leq i \leq d$.

Απόδειξη. Θέτουμε $\alpha_n = \|x_n - x\|$ και $\alpha_{i,n} = |x_{i,n} - x_i|$, $n \in \mathbb{N}$. Από τον ορισμό της απόστασης στον $\mathbb{R}^d$ έχουμε

$$(1.2.1) \quad \alpha_n = \sqrt{\alpha_{1,n}^2 + \dots + \alpha_{d,n}^2}.$$

Έστω ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Τότε, από την Πρόταση 1.2.3 έχουμε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$. Έστω $1 \leq i \leq d$. Από την (1.2.1) έπεται ότι

$$0 \leq \alpha_{i,n} \leq \alpha_n,$$

οπότε από το θεώρημα των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών στο $\mathbb{R}$ έπεται ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{i,n} = 0$.

Αντίστροφα τώρα, έστω ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{i,n} = 0$ για όλα τα $1 \leq i \leq d$. Τότε, από την (1.2.1) και τις αλγεβρικές ιδιότητες των ορίων ακολουθιών στο $\mathbb{R}$, έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{1,n}^2 + \dots + \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{d,n}^2} = 0.$$

Συνεπώς, πάλι από την Πρόταση 1.2.3 έπεται ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

□

1.2.2 Θεώρημα Bolzano-Weierstrass στον $\mathbb{R}^d$

Ένα βασικό θεώρημα για τις ακολουθίες πραγματικών αριθμών είναι το θεώρημα Bolzano-Weierstrass που μας λέει ότι κάθε φραγμένη ακολουθία στο $\mathbb{R}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 1.2.4 μπορούμε εύκολα να επεκτείνουμε αυτό το θεώρημα στον $\mathbb{R}^d$. Πριν το διατυπώσουμε θυμίζουμε τους σχετικούς ορισμούς.

Ορισμός 1.2.5. Έστω (x_n) ακολουθία στον $\mathbb{R}^d$. Θεωρώντας την ακολουθία (x_n) ως συνάρτηση από το $\mathbb{N}$ στο $\mathbb{R}$, κάθε περιορισμός της σε ένα άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$ καλείται **υπακολουθία** της (x_n) .

Κάθε υπακολουθία της (x_n) είναι και αυτή ακολουθία στον $\mathbb{R}^d$. Πράγματι, αν

$$N = \{k_1 < k_2 < \dots\}$$

είναι το άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$ όπου περιορίζεται η (x_n) , τότε η αντίστοιχη υπακολουθία της (x_n) είναι η ακολουθία (y_n) με

$$y_n = x_{k_n}$$

για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Πρόταση 1.2.6. Αν μια ακολουθία στον $\mathbb{R}^d$ συγκλίνει τότε κάθε υπακολουθία της συγκλίνει στο ίδιο όριο με αυτήν.

Απόδειξη. Έστω (x_n) συγκλίνουσα ακολουθία στον $\mathbb{R}^d$ και x το όριό της. Έστω $N = \{k_1 < k_2 < \dots\} \subseteq \mathbb{N}$ άπειρο και $y_n = x_{k_n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η υπακολουθία της (x_n) που ορίζεται από το N . Θα δείξουμε ότι $y_n \rightarrow x$. Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $x_n \rightarrow x$, θα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\|x_n - x\| < \varepsilon$ για όλα τα $n \geq n_0$. Ισχυριζόμαστε ότι $\|y_n - x\| < \varepsilon$ για όλα τα $n \geq n_0$. Πράγματι, έστω $n \geq n_0$. Είναι εύκολο να δούμε ότι $k_n \geq n$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και άρα $k_n \geq n \geq n_0$, οπότε $\|x_{k_n} - x\| < \varepsilon$ δηλαδή $\|y_n - x\| < \varepsilon$. $\square$

Στα επόμενα, αν $N = \{k_1 < k_2 < \dots\}$ είναι ένα άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$, θα συμβολίζουμε την υπακολουθία (y_n) , όπου $y_n = x_{k_n}$, με $(x_n)_{n \in N}$. Επίσης, αν $\lim y_n = x$ τότε θα γράφουμε

$$x_n \xrightarrow{n \in N} x$$

Θεώρημα 1.2.7 (θεώρημα Bolzano-Weierstrass). Κάθε φραγμένη ακολουθία στον $\mathbb{R}^d$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή ως προς d . Για $d = 1$ το θεώρημα ως γνωστόν ισχύει. Έστω $d \geq 2$ και ας υποθέσουμε ότι το θεώρημα ισχύει για φραγμένες ακολουθίες στον $\mathbb{R}^{d-1}$. Έστω (x_n) φραγμένη ακολουθία στον $\mathbb{R}^d$ και $M > 0$ με $\|x_n\| \leq M$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $x_n = (x_{1,n}, \dots, x_{d,n})$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και από την υπόθεση έχουμε $\|x_n\| = \sqrt{x_{1,n}^2 + \dots + x_{d,n}^2} \leq M$. Συνεπώς,

$$\sqrt{x_{1,n}^2 + \dots + x_{d-1,n}^2} \leq M \quad \text{και} \quad |x_{d,n}| \leq M$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Με άλλα λόγια, η ακολουθία x'_n του $\mathbb{R}^{d-1}$ με $x'_n = (x_{1,n}, \dots, x_{d-1,n})$ καθώς και η ακολουθία $(x_{d,n})$ του $\mathbb{R}$ είναι φραγμένη. Από την επαγωγική μας υπόθεση υπάρχει $N_1 \subseteq \mathbb{N}$ άπειρο και $x' = (x_1, \dots, x_{d-1}) \in \mathbb{R}^{d-1}$ με

$$(1.2.2) \quad x'_n \xrightarrow{n \in N_1} x'$$

Αφού η ακολουθία πραγματικών αριθμών $(x_{d,n})$ είναι φραγμένη από το M , το ίδιο ισχύει και για την υπακολουθία $(x_{d,n})_{n \in N_1}$. Από το θεώρημα Bolzano-Weierstrass για το $\mathbb{R}$ έπεται ότι υπάρχουν $N_2 \subseteq N_1$ άπειρο και $x_d \in \mathbb{R}$ με

$$(1.2.3) \quad x_{d,n} \xrightarrow{n \in N_2} x_d.$$

Επειδή $N_2 \subseteq N_1$, η ακολουθία $(\mathbf{x}'_n)_{n \in N_2}$ είναι υπακολουθία της $(\mathbf{x}'_n)_{n \in N_1}$ και άρα συγκλίνει στο ίδιο όριο με αυτήν, δηλαδή $\mathbf{x}'_n \xrightarrow{n \in N_2} \mathbf{x}'$. Αφού $\mathbf{x}'_n = (x_{1,n}, \dots, x_{d-1,n})$, από την Πρόταση 1.2.4 έχουμε ότι

$$(1.2.4) \quad x_{1,n} \xrightarrow{n \in N_2} x_1, \dots, x_{d-1,n} \xrightarrow{n \in N_2} x_{d-1}$$

όπου $(x_1, \dots, x_{d-1}) = \mathbf{x}'$.

Από τις (1.2.3), (1.2.4) και την Πρόταση 1.2.4 έπεται ότι

$$\mathbf{x}_n \xrightarrow{n \in N_2} \mathbf{x}$$

όπου $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$. □

1.2.3 Ακολουθίες Cauchy στον $\mathbb{R}^d$

Οι ακολουθίες Cauchy στον $\mathbb{R}^d$ ορίζονται όπως στο $\mathbb{R}$.

Ορισμός 1.2.8. Μια ακολουθία $(\mathbf{x}_n)$ στον $\mathbb{R}^d$ καλείται *Cauchy* αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\| < \varepsilon$ για όλα τα $n, m \geq n_0$.

Θυμίζουμε ότι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών είναι συγκλίνουσα αν και μόνο αν είναι Cauchy. Το γεγονός αυτό γενικεύεται και στον $\mathbb{R}^d$. Με επαγωγή αποδεικνύεται ότι ο χαρακτηρισμός αυτός ισχύει στον $\mathbb{R}^d$ για κάθε $d \in \mathbb{N}$.

Θεώρημα 1.2.9. Μια ακολουθία στον $\mathbb{R}^d$ είναι συγκλίνουσα αν και μόνο αν είναι Cauchy.

Μια εφαρμογή είναι το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 1.2.10 (θεώρημα σταθερού σημείου του Banach). Έστω $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ Lipschitz συνεχής συνάρτηση με σταθερά $0 < \vartheta < 1$, δηλαδή η f ικανοποιεί την $\|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})\| \leq \vartheta \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$, για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ στον $\mathbb{R}^d$. Τότε η f έχει ένα σταθερό σημείο που επιπλέον είναι και μοναδικό.

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{x}_0$ τυχόν σημείο στον $\mathbb{R}^d$. Ορίζουμε μια ακολουθία $(\mathbf{x}_n)$ αναδρομικά θέτοντας $\mathbf{x}_n = f(\mathbf{x}_{n-1})$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι η $(\mathbf{x}_n)$ είναι Cauchy και άρα συγκλίνουσα.

Δείχνουμε πρώτα με επαγωγή στο $n \in \mathbb{N}$ ότι

$$(1.2.5) \quad \|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n\| \leq \vartheta^n \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|.$$

Πράγματι, για $n = 1$ η (1.2.5) ισχύει αφού $\mathbf{x}_2 = f(\mathbf{x}_1)$, $\mathbf{x}_1 = f(\mathbf{x}_0)$ και άρα

$$\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| = \|f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_0)\| \leq \vartheta \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|.$$

Έστω ότι η (1.2.5) ισχύει για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι ισχύει και για το $n + 1$ στη θέση του n . Πράγματι,

$$\|\mathbf{x}_{n+2} - \mathbf{x}_{n+1}\| = \|f(\mathbf{x}_{n+1}) - f(\mathbf{x}_n)\| \leq \vartheta \|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n\| \stackrel{(1.2.5)}{\leq} \vartheta^{n+1} \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|.$$

Συνεπώς, η (1.2.5) ισχύει για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $n < m$,

$$\begin{aligned}\|x_m - x_n\| &= \|(x_{n+1} - x_n) + (x_{n+2} - x_{n+1}) + \cdots + (x_m - x_{m-1})\| \\ &= \left\| \sum_{j=n}^{m-1} (x_{j+1} - x_j) \right\| \\ &\leq \sum_{j=n}^{m-1} \|x_{j+1} - x_j\| \\ &\stackrel{(1.2.5)}{\leq} \left(\sum_{j=n}^{m-1} \vartheta^j \right) \|x_1 - x_0\| \leq \left(\sum_{j=n}^{\infty} \vartheta^j \right) \|x_1 - x_0\| = \frac{\vartheta^n}{1 - \vartheta} \|x_1 - x_0\|.\end{aligned}$$

Επειδή $0 < \vartheta < 1$ έχουμε ότι $\vartheta^n \rightarrow 0$ και η παραπάνω σχέση δίνει ότι η ακολουθία (x_n) είναι Cauchy. (Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $\vartheta^n \rightarrow 0$ έπεται και ότι $\frac{\vartheta^n}{1 - \vartheta} \rightarrow 0$. Συνεπώς, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $\frac{\vartheta^n}{1 - \vartheta} \|x_1 - x_0\| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Έστω $m, n > n_0$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να

υποθέσουμε ότι $m \geq n$ και άρα $\|x_m - x_n\| \leq \frac{\vartheta^n}{1 - \vartheta} \|x_1 - x_0\| \leq \varepsilon$.)

Αφού η (x_n) είναι Cauchy είναι και συγκλίνουσα, και έστω x το όριό της. Τότε

$$\begin{aligned}\|f(x) - x\| &\leq \|f(x) - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x\| \\ &= \|f(x) - f(x_n)\| + \|x_{n+1} - x\| \\ &\leq \vartheta \|x - x_n\| + \|x_{n+1} - x\|\end{aligned}$$

και άρα

$$0 \leq \|f(x) - x\| \leq \vartheta \lim \|x - x_n\| + \lim \|x_{n+1} - x\| = 0$$

δηλαδή $f(x) = x$.

Η f δεν έχει άλλο σταθερό σημείο. Πράγματι, αν $x \neq y$ είναι δύο διαφορετικά σταθερά σημεία της f τότε

$$0 < \|x - y\| = \|f(x) - f(y)\| \leq \vartheta \|x - x\| < \|x - y\|,$$

άτοπο. □

Παρατήρηση 1.2.11. Παρατηρήστε ότι από την παραπάνω απόδειξη προκύπτει ότι όποιο σημείο x_0 κι αν επιλέγαμε για να ξεκινήσαμε, θα καταλήγαμε πάντα στο ίδιο x .

1.3 Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Με τον όρο *συνάρτηση πολλών μεταβλητών* εννοούμε γενικά μια συνάρτηση $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ όπου $X \subseteq \mathbb{R}^d$ μη κενό (αν $m = d = 1$ τότε έχουμε την κλασική περίπτωση πραγματικής συνάρτησης μιας μεταβλητής).

1.3.1 Ταξινόμηση συναρτήσεων πολλών μεταβλητών

Οι συναρτήσεις αυτές ταξινομούνται ως εξής:

(I) **Πραγματικές** (ή **βαθμωτές**) Είναι οι συναρτήσεις $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ όπου $X \subseteq \mathbb{R}^d$. Μερικά παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων είναι τα ακόλουθα:

$$1) f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ με τύπο } f(x, y) = x^2 + y^2.$$

2) $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, όπου

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

είναι ο κλειστός μοναδιαίος δίσκος του $\mathbb{R}^2$.

3) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

4) $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$, όπου

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

είναι η κλειστή μοναδιαία μπάλα του $\mathbb{R}^3$.

Στην Φυσική, συναρτήσεις της μορφής $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ χρησιμοποιούνται για να αντιστοιχίσουν βαθμωτά φυσικά μεγέθη στα σημεία του χώρου, όπως π.χ. η θερμοκρασία ή η ατμοσφαιρική πίεση.

(II) **Διανυσματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής.** Είναι συναρτήσεις της μορφής $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$, όπου $X \subseteq \mathbb{R}$ και $m \geq 2$. Συνήθως το σύνολο X είναι ένα διάστημα του $\mathbb{R}$. Μερικά παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων είναι τα ακόλουθα:

1) $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ με τύπο $f(t) = (\cos t, \sin t)$.

2) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ με τύπο $f(t) = (t, t^2)$.

3) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ με τύπο $f(t) = (\cos t, \sin t, t)$.

4) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ με τύπο $f(t) = (t, t^2, \dots, t^m)$.

Οι συναρτήσεις $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ με $X \subseteq \mathbb{R}$ γράφονται πάντα στη μορφή

$$f(t) = (f_1(t), \dots, f_m(t)), \quad t \in X \subseteq \mathbb{R}$$

όπου $f_1(t), \dots, f_m(t)$ είναι πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής από το X στο $\mathbb{R}$ (δείτε την Πρόταση 1.3.2 παρακάτω).

Παρατήρηση 1.3.1. Αν $X = I$ είναι ένα διάστημα του $\mathbb{R}$ τότε οι συναρτήσεις $f : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ μετασχηματίζουν το διάστημα I του $\mathbb{R}$ σε μια m -διάστατη καμπύλη. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(t) = (\cos t, \sin t)$ μετασχηματίζει το διάστημα $[0, 2\pi]$ στον μοναδιαίο κύκλο, ενώ η $f(t) = (t, t^2)$ μετασχηματίζει την ευθεία στην παραβολή $y = x^2$. Θεωρώντας τη μεταβλητή t ως χρόνο, σκεφτόμαστε ότι οι συναρτήσεις $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^d$ περιγράφουν την θέση ενός κινητού, την χρονική στιγμή t , στον χώρο $\mathbb{R}^d$.

(III) **Διανυσματικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.** Είναι συναρτήσεις της μορφής $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ όπου $X \subseteq \mathbb{R}^d$ και $d, m \geq 2$. Αν $d = m$ τότε οι συναρτήσεις αυτές καλούνται **διανυσματικά πεδία**. Τα διανυσματικά πεδία χρησιμοποιούνται στην Φυσική, π.χ. έχουμε το πεδίο βαρύτητας, το πεδίο ταχύτητας ρευστού κ.λπ. Παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων είναι τα ακόλουθα:

1) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με τύπο

$$f(x, y, z) = \left(-\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, -\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, -\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right).$$

$$2) f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ με τύπο } f(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

$$3) f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ με τύπο } f(x, y) = (-y, x).$$

1.3.2 Ανάλυση μιας συνάρτησης $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$ σε συνιστώσες συναρτήσεις.

Η επόμενη πρόταση ουσιαστικά ανάγει τη μελέτη όλων των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών στη μελέτη των βαθμωτών συναρτήσεων.

Πρόταση 1.3.2. Έστω $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^d$. Τότε υπάρχουν μοναδικές συναρτήσεις $f_1, \dots, f_m$ από το X στο $\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε

$$f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))$$

για κάθε $\mathbf{x} \in X$. Συμβολικά γράφουμε

$$f = (f_1, \dots, f_m)$$

και οι $f_1, \dots, f_m$ καλούνται οι **συνιστώσες συναρτήσεις** της f .

Απόδειξη. Για κάθε $i \in \{1, \dots, m\}$ έστω $\pi_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ η i -προβολή του $\mathbb{R}^m$, δηλαδή η συνάρτηση

$$\pi_i(y_1, \dots, y_m) = y_i.$$

Παρατηρούμε ότι κάθε διάνυσμα $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$ του $\mathbb{R}^m$ γράφεται ως

$$(1.3.1) \quad \mathbf{y} = (\pi_1(\mathbf{y}), \dots, \pi_m(\mathbf{y})).$$

Έστω τώρα τυχόν $\mathbf{x} \in X$. Θέτοντας $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$, από την (1.3.1) έχουμε

$$(1.3.2) \quad f(\mathbf{x}) = (\pi_1(f(\mathbf{x})), \dots, \pi_m(f(\mathbf{x}))).$$

Συνεπώς, αν θέσουμε $f_i = \pi_i \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}$ να είναι η σύνθεση των π_i και f , τότε $f_i(\mathbf{x}) = \pi_i(f(\mathbf{x}))$ και άρα από την (1.3.2) έχουμε

$$(1.3.3) \quad f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})).$$

Μένει να δείξουμε ότι οι $f_1, \dots, f_m$ είναι η μοναδικές συναρτήσεις που ικανοποιούν την (1.3.3). Πράγματι, αν $g_1, \dots, g_m$ είναι συναρτήσεις από το X στο $\mathbb{R}$ με

$$f(\mathbf{x}) = (g_1(\mathbf{x}), \dots, g_m(\mathbf{x}))$$

τότε αναγκαστικά $g_i(\mathbf{x}) = \pi_i(f(\mathbf{x})) = \pi_i \circ f(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x})$ για κάθε $i \in \{1, \dots, m\}$ και κάθε $\mathbf{x} \in X$. □

1.4 Όριο συνάρτησης πολλών μεταβλητών

Σε αυτήν την ενότητα θα μελετήσουμε την έννοια του ορίου συνάρτησης πολλών μεταβλητών. Όπως θα δούμε, είναι μια απλή γενίκευση της γνωστής αντίστοιχης έννοιας για πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής. Όπως και για τις πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής, για να ορίζεται το όριο μιας συνάρτησης $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^d$ σε κάποιο σημείο $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ θα πρέπει το $\mathbf{x}_0$ να είναι **σημείο συσσώρευσης** του πεδίου ορισμού X της f .

1.4.1 Όριο βαθμωτής συνάρτησης

Ορισμός 1.4.1. Έστω $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^d$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ σημείο συσσώρευσης του X και $L \in \mathbb{R}$. Λέμε ότι η f έχει όριο το L στο $\mathbf{x}_0$ και γράφουμε

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$$

αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\mathbf{x} \in X$ με $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ να ισχύει ότι $|f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon$.

Το επόμενο θεώρημα είναι πολύ χρήσιμο γιατί μεταφέρει το όριο συνάρτησης σε ακολουθίες. Με βάση το θεώρημα αυτό αποδεικνύονται όλες οι αλγεβρικές ιδιότητες των ορίων βαθμωτών συναρτήσεων.

Θεώρημα 1.4.2 (αρχή της μεταφοράς). Έστω $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^d$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ σημείο συσσώρευσης του X και $L \in \mathbb{R}$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

$$(1) \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L.$$

(2) Για οποιαδήποτε ακολουθία $(\mathbf{x}_n)$ σημείων του X με $\mathbf{x}_n \neq \mathbf{x}_0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}_0$ ισχύει ότι $f(\mathbf{x}_n) \rightarrow L$.

Απόδειξη. (1) $\implies$ (2): Έστω $(\mathbf{x}_n)$ ακολουθία στο X με $\mathbf{x}_n \neq \mathbf{x}_0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}_0$. Θα δείξουμε ότι η ακολουθία $(f(\mathbf{x}_n))$ (που είναι ακολουθία πραγματικών αριθμών) συγκλίνει στο L , ισοδύναμα για κάθε $\varepsilon > 0$ πρέπει να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ με $|f(\mathbf{x}_n) - L| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$, για το δοθέν ε υπάρχει $\delta > 0$ με

$$(1.4.1) \quad |f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon \text{ για όλα τα } \mathbf{x} \in X \text{ με } 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta.$$

Επειδή τώρα $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}_0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $0 < \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\| < \delta$ για όλα τα $n \geq n_0$. Από την (1.4.1) έπεται ότι

$$|f(\mathbf{x}_n) - L| < \varepsilon \text{ για όλα τα } n \geq n_0.$$

Συνεπώς, $f(\mathbf{x}_n) \rightarrow L$.

(2) $\implies$ (1): Έστω, προς απαγωγή σε άτοπο, ότι δεν ισχύει η (1) ενώ ισχύει η (2). Από την άρνηση του ορισμού του $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$, έχουμε ότι θα υπάρχει $\varepsilon_0 > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\delta > 0$ να μπορούμε να βρούμε $\mathbf{x}_\delta \in X$ με $0 < \|\mathbf{x}_\delta - \mathbf{x}_0\| < \delta$ αλλά $|f(\mathbf{x}_\delta) - L| \geq \varepsilon_0$. Επιλέγοντας $\delta = 1/n$ βρίσκουμε $\mathbf{x}_n \in X$ με

$$(1.4.2) \quad 0 < \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\| < 1/n$$

και

$$(1.4.3) \quad |f(\mathbf{x}_n) - L| \geq \varepsilon_0.$$

Από την (1.4.2) έπεται ότι $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\| \rightarrow 0$ και άρα από την Πρόταση 1.2.3 έχουμε ότι $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}_0$. Από την υπόθεσή μας έχουμε ότι $f(\mathbf{x}_n) \rightarrow L$ ή ισοδύναμα $|f(\mathbf{x}_n) - L| \rightarrow 0$, άτοπο από την (1.4.3). $\square$

Παράδειγμα 1.4.3. Αποδείξτε ότι το όριο

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

δεν υπάρχει.

Απόδειξη. Έστω $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ και $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$. Παρατηρούμε ότι το $(0,0)$ είναι σημείο συσσώρευσης του X που δεν ανήκει στο X . Από την αρχή της μεταφοράς, για να δείξουμε ότι το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει αρκεί να βρούμε δύο ακολουθίες (x_n, y_n) και (x'_n, y'_n) στο X (άρα, $(x_n, y_n), (x'_n, y'_n) \neq (0,0)$) με $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x'_n, y'_n) = (0,0)$ αλλά $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n, y'_n)$.

Πράγματι, για την ακολουθία $(1/n, 0)$ έχουμε $(1/n, 0) \in X$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $(1/n, 0) \rightarrow (0,0)$ (Πρόταση 1.2.4) και

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}, 0\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0}{\frac{1}{n^2} + 0} = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

Ομοίως, για την ακολουθία $(1/n, 1/n)$ έχουμε πάλι $(1/n, 1/n) \in X$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $(1/n, 1/n) \rightarrow (0,0)$, αλλά

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

□

Παράδειγμα 1.4.4. Αποδείξτε ότι $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(x \sin\left(\frac{1}{y}\right) \right) = 0$.

Απόδειξη. Έστω $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$ και $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x,y) = x \sin\left(\frac{1}{y}\right)$. Παρατηρούμε ότι το $(0,0)$ είναι σημείο συσσώρευσης του X που δεν ανήκει στο X . Έστω (x_n, y_n) ακολουθία στο X (οπότε, $y_n \neq 0$ και άρα $(x_n, y_n) \neq (0,0)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$) τέτοια ώστε $(x_n, y_n) \rightarrow (0,0)$. Έχουμε $x_n \rightarrow 0$ (Πρόταση 1.2.4) και $|\sin(\frac{1}{y_n})| \leq 1$. Συνεπώς,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[x_n \cdot \sin\left(\frac{1}{y_n}\right) \right] = 0$$

(μυθενική $\times$ φραγμένη). Από την αρχή της μεταφοράς συμπεραίνουμε ότι $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$. □

Πρόταση 1.4.5 (κανόνες παρεμβολής). Έστω $g, f, h : X \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $X \subseteq \mathbb{R}^d$, και $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ σημείο συσσώρευσης του X .

(1) Αν $g(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}) \leq h(\mathbf{x})$ για κάθε $\mathbf{x} \in X$ με $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ και $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} h(\mathbf{x}) = L \in \mathbb{R}$ τότε $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$.

(2) Αν $h(\mathbf{x}) \geq 0$ και $|f(\mathbf{x})| \leq h(\mathbf{x})$ για κάθε $\mathbf{x} \in X$ με $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ και $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} h(\mathbf{x}) = 0$, τότε $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = 0$.

Παράδειγμα 1.4.6. Αποδείξτε ότι $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = 0$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι για κάθε $(x,y) \neq (0,0)$ έχουμε

$$\left| \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \right| \leq \left| \frac{x^3}{x^2 + y^2} \right| + \left| \frac{y^3}{x^2 + y^2} \right| = \left| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right| \cdot |x| + \left| \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right| \cdot |y| \leq |x| + |y|.$$

Επομένως, αν θέσουμε $f(x,y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ και $h(x,y) = |x| + |y|$, τότε

$$|f(x,y)| \leq h(x,y).$$

Επιπλέον, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} h(x,y) = 0$.

□

Η επόμενη πρόταση είναι και αυτή μια αρχή της μεταφοράς αλλά με καμπύλες αντί για ακολουθίες. Με τον όρο *καμπύλη* του $\mathbb{R}^d$ θα εννοούμε μια *συνεχή συνάρτηση* ¹ $\mathbf{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$.

Πρόταση 1.4.7 (όριο κατά μήκος καμπύλης). Έστω $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^d$, $f : \mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{x}_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ και $L \in \mathbb{R}$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

$$(1) \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L.$$

(2) Για κάθε συνεχή καμπύλη $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ με $\mathbf{r}(0) = \mathbf{x}_0$ και $\mathbf{r}(t) \neq \mathbf{x}_0$ για κάθε $t \neq 0$, ισχύει ότι $\lim_{t \rightarrow 0} f(\mathbf{r}(t)) = L$.

Παράδειγμα 1.4.8. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ για κάθε $(x,y) \neq (0,0)$.

(1) Να βρείτε το όριο της f στο $(0,0)$ κατά μήκος κάθε ευθείας $\mathbf{r}(t) = (t, \lambda t)$, $t \in \mathbb{R}$.

(2) Να βρείτε το όριο της f στο $(0,0)$ κατά μήκος κάθε παραβολής $\mathbf{r}(t) = (t, \lambda t^2)$, $t \in \mathbb{R}$.

(3) Αποδείξτε ότι το όριο της f στο $(0,0)$ δεν υπάρχει.

Απόδειξη. (1) Έχουμε

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\mathbf{r}(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t, \lambda t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \lambda t}{t^4 + \lambda^2 t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\lambda t^3}{t^4 + \lambda^2 t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\lambda t}{t^2 + \lambda^2} = 0.$$

Παρατηρούμε ότι το όριο είναι ανεξάρτητο από τον συντελεστή διεύθυνσης λ της ευθείας.

(2) Ομοίως,

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\mathbf{r}(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t, \lambda t^2) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \lambda t^2}{t^4 + \lambda^2 t^4} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\lambda t^4}{t^4 + \lambda^2 t^4} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\lambda}{1 + \lambda^2}$$

και άρα το όριο εξαρτάται από τον συντελεστή λ της παραβολής.

(3) Από το (2) και την Πρόταση 1.4.7 το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει. □

Παράδειγμα 1.4.9. (α) Εξετάστε αν υπάρχει το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x+y}$.

(β) Ομοίως για το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x+y}$.

Απόδειξη. (α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x,y) = \frac{xy}{x+y}$ είναι ολόκληρο το $\mathbb{R}^2$ εκτός από την ευθεία $y = -x$. Κατά μήκος της ευθείας $x = y = t$ το όριο είναι 0:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{2t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{2} = 0.$$

Όμως, κατά μήκος της καμπύλης $x = t$, $y = -t + t^2$, το όριο είναι -1:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, -t + t^2) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t^2 + t^3}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} (-1 + t) = -1.$$

Συνεπώς, το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x+y}$ δεν υπάρχει.

¹για τον ορισμό της συνέχειας δείτε την επόμενη ενότητα.

(β) Μπορούμε με τον ίδιο τρόπο να δείξουμε ότι το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x + y}$ δεν υπάρχει. Ένας δεύτερος τρόπος είναι να παρατηρήσουμε ότι $\frac{xy}{x + y} = \frac{(x + y)^2}{x + y} - \frac{x^2 + y^2}{x + y} = x + y - \frac{x^2 + y^2}{x + y}$ και συνεπώς αν υπήρχε το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x + y} = \ell$ θα είχαμε $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x + y} = -\ell$, άτοπο από το (α). □

1.5 Όριο γενικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών

Η έννοια του ορίου μιας γενικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών είναι μια απλή γενίκευση της αντιστοιχίας έννοιας για πραγματικές συναρτήσεις που είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο.

Ορισμός 1.5.1. Έστω $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^d$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ σημείο συσσώρευσης του X και $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^m$. Λέμε ότι η f έχει όριο το $\mathbf{L}$ στο $\mathbf{x}_0$ και γράφουμε

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{L}$$

αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\mathbf{x} \in X$ με $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ να ισχύει ότι $\|f(\mathbf{x}) - \mathbf{L}\| < \varepsilon$.

Το όριο μιας διανυσματικής συνάρτησης ανάγεται στο όριο των πραγματικών συναρτήσεων που αποτελούν την ανάλυση της f . Συγκεκριμένα, έχουμε την εξής πρόταση που προκύπτει εύκολα από την Πρόταση 1.2.4 και την αρχή της μεταφοράς (Θεώρημα 1.4.2).

Πρόταση 1.5.2. Έστω $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^d$ και $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ σημείο συσσώρευσης του X . Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

- (1) Το όριο $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$ υπάρχει.
- (2) Αν $f = (f_1, \dots, f_m)$ είναι η ανάλυση της f τότε το όριο $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f_i(\mathbf{x})$ υπάρχει για όλα τα $i = 1, \dots, m$ και ισχύει ότι

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \left(\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f_1(\mathbf{x}), \dots, \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f_m(\mathbf{x}) \right).$$

1.6 Συνέχεια συνάρτησης πολλών μεταβλητών

Ορισμός 1.6.1. Έστω $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^d$ και $\mathbf{x}_0 \in X$. Λέμε ότι η f είναι *συνεχής* στο $\mathbf{x}_0$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για όλα τα $\mathbf{x} \in X$ με $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ να ισχύει ότι $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$. Η f καλείται *συνεχής* αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του X .

Όπως και για τις πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής, κάθε συνάρτηση $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ είναι αυτομάτως συνεχής στα μεμονωμένα σημεία του X . Συνεπώς, για να δούμε αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής, αρκεί να ελέγξουμε τα σημεία του X που είναι σημεία συσσώρευσής του. Ισχύει και εδώ το ανάλογο του θεωρήματος για τα όρια.

Πρόταση 1.6.2. Έστω $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^d$ και $\mathbf{x}_0 \in X$ σημείο συσσώρευσης του X . Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

- (α) Η f είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$.
- (β) Ισχύει ότι $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$.

Η συνέχεια μιας διανυσματικής συνάρτησης ανάγεται στη συνέχεια των συνιστωσών συναρτήσεών της. Συγκεκριμένα, από τις Προτάσεις 1.5.2 και 1.6.2 έχουμε το εξής πόρισμα.

Πόρισμα 1.6.3. Έστω $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^d$ και $\mathbf{x}_0 \in X$ σημείο συσσώρευσης του X . Έστω επίσης $f = (f_1, \dots, f_m)$ η ανάλυση της f . Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

- (α) Η f είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$.
- (β) Για κάθε $i = 1, \dots, m$ η $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$.

1.7 Ερωτήσεις και Ασκήσεις

A. Ερωτήσεις: Από τις παρακάτω προτάσεις βρείτε ποιες είναι αληθείς και ποιες είναι ψευδείς αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας:

A1. Όλα τα σημεία του συνόλου $\{(n, m) : n, m \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι μεμονωμένα.

A2. Κάθε άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης.

[Υπόδειξη: Λάθος, το σύνολο της Ερώτησης A1 δεν έχει κανένα σημείο συσσώρευσης.]

A3. Το σύνολο $\mathbb{Q}^2 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = \{(q_1, q_2) : q_1, q_2 \in \mathbb{Q}\}$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ υπάρχει $(q_1, q_2) \in \mathbb{Q}^2$ τέτοιο ώστε η απόσταση των (x, y) και (q_1, q_2) να είναι μικρότερη από ε .

A4. Το συμπλήρωμα μιας ευθείας L στο $\mathbb{R}^2$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.

[Υπόδειξη: Για κάθε $\mathbf{x}_0 \notin L$ θεωρήστε την ανοικτή μπάλα με κέντρο $\mathbf{x}_0$ και ακτίνα $r = \min\{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| : \mathbf{x} \in L\}$.]

A5. Αν το $F \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι πεπερασμένο τότε το $\mathbb{R}^d \setminus F$ είναι ανοικτό.

[Υπόδειξη: Για κάθε $\mathbf{x}_0 \notin F$ θεωρήστε την ανοικτή μπάλα με κέντρο $\mathbf{x}_0$ και ακτίνα $r = \min\{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| : \mathbf{x} \in F\}$.]

A6. Η τομή δύο ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$.

A7. Αν η $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ είναι σταθερή σε κάθε ευθεία παράλληλη με τους άξονες των x και y τότε η f είναι σταθερή.

[Υπόδειξη: Συνδέστε το τυχόν (x, y) με το $(0, 0)$ χρησιμοποιώντας ευθύγραμμα τμήματα παράλληλα με τους άξονες.]

B. Ασκήσεις

B1. Αποδείξτε ότι $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(x \sin \frac{1}{y} + y \cos \frac{1}{x} \right) = 0$.

[Υπόδειξη: Παράδειγμα 1.4.4.]

B2. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y) = \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ για κάθε $(x, y) \neq (0, 0)$. Αποδείξτε ότι (α) $\max |f(x, y)| = \sqrt{2}$ και (β) το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ δεν υπάρχει.

[Υπόδειξη: (α) Ανισότητα Cauchy-Schwarz. (β) Αρχή της μεταφοράς για τις ακολουθίες $(1/n, -1/n)$, $(1/n, 1/n)$.]

B3. Έστω $n, m \in \mathbb{N}$ και έστω $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y) = \frac{x^n y^m}{x^{2n} + y^{2m}}$ για κάθε $(x, y) \neq (0, 0)$. Αποδείξτε ότι (α) $\max |f(x, y)| = 1/2$ και (β) το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ δεν υπάρχει.

[Υπόδειξη: (α) Χρησιμοποιήστε την ανισότητα $a^2 + b^2 \geq 2|ab|$. (β) Αρχή της μεταφοράς για τις ακολουθίες (n^{-m}, n^{-n}) , $(1/n, 0)$ – δείτε και το Παράδειγμα 1.4.3.]

B4. Αποδείξτε ότι $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^4}{(x^2 + y^4) \sqrt{x^2 + y^2}} = 0$.

[Υπόδειξη: $\left| \frac{xy^4}{(x^2 + y^4) \sqrt{x^2 + y^2}} \right| = \frac{|xy^2|}{x^2 + y^4} \cdot \frac{|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot |y| \leq \frac{1}{2}|y|$]

B5. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x = y, \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

(α) Χρησιμοποιώντας την αρχή της μεταφοράς για κατάλληλες ακολουθίες αποδείξτε ότι το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ δεν υπάρχει.

(β) Αποδείξτε ότι για κάθε $x, y \neq 0$, $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0$ και άρα $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = 0$.

B6. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y) = \begin{cases} \left| \frac{y}{x} \right| & \text{αν } x \neq 0, \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

(α) Χρησιμοποιώντας την αρχή της μεταφοράς για κατάλληλες ακολουθίες αποδείξτε ότι το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ δεν υπάρχει.

(β) Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 0$ και άρα $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = 0$.

(γ) Αποδείξτε ότι για κάθε $y \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = +\infty$ και άρα $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = +\infty$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Παραγωγή πραγματικής συνάρτησης δύο μεταβλητών

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε την παραγωγή μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών $f(x, y)$ που παίρνει πραγματικές τιμές. Θα ξεκινήσουμε με τις πιο ασθενείς έννοιες παραγωγής που είναι οι λεγόμενες *μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης ως προς x και y* και οι *κατευθυνόμενες παράγωγοι*. Κατόπιν θα ορίσουμε την πιο ισχυρή έννοια της (ολικής) *παραγωγού* μιας πραγματικής συνάρτησης δύο μεταβλητών και θα δούμε πώς σχετίζεται με τις ασθενέστερες έννοιες των μερικών και των κατευθυνόμενων παραγώγων.

2.1 Μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης

Ορισμός 2.1.1 (μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης). Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) εσωτερικό σημείο του A και $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Το όριο

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t}$$

καλείται *μερική παράγωγος ως προς x της συνάρτησης f στο σημείο (x_0, y_0)* και συμβολίζεται με

$$f_x(x_0, y_0) \quad \text{ή} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Θα λέμε ότι η f είναι *μερικώς παραγωγίσιμη ως προς x στο σημείο (x_0, y_0)* αν το όριο αυτό υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

Ομοίως, το όριο

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t}$$

καλείται *μερική παράγωγος ως προς y της συνάρτησης f στο σημείο (x_0, y_0)* και συμβολίζεται με

$$f_y(x_0, y_0) \quad \text{ή} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Θα λέμε ότι η f είναι *μερικώς παραγωγίσιμη ως προς y στο σημείο (x_0, y_0)* αν το όριο αυτό υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

Έστω $A_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ το σύνολο όλων των εσωτερικών σημείων (x, y) του A στα οποία η $f_x(x, y)$ υπάρχει

και είναι πεπερασμένη. Η συνάρτηση $(x, y) \rightarrow f_x(x, y)$, $(x, y) \in A_1$ καλείται **μερική παράγωγος της f ως προς x** και συμβολίζεται με f_x ή $\frac{\partial f}{\partial x}$. Ομοίως, αν $A_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι το σύνολο όλων των εσωτερικών σημείων του A στα οποία η $f_y(x, y)$ υπάρχει και είναι πεπερασμένη, τότε η συνάρτηση $(x, y) \rightarrow f_y(x, y)$, $(x, y) \in A_2$ καλείται **μερική παράγωγος της f ως προς y** και συμβολίζεται με f_y ή $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Παράδειγμα 2.1.2. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y) = |x| + |y|.$$

Ισχυριζόμαστε ότι οι $f_x(0, 0)$ και $f_y(0, 0)$ δεν υπάρχουν. Πράγματι,

$$f_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$$

που ως γνωστόν δεν υπάρχει (αφού τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά). Ομοίως,

$$f_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{|y|}{y}$$

που πάλι δεν υπάρχει.

Παράδειγμα 2.1.3. Ομοίως για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y) = \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

οι $f_x(0, 0)$ και $f_y(0, 0)$ δεν υπάρχουν, αφού όπως παραπάνω

$$f_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|x|^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$$

και

$$f_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|y|^2}}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{|y|}{y}.$$

Παράδειγμα 2.1.4. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$. Τότε,

$$f_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|x \cdot 0|} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Ομοίως,

$$f_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|0 \cdot y|} - 0}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Το επόμενο παράδειγμα δείχνει ότι η ύπαρξη των μερικών παραγώγων σε κάποιο σημείο (x_0, y_0) δεν συνεπάγεται τη συνέχεια της f στο (x_0, y_0) .

Παράδειγμα 2.1.5. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0, 0) = 0$ και

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

για κάθε $(x, y) \neq (0, 0)$. Τότε οι $f_x(0, 0)$, $f_y(0, 0)$ υπάρχουν ενώ η f δεν είναι συνεχής στο $(0, 0)$. Πράγματι, όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο (βλ. Παράδειγμα 1.4.3) το $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ δεν

υπάρχει και άρα η f δεν μπορεί να είναι συνεχής στο $(0, 0)$. Όμως,

$$f_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

και ομοίως

$$f_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0.$$

2.2 Παράγωγος κατά κατεύθυνση

Κάθε $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ με $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 1$ θα καλείται *κατεύθυνση* στο $\mathbb{R}^2$.

Ορισμός 2.2.1. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A και $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ μια κατεύθυνση στο $\mathbb{R}^2$. Το όριο

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2) - f(x_0, y_0)}{t}$$

καλείται **παράγωγος της f κατά την κατεύθυνση $\mathbf{u}$ στο σημείο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$** και συμβολίζεται με

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0).$$

Παρατηρούμε ότι η παράγωγος της f κατά την κατεύθυνση $\mathbf{u}$ στο σημείο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ είναι στην ουσία η παράγωγος του περιορισμού της f στην τομή της ευθείας $L = \{\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u} : t \in \mathbb{R}\}$ με το A . Πιο συγκεκριμένα, έστω $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $B_\delta(\mathbf{x}_0) \subseteq A$. Ορίζουμε $g : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}), \quad t \in (-\delta, \delta).$$

Τότε είναι εύκολο να δούμε ότι η g είναι καλά ορισμένη¹ και

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0).$$

Επίσης, αν $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ είναι η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^2$ τότε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_1}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

και ομοίως

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_2}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Το παρακάτω παράδειγμα δείχνει ότι η ύπαρξη των κατά κατεύθυνση παραγώγων μιας συνάρτησης f σε κάποιο σημείο δεν εξασφαλίζει τη συνέχεια της f σε αυτό το σημείο.

Παράδειγμα 2.2.2. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0, 0) = 0$ και

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

Αποδείξτε ότι:

¹Διότι $\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u} \in B_\delta(\mathbf{x}_0) \subseteq A$, αφού $\|(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - \mathbf{x}_0\| = \|t\mathbf{u}\| = |t| \cdot \|\mathbf{u}\| = |t| < \delta$

- (1) Η f δεν έχει όριο στο $(0, 0)$.
 (2) Όλες οι κατά κατεύθυνση παράγωγοι της f στο $(0, 0)$ υπάρχουν.

Απάντηση: (1) Δείτε το Παράδειγμα 1.4.8.

- (2) Έστω $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 1$ μια κατεύθυνση στο $\mathbb{R}^2$. Τότε,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0 + tu_1, 0 + tu_2) - f(0, 0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tu_1, tu_2)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 u_1^2 u_2}{t^5 u_1^4 + t^3 u_2^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 u_1^2 u_2}{t^3 (t^2 u_1^4 + u_2^2)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u_1^2 u_2}{t^2 u_1^4 + u_2^2} \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι δεν μπορεί να συμβεί $u_1 = u_2 = 0$ αφού $u_1^2 + u_2^2 = 1$. Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις:

(α) $u_2 = 0$. Τότε $u_1^2 = 1$ και $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} 0 = 0$.

(β) $u_2 \neq 0$. Τότε $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u_1^2 u_2}{t^2 u_1^4 + u_2^2} = \frac{u_1^2 u_2}{u_2^2} = \frac{u_1^2}{u_2}$.

2.3 Παράγωγος και διαφορικό

Θυμίζουμε ότι μια συνάρτηση μιας μεταβλητής $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ καλείται *παραγωγίσιμη* στο $x_0 \in \mathbb{R}$, αν το όριο

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

είναι πραγματικός αριθμός. Τότε, αν θέσουμε $a = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ έχουμε ότι

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - ah}{h} = 0.$$

Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση $x \mapsto ax$ είναι μια γραμμική συνάρτηση από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$.

Γενικεύουμε τώρα τα παραπάνω για πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών ως εξής.

Ορισμός 2.3.1. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A . Λέμε ότι η f είναι *παραγωγίσιμη* (ή *διαφορίσιμη*) στο σημείο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ αν υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$(2.3.1) \quad \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - ah - bk}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

ή ισοδύναμα², αν υπάρχει $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ γραμμική συνάρτηση τέτοια ώστε

$$(2.3.2) \quad \lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - T(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Οι πραγματικοί αριθμοί a, b που ικανοποιούν την (2.3.1) είναι μοναδικοί όπως προκύπτει από την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 2.3.2. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A . Αν υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}$ ώστε να ικανοποιείται η (2.3.1), τότε τα a, b είναι μοναδικά και ισχύει ότι $a = f_x(x_0, y_0)$ και $b = f_y(x_0, y_0)$.

Απόδειξη. Από την (2.3.1) για $k = 0$ έχουμε

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) - ah}{|h|} = 0.$$

Συνεπώς,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) - ah}{h} = 0$$

δηλαδή

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} - a \right) = 0$$

που σημαίνει ότι

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = a$$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι $f_y(x_0, y_0) = b$. □

Από τα παραπάνω έχουμε τον εξής χαρακτηρισμό της παραγωγισιμότητας.

Πόρισμα 2.3.3. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A . Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

- (1) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$.
- (2) Η f είναι μερικώς παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ και ισχύει ότι

$$(2.3.3) \quad \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0) \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Η ύπαρξη μόνο των μερικών παραγώγων χωρίς τη συνθήκη (2.3.3) δεν συνεπάγεται την παραγωγισιμότητα της f , όπως φαίνεται από το επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.3.4. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

και $f(0, 0) = 0$. Τότε,

- (1) Η f είναι συνεχής στο $(0, 0)$.
- (2) Ισχύει ότι $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$.

²Θυμηθείτε ότι κάθε γραμμική συνάρτηση $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ είναι της μορφής $T(x, y) = ax + by$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$

(3) Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$.

Απόδειξη. (1) Παρατηρούμε ότι

$$|f(x, y)| = \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot |y| \leq |y|$$

και άρα, από τον κανόνα παρεμβολής, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$. Συνεπώς, η f είναι συνεχής στο $(0, 0)$.

(2) Έχουμε

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

και

$$f_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

(3) Αν η f ήταν παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$ τότε θα έπρεπε να ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)x - f_y(0, 0)y}{\|(x, y)\|} = 0 &\iff \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \\ &\iff \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = 0. \end{aligned}$$

Όμως, αυτό το όριο δεν υπάρχει. Πράγματι, για την ακολουθία $(x_n, y_n) = (1/n, 1/n) \rightarrow (0, 0)$ έχουμε $f(1/n, 1/n) = 1/2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n, y_n) = 1/2$. Όμως, για την ακολουθία $(x_n, y_n) = (1/n, 0) \rightarrow (0, 0)$ έχουμε $f(1/n, 0) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n, y_n) = 0$. $\square$

Ορισμός 2.3.5. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A τέτοιο ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$.

1) Ο πίνακας γραμμής

$$\begin{bmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

θα καλείται **παράγωγος της f στο σημείο $\mathbf{x}_0$** και θα συμβολίζεται με $f'(\mathbf{x}_0, y_0)$.

2) Η γραμμική απεικόνιση

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

με τύπο

$$T(x, y) = f_x(x_0, y_0)x + f_y(x_0, y_0)y$$

θα καλείται **διαφορικό της f στο σημείο $\mathbf{x}_0$** και θα συμβολίζεται με $D_{\mathbf{x}_0}f$.

Πρόταση 2.3.6. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A . Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ τότε είναι και συνεχής στο $\mathbf{x}_0$.

Απόδειξη. Έστω T η γραμμική απεικόνιση που ικανοποιεί την (2.3.2). Θέτουμε

$$(2.3.4) \quad R(\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - T(\mathbf{h})$$

για κάθε $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^2$ με $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h} \in A$. Τότε,

$$(2.3.5) \quad f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + T(\mathbf{h}) + R(\mathbf{h}).$$

Επίσης, από την (2.3.2) έχουμε³ $\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{R(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0$ και άρα

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} R(\mathbf{h}) = 0.$$

Επιπλέον, είναι εύκολο να δούμε ότι $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} T(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (ax + by) = 0$ και άρα

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} T(\mathbf{h}) = 0$$

Από τα παραπάνω και την (2.3.5) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) &= \lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} (f(\mathbf{x}_0) + T(\mathbf{h}) + R(\mathbf{h})) \\ &= f(\mathbf{x}_0) + \lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} T(\mathbf{h}) + \lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} R(\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) \end{aligned}$$

δηλαδή η f είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$. □

2.4 Εφαπτόμενο επίπεδο

Θυμίζουμε πρώτα ότι αν $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$, το γράφημα (συμβολίζουμε με $\text{Gr}(f)$) της f είναι το σύνολο

$$(2.4.1) \quad \text{Gr}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A \text{ και } z = f(x, y)\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Έστω $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A τέτοιο ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$. Το επίπεδο π του $\mathbb{R}^3$ που ορίζεται από την εξίσωση

$$(2.4.2) \quad (x, y, z) \in \pi \iff z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

θα καλείται **εφαπτόμενο επίπεδο** της f στο σημείο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$. Παρατηρήστε ότι ένα σημείο $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ περιέχεται στο εφαπτόμενο επίπεδο της f στο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ αν και μόνο αν το διάνυσμα

$$(2.4.3) \quad \mathbf{n} = (-f_x(x_0, y_0), -f_y(x_0, y_0), 1)$$

$\mathbf{n}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $(x - x_0, y - y_0, z - f(x_0, y_0))$. Με άλλα λόγια, αν το διάνυσμα $\mathbf{n}$ είναι κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο. Το διάνυσμα $\mathbf{n}$ που ορίζεται από την (2.4.3) καλείται **κάθετο διάνυσμα** της f στο σημείο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$.

2.5 Κλίση, σχέση παραγώγου και κατά κατεύθυνση παραγώγων

Ορισμός 2.5.1. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A . Αν η f είναι μερικώς παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$, το διάνυσμα $(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$ θα καλείται **κλίση** της f στο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ και θα συμβολίζεται με $\nabla f(x_0, y_0)$.

Παρατήρηση 2.5.2. Παρατηρήστε ότι σύμφωνα με τα παραπάνω το διαφορικό $D_{\mathbf{x}_0} f$ της f στο (x_0, y_0)

³Είναι $\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \|\mathbf{h}\| = 0$, οπότε

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} R(\mathbf{h}) = \lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \left(\frac{R(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} \cdot \|\mathbf{h}\| \right) = \lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{R(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} \cdot \lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \|\mathbf{h}\| = 0.$$

μπορεί να γραφτεί με τις εξής μορφές:

$$\begin{aligned}
 D_{\mathbf{x}_0}f(x, y) &= f_x(x_0, y_0)x + f_y(x_0, y_0)y \\
 &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)y \\
 (2.5.1) \quad &= f'(x_0, y_0) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (\text{γινόμενο πινάκων}) \\
 &= \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x, y) \quad (\text{εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων})
 \end{aligned}$$

για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Παρατήρηση 2.5.3. Από το Πρόρισμα 2.3.3 έχουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ αν και μόνο αν είναι μερικώς παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ και

$$(2.5.2) \quad \lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Πρόταση 2.5.4. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A . Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ τότε

$$\begin{aligned}
 (2.5.3) \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) &= f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2 \\
 &= \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u} \\
 &= D_{\mathbf{x}_0}f(\mathbf{u})
 \end{aligned}$$

για κάθε κατεύθυνση $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$.

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ μια κατεύθυνση στο $\mathbb{R}^2$ (δηλαδή, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ και $\|\mathbf{u}\| = 1$). Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$, εφαρμόζοντας την (2.5.2) για $\mathbf{h} = t\mathbf{u}$, $t \in \mathbb{R}$, παίρνουμε

$$(2.5.4) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (t\mathbf{u})|}{\|t\mathbf{u}\|} = 0$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $t \neq 0$ ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
 \frac{|f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (t\mathbf{u})|}{\|t\mathbf{u}\|} &= \frac{|f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (t\mathbf{u})|}{|t| \cdot \|\mathbf{u}\|} \\
 &= \frac{|f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (t\mathbf{u})|}{|t|} \\
 &= \left| \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0) - t(\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u})}{t} \right| \\
 &= \left| \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} - (\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u}) \right|,
 \end{aligned}$$

άρα η (2.5.4) γράφεται ως

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} - (\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u}) \right| = 0.$$

Έπεται ότι

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} - (\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u}) \right) = 0,$$

δηλαδή

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u}.$$

Επειδή εξ ορισμού $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{t}$, προκύπτει το ζητούμενο. $\square$

Η εφαρμογή της Πρότασης 2.5.4 χρειάζεται προσοχή γιατί δεν ισχύει απαραίτητα αν η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0) . Διευκρινίζουμε αυτό το σημείο με το επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.5.5. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0, 0) = 0$ και $f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ αν $(x, y) \neq (0, 0)$. Θα δείξουμε τα ακόλουθα:

(i) Η f είναι συνεχής στο $(0, 0)$.

(ii) Για κάθε κατεύθυνση $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ η παράγωγος της f στο $(0, 0)$ κατά την κατεύθυνση $\mathbf{u}$ υπάρχει.

(iii) Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$.

Απόδειξη. (i) Για κάθε $(x, y) \neq (0, 0)$ έχουμε ότι

$$|f(x, y)| = \left| \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{|x|^3}{x^2 + y^2} + \frac{|y|^3}{x^2 + y^2} \leq \frac{|x|^3}{x^2} + \frac{|y|^3}{y^2} = |x| + |y|.$$

Συνεπώς, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο $(0, 0)$.

(ii) Έστω $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ με $\|\mathbf{u}\| = 1$. Έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t\mathbf{u}) - f(\mathbf{0})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^3 u_1^3 + t^3 u_2^3}{t^2 u_1^2 + t^2 u_2^2}}{t} = \frac{u_1^3 + u_2^3}{u_1^2 + u_2^2} = u_1^3 + u_2^3,$$

αφού $\|\mathbf{u}\|^2 = u_1^2 + u_2^2 = 1$ (το $\mathbf{u}$ είναι μοναδιαίο).

(iii) Από το (ii) για $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 = (1, 0)$ έχουμε ότι

$$f_x(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_1}(0, 0) = 1,$$

και αντίστοιχα για $\mathbf{u} = \mathbf{e}_2 = (0, 1)$ έχουμε ότι

$$f_y(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_2}(0, 0) = 1.$$

Θα δείξουμε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$ με δύο τρόπους.

1ος τρόπος: Από το Πρόγραμμα 2.3.3 γνωρίζουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$ αν και μόνο αν

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)x - f_y(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0,$$

ή ισοδύναμα,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} - x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = - \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y + x y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = 0.$$

Τότε όμως, αν $x = y = t$ θα πρέπει να έχουμε

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t^3}{\sqrt{2}|t|^3} = 0 \quad \text{ή} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{|t|} = 0,$$

που βέβαια δεν ισχύει.

2ος τρόπος: Από την Πρόταση 2.5.4 αν η f ήταν παραγωγίσιμη στο $(0,0)$ τότε θα έπρεπε να ισχύει ότι $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = f_x(0,0)u_1 + f_y(0,0)u_2 = u_1 + u_2$.

Όμως από το (ii) έχουμε ότι $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = u_1^3 + u_2^3$. Επομένως, θα είχαμε $u_1^3 + u_2^3 = u_1 + u_2$ για όλα τα $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ με $u_1^2 + u_2^2 = 1$, άτοπο. $\square$

Παρατήρηση 2.5.6. Το αντίστροφο της Πρότασης 2.5.4 δεν ισχύει. Δηλαδή, μπορεί να ισχύει ο τύπος $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2$ για κάθε κατεύθυνση $\mathbf{u}$ αλλά η f να μην είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0) (βλ. Άσκηση B8).

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz ($|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$) έχουμε και το εξής πόρισμα.

Πόρισμα 2.5.7. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A . Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ τότε

$$(2.5.5) \quad \left| \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) \right| \leq \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|$$

για κάθε κατεύθυνση $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$. Επιπλέον, αν $\nabla f(\mathbf{x}_0) \neq (0,0)$ τότε οι κατευθύνσεις

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\nabla f(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|}, \quad \mathbf{u}_2 = -\frac{\nabla f(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|}$$

είναι αυτές για τις οποίες η f έχει τη μέγιστη και αντίστοιχα ελάχιστη κατευθυνόμενη παράγωγο, δηλαδή

$$(2.5.6) \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}_1}(\mathbf{x}_0) = \max \left\{ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) : \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 \text{ με } \|\mathbf{u}\| = 1 \right\} = \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|$$

και

$$(2.5.7) \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}_2}(\mathbf{x}_0) = \min \left\{ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) : \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 \text{ με } \|\mathbf{u}\| = 1 \right\} = -\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|.$$

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ με $\|\mathbf{u}\| = 1$. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$, από την Πρόταση 2.5.4 έχουμε

$$(2.5.8) \quad \left| \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) \right| = |\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u}| \leq \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\| \cdot \|\mathbf{u}\| = \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|.$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}_1}(\mathbf{x}_0) &= \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u}_1 = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \frac{\nabla f(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|} \\ &= \frac{\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \nabla f(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|} = \frac{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|^2}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|} = \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\| \end{aligned}$$

Άρα, αντικαθιστώντας στην (2.5.8) παίρνουμε

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) \right| \leq \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}_1}(\mathbf{x}_0)$$

που δίνει την (2.5.6). Ομοίως για το $\mathbf{u}_2$. □

2.6 Σχέση παραγώγου και μερικών παραγώγων

Είδαμε ότι αν η f είναι παραγωγίσιμη σε κάποιο σημείο τότε έχει και μερικές παραγώγους σε αυτό το σημείο. Επίσης είδαμε, με ένα παράδειγμα, ότι το αντίστροφο δεν ισχύει. Σε αυτήν την ενότητα θα δούμε ότι αν υποθέσουμε επιπλέον ότι οι μερικές παράγωγοι υπάρχουν σε μια περιοχή του σημείου και ως συναρτήσεις δύο μεταβλητών είναι συνεχείς σε αυτό το σημείο, τότε η f είναι παραγωγίσιμη. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε το εξής.

Θεώρημα 2.6.1 (ικανή συνθήκη παραγωγισιμότητας). Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A τέτοιο ώστε οι f_x, f_y ορίζονται σε μια περιοχή του $\mathbf{x}_0$ και είναι συνεχείς στο $\mathbf{x}_0$. Τότε, η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$.

Απόδειξη. Από τον χαρακτηρισμό της παραγωγισιμότητας πραγματικής συνάρτησης δύο μεταβλητών (Πόρισμα 2.3.3) αρκεί να δείξουμε ότι

$$(2.6.1) \quad \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

Έστω B μια ανοικτή μπάλα με κέντρο το (x_0, y_0) τέτοια ώστε $B \subseteq A$ και οι f_x, f_y να ορίζονται στο B . Θεωρούμε $(h, k) \neq (0, 0)$ αρκετά μικρό ώστε να έχουμε $(x_0 + h, y_0 + k) \in B$. Ας υποθέσουμε ότι $h \neq 0$ και $k \neq 0$. (Οι περιπτώσεις $h = 0$ και $k = 0$ αντιμετωπίζονται ομοίως).

Προσθαφαιρώντας τον όρο $f(x_0, y_0 + k)$, μπορούμε να γράψουμε τη διαφορά

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$$

ως άθροισμα δύο διαφορών όπου στη μία από αυτές μένει το y και στην άλλη το x , ως εξής:

$$[f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k)] + [f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)].$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής (για πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής) βλέπουμε ότι υπάρχουν $\vartheta_1 = \vartheta_1(h, k), \vartheta_2 = \vartheta_2(h, k) \in (0, 1)$ τέτοια ώστε

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k) = f_x(x_0 + \vartheta_1 h, y_0 + k)h$$

και

$$f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0 + \vartheta_2 k)k.$$

Συνεπώς, το πηλίκο

$$(2.6.2) \quad \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

γράφεται ως $Q_1(h, k) + Q_2(h, k)$ όπου

$$(2.6.3) \quad Q_1(h, k) = (f_x(x_0 + \vartheta_1 h, y_0 + k) - f_x(x_0, y_0)) \frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

και

$$(2.6.4) \quad Q_2(h, k) = (f_y(x_0, y_0 + \vartheta_2 k) - f_y(x_0, y_0)) \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}}.$$

Επειδή η f_x είναι συνεχής στο (x_0, y_0) , έπεται ότι

$$(2.6.5) \quad \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} (f_x(x_0 + \vartheta_1 h, y_0 + k) - f_x(x_0, y_0)) = 0.$$

Επιπλέον,

$$\left| \frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| \leq 1.$$

Έτσι, έχουμε ότι

$$(2.6.6) \quad \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} Q_1(h, k) = 0.$$

Ομοίως, επειδή η f_y είναι συνεχής στο (x_0, y_0) ,

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} (f_y(x_0, y_0 + \vartheta_2 k) - f_y(x_0, y_0)) = 0$$

και αφού

$$\left| \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| \leq 1$$

έπεται ότι

$$(2.6.7) \quad \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} Q_2(h, k) = 0.$$

Από τις (2.6.6) και (2.6.7) συμπεραίνουμε ότι το όριο του πηλίκου στην (2.6.2) καθώς το $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ είναι ίσο με 0. Συνεπώς, η (2.6.1) ισχύει, δηλαδή η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0) . $\square$

Ορισμός 2.6.2. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό. Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία οι f_x, f_y ορίζονται σε κάθε σημείο του A και είναι συνεχείς στο A καλείται **συνεχώς παραγωγίσιμη** στο A . Το σύνολο όλων των συνεχώς παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο A θα συμβολίζεται με $C^1(A)$.

Το επόμενο πόρισμα του Θεωρήματος 2.6.1 είναι ένα πολύ χρήσιμο κριτήριο παραγωγισιμότητας.

Πόρισμα 2.6.3. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $f \in C^1(A)$. Τότε η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του A .

Παράδειγμα 2.6.4. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = e^x y + x^2 e^y$. Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Επίσης, να βρείτε την παράγωγο της f στο σημείο $(1, 0)$.

Απόδειξη. Έχουμε $f_x(x, y) = ye^x + 2xe^y$ και $f_y(x, y) = e^x + x^2 e^y$. Οι f_x, f_y είναι συνεχείς. Πράγματι, έστω $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ και $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$. Τότε $f_x(x_n, y_n) = y_n e^{x_n} + 2x_n e^{y_n} \rightarrow ye^x + 2xe^y$, από τις αλγεβρικές ιδιότητες των ορίων πραγματικών ακολουθιών. Αφού λοιπόν οι f_x, f_y είναι συνεχείς, η f είναι παραγωγίσιμη.

Η παράγωγος της f σε ένα οποιοδήποτε σημείο (x, y) είναι εξ ορισμού ο πίνακας γραμμή $f'(x, y) = [f_x(x, y) \ f_y(x, y)]$. Δηλαδή, $f'(1, 0) = [2 \ e + 1]$. $\square$

Παράδειγμα 2.6.5. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = e^{x+2y}$. Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και υπολογίστε το όριο

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x+2y} - 1 - x - 2y}{|x| + |y|}.$$

Απόδειξη. Έχουμε $f_x(x, y) = e^{x+2y}$ και $f_y(x, y) = 2e^{x+2y}$. Επομένως, η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης και συνεπώς είναι παραγωγίσιμη.

Επίσης,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x+2y} - 1 - x - 2y}{|x| + |y|} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{e^{x+2y} - 1 - x - 2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{|x| + |y|} \right).$$

Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x+2y} - 1 - x - 2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)x - f_y(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0,$$

διότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$. Επειδή

$$\left| \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{|x| + |y|} \right| \leq 1$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x+2y} - 1 - x - 2y}{|x| + |y|} = 0.$$

$\square$

2.7 Ερωτήσεις και Ασκήσεις

A. Ερωτήσεις: Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς και ποιες είναι ψευδείς, αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας:

A1. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ και $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ τέτοιο ώστε οι μερικές παράγωγοι $f_x(x_0, y_0)$ και $f_y(x_0, y_0)$ υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί. Τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0) .

A2. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης. Τότε η f είναι παραγωγίσιμη σε όλα τα σημεία του $\mathbb{R}^2$.

A3. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ και $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Αν η f έχει κατευθυνόμενη παράγωγο $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x_0, y_0)$ κατά οποιαδήποτε κατεύθυνση $\mathbf{u}$ του $\mathbb{R}^2$ τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0) .

A4. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ και $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ τέτοιο ώστε οι $f_x(x_0, y_0)$, $f_y(x_0, y_0)$ υπάρχουν (στο $\mathbb{R}$). Τότε $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2$ για κάθε μοναδιαίο $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$.

A5. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ και $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ τέτοιο ώστε $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x_0, y_0) = u_1^2 + u_2^2$ για κάθε μοναδιαίο $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$. Τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0) .

B. Ασκήσεις

B1. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$. Αποδείξτε ότι η f είναι μερικώς παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$ αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$.

B2. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = x^2 + y^2$. Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και βρείτε το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{u}$ για το οποίο η παράγωγος της f κατά την κατεύθυνση $\mathbf{u}$ στο σημείο $(1, 2)$ γίνεται ελάχιστη.

B3. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0, 0) = 0$ και $f(x, y) = \frac{2x^3 + 3y^3}{x^2 + y^2}$ αν $(x, y) \neq (0, 0)$. Αποδείξτε ότι:

- (i) Η f είναι συνεχής στο $(0, 0)$.
- (ii) Για κάθε $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ με $\|\mathbf{u}\| = 1$ η $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0)$ υπάρχει.
- (iii) Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$.

B4. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y) = \frac{y^2}{x} \sqrt{x^2 + y^2}$ αν $x \neq 0$ και $f(x, y) = 0$ αν $x = 0$. Αποδείξτε ότι:

- (i) Για κάθε $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ με $\|\mathbf{u}\| = 1$, $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = 0$.
- (ii) Η f δεν είναι συνεχής στο $(0, 0)$. [Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι για $x > 0$, $f(x, y) = \sqrt{y^4 + \frac{y^6}{x^2}}$ και θεωρήστε την καμπύλη $y = \sqrt[6]{x}$.]

B5. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (i) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$ και $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$.
- (ii) Ισχύει ότι

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

B6. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$ και $f'(0, 0) \neq (0, 0)$ αποδείξτε ότι το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ δεν υπάρχει.

B7. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ και $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ τέτοιο ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0) . Αποδείξτε ότι υπάρχει σταθερά $C \geq 0$ τέτοια ώστε

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}_2}(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}_1}(x_0, y_0) \right| \leq C \|\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1\|$$

για όλα τα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^2$ με $\|\mathbf{u}_1\| = \|\mathbf{u}_2\| = 1$.

B8. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση, παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$. Έστω $c \neq f(0, 0)$ και έστω $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο

$$g(x, y) = \begin{cases} c & \text{αν } y = x^2 \text{ και } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(x, y) & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι:

- (i) Η g δεν έχει όριο στο $(0, 0)$. Κατά συνέπεια, η g δεν είναι συνεχής άρα ούτε και παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$.
- (ii) Για κάθε κατεύθυνση $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ ισχύει ότι $\frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0)$.
- (iii) Για κάθε κατεύθυνση $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ ισχύει ότι $\frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = g_x(0, 0)u_1 + g_y(0, 0)u_2$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Πρώτος κανόνας αλυσίδας, Θεώρημα μέσης τιμής

3.1 Καμπύλες στον $\mathbb{R}^2$

Με τον όρο (παραμετρική) καμπύλη στον $\mathbb{R}^2$ θα εννοούμε μια συνάρτηση $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, όπου το I είναι ένα διάστημα του $\mathbb{R}$. Το σύνολο τιμών $\{\mathbf{r}(t) : t \in I\} \subseteq \mathbb{R}^2$ θα το ονομάζουμε *ίχνος της καμπύλης*. Μια καμπύλη στο $\mathbb{R}^2$ θα συμβολίζεται με

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)).$$

Θα λέμε ότι η καμπύλη $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ είναι *παραγωγίσιμη* (ή *διαφορίσιμη*) στο σημείο $t_0 \in I$ αν οι $x'(t_0), y'(t_0)$ υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί και σε αυτήν την περίπτωση το διάνυσμα

$$\mathbf{r}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$$

θα καλείται *εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης στο t_0* .

Γενικά, μια παραμετρική καμπύλη στον $\mathbb{R}^d$ θα είναι μια συνάρτηση $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ που θα συμβολίζεται με

$$\mathbf{r}(t) = (x_1(t), \dots, x_d(t)).$$

Δύο πολύ χρήσιμα παραδείγματα επίπεδων καμπυλών είναι τα επόμενα:

(1) *Το κλειστό ευθύγραμμο τμήμα του $\mathbb{R}^2$ με άκρα τα σημεία $\mathbf{a}, \mathbf{b}$* : Έστω $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ δύο διαφορετικά σημεία του $\mathbb{R}^2$. Θεωρούμε την καμπύλη $\mathbf{r} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ με τύπο

$$(3.1.1) \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}), \quad t \in [0, 1].$$

Αν $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ και $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ τότε η $\mathbf{r}(t)$ παίρνει τη μορφή

$$(3.1.2) \quad \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$$

όπου

$$(3.1.3) \quad x(t) = a_1 + t(b_1 - a_1) \text{ και } y(t) = a_2 + t(b_2 - a_2)$$

Το ίχνος αυτής της καμπύλης καλείται *κλειστό ευθύγραμμο τμήμα του $\mathbb{R}^2$ με άκρα τα $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$* , και συμβολίζεται με $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. Δηλαδή,

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \{\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) : t \in [0, 1]\}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$x'(t) = b_1 - a_1 \text{ και } y'(t) = b_2 - a_2,$$

συνεπώς το εφαπτόμενο διάνυσμα της $\mathbf{r}$ είναι σταθερό για κάθε $t \in [0, 1]$ και δίνεται από τον τύπο

$$(3.1.4) \quad \mathbf{r}'(t) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = \mathbf{b} - \mathbf{a}.$$

(2) *Ο μοναδιαίος κύκλος του $\mathbb{R}^2$* : Η καμπύλη $\mathbf{r} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ με τύπο

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$$

έχει ίχνος τον μοναδιαίο κύκλο του $\mathbb{R}^2$, δηλαδή τον κύκλο με κέντρο το $(0, 0)$ και ακτίνα $R = 1$. Το εφαπτόμενο διάνυσμα δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{r}'(t) = (-\sin t, \cos t).$$

Παρατηρήστε ότι $\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}(t) = 0$ για κάθε $t \in [0, 2\pi]$, δηλαδή το εφαπτόμενο διάνυσμα στο t είναι κάθετο στο $\mathbf{r}(t)$.

3.2 Κανόνας αλυσίδας

Το επόμενο θεώρημα αποτελεί την πιο απλή μορφή του κανόνα αλυσίδας για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.

Θεώρημα 3.2.1. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ όπου $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, και $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ μια καμπύλη στον $\mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε το ίχνος της να περιέχεται στο A . Ορίζουμε $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ να είναι η σύνθεσή τους, δηλαδή

$$F(t) = f(\mathbf{r}(t)) = f(x(t), y(t)),$$

για κάθε $t \in I$. Έστω $t_0 \in I$ και έστω $\mathbf{x}_0 = \mathbf{r}(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$. Αν η $\mathbf{r}$ είναι παραγωγίσιμη στο t_0 και η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ τότε η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο t_0 και ισχύει ότι

$$(3.2.1) \quad \begin{aligned} F'(t_0) &= f_x(x(t_0), y(t_0)) x'(t_0) + f_y(x(t_0), y(t_0)) y'(t_0) \\ &= \nabla f(\mathbf{r}(t_0)) \cdot \mathbf{r}'(t_0). \end{aligned}$$

Απόδειξη. Θέτουμε $x_0 = x(t_0)$ και $y_0 = y(t_0)$. Έχουμε

$$(3.2.2) \quad \begin{aligned} F'(t_0) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(x(t), y(t)) - f(x(t_0), y(t_0))}{t - t_0} \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(x(t), y(t)) - f(x_0, y_0)}{t - t_0} \end{aligned}$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{r}(t_0) = (x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$, έχουμε

$$(3.2.3) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)(x-x_0) - f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0$$

Για κάθε $(x, y) \in A$ θέτουμε

$$E(x, y) = \begin{cases} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)(x-x_0) - f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} & \text{αν } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{αν } (x, y) = (x_0, y_0) \end{cases}$$

Παρατηρήστε ότι, από την (3.2.3),

$$(3.2.4) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} E(x, y) = 0$$

(δηλαδή η $E(x, y)$ είναι συνεχής στο (x_0, y_0)), και

$$(3.2.5) \quad \begin{aligned} f(x, y) - f(x_0, y_0) &= f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &+ E(x, y) \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \end{aligned}$$

για όλα τα $(x, y) \in A$ (συμπεριλαμβανομένου του (x_0, y_0)).

Έχουμε τώρα

$$\begin{aligned} F(t) - F(t_0) &= f(x(t), y(t)) - f(x_0, y_0) \\ &\stackrel{(3.2.5)}{=} f_x(x_0, y_0)(x(t) - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y(t) - y_0) \\ &+ E(x(t), y(t)) \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2} \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} F'(t_0) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} \\ &= f_x(x_0, y_0) \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} + f_y(x_0, y_0) \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0} \\ &+ \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{E(x(t), y(t)) \sqrt{(x(t) - x(t_0))^2 + (y(t) - y(t_0))^2}}{t - t_0} \\ &= f_x(x_0, y_0)x'(t_0) + f_y(x_0, y_0)y'(t_0) \\ &+ \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{E(x(t), y(t)) \sqrt{(x(t) - x(t_0))^2 + (y(t) - y(t_0))^2}}{t - t_0}. \end{aligned}$$

Συνεπώς, για να ολοκληρωθεί η απόδειξη αρκεί να ελέγξουμε ότι

$$(3.2.6) \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{E(x(t), y(t)) \sqrt{(x(t) - x(t_0))^2 + (y(t) - y(t_0))^2}}{t - t_0} = 0.$$

Πράγματι, το πηλίκο $\frac{E(x(t), y(t)) \sqrt{(x(t) - x(t_0))^2 + (y(t) - y(t_0))^2}}{t - t_0}$ γράφεται ως γινόμενο

$$E(x(t), y(t)) \cdot \frac{\sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2}}{t - t_0}.$$

Το όριο του πρώτου παράγοντα στο t_0 , από την (3.2.4), είναι ίσο με 0, αφού

$$(3.2.7) \quad \lim_{t \rightarrow t_0} E(x(t), y(t)) = E(x(t_0), y(t_0)) = E(x_0, y_0) = 0$$

Επίσης το όριο του δεύτερου παράγοντα στο t_0 υπάρχει και είναι πεπερασμένο:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2}}{t - t_0} &= \lim_{t \rightarrow t_0} \sqrt{\left(\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}\right)^2 + \left(\frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}\right)^2} \\ &= \sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2}. \end{aligned}$$

□

Το παραπάνω θεώρημα γενικεύεται άμεσα ως εξής (η απόδειξη είναι ανάλογη):

Θεώρημα 3.2.2. Έστω $f(x_1, \dots, x_d) : A \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}^d$ ανοικτό, και $\mathbf{r}(t) = (x_1(t), \dots, x_d(t)) : I \rightarrow \mathbb{R}^d$, όπου I διάστημα του $\mathbb{R}$. Έστω $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η σύνθεση $F = f \circ \mathbf{r}$, δηλαδή

$$F(t) = f(x_1(t), \dots, x_d(t))$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Έστω $t_0 \in \mathbb{R}$ και έστω $\mathbf{x}_0 = (x_1(t_0), \dots, x_d(t_0))$. Αν οι $x_1, \dots, x_d$ είναι παραγωγίσιμες στο t_0 και η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$, τότε η F είναι παραγωγίσιμη στο t_0 και ισχύει ότι

$$F'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) \cdot x'_1(t_0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_d}(\mathbf{x}_0) \cdot x'_d(t_0).$$

Ισοδύναμα, αν θέσουμε $\mathbf{r}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ και $\mathbf{r}'(t_0) = (x'_1(t_0), \dots, x'_n(t_0))$, τότε

$$F'(t_0) = \nabla f(\mathbf{r}(t_0)) \cdot \mathbf{r}'(t_0).$$

3.3 Εφαρμογές

3.3.1 Ισοσταθμικές καμπύλες και κλίση

Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ όπου $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ μια καμπύλη στο $\mathbb{R}^2$ που το ίχνος της περιέχεται στο A . Η καμπύλη $\mathbf{r}$ θα καλείται **ισοσταθμική καμπύλη της f** αν ο περιορισμός της f στο ίχνος της $\mathbf{r}$ είναι σταθερή συνάρτηση (δηλαδή, $f(\mathbf{r}(t)) = c$ για όλα τα $t \in I$).

Πρόταση 3.3.1 (καθετότητα του ∇f και των ισοσταθμικών καμπυλών). Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ όπου $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ μια ισοσταθμική καμπύλη της f . Αν η $\mathbf{r}$ είναι παραγωγίσιμη στο $t_0 \in I$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{r}(t_0)$ τότε το διάνυσμα $\nabla f(\mathbf{r}(t_0))$ της κλίσης της f στο σημείο $\mathbf{r}(t_0)$ είναι κάθετο προς το εφαπτόμενο διάνυσμα $\mathbf{r}'(t_0)$ της καμπύλης στο t_0 .

Απόδειξη. Έστω $F(t) = f(\mathbf{r}(t))$, $t \in I$. Η F είναι σταθερή συνάρτηση και άρα $F'(t) = 0$ για όλα τα $t \in I$. Από την άλλη πλευρά, έχουμε ότι $F'(t_0) = \nabla f(\mathbf{r}(t_0)) \cdot \mathbf{r}'(t_0)$ και άρα $\nabla f(\mathbf{r}(t_0)) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0$. □

3.3.2 Θεώρημα μέσης τιμής για πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών

Θεώρημα 3.3.2. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ δύο διαφορετικά σημεία του A τέτοια ώστε το κλειστό ευθύγραμμο τμήμα $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ με άκρα τα $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ να περιέχεται στο A . Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής σε κάθε (x, y) στο κλειστό ευθύγραμμο τμήμα $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ και παραγωγίσιμη σε κάθε (x, y) στο ανοικτό ευθύγραμμο τμήμα¹ $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Τότε υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$(3.3.1) \quad f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a} + \xi(\mathbf{b} - \mathbf{a})) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}).$$

Ισοδύναμα, υπάρχει σημείο ξ στο ανοικτό ευθύγραμμο τμήμα $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ τέτοιο ώστε

$$(3.3.2) \quad f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \nabla f(\xi) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{r} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ με $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ και έστω $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$F(t) = f(\mathbf{r}(t)) = f(\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}))$$

για κάθε $t \in [0, 1]$. Επειδή $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1] \subseteq A$, η F είναι καλά ορισμένη. Επιπλέον, όπως είδαμε (βλ. σχέση (3.1.4)) το εφαπτόμενο διάνυσμα $\mathbf{r}'(t)$ είναι σταθερό και ίσο με $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ για οποιοδήποτε $t \in [0, 1]$. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη, από τον κανόνα αλυσίδας (Θεώρημα 3.2.1) έπεται ότι και η F είναι παραγωγίσιμη με

$$(3.3.3) \quad F'(t) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = \nabla f(\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

για κάθε $t \in (0, 1)$. Από το θεώρημα μέσης τιμής (για πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής) έχουμε

$$(3.3.4) \quad F(1) - F(0) = F'(\xi)$$

για κάποιο $\xi \in (0, 1)$. Επειδή $F(0) = f(\mathbf{a})$ και $F(1) = f(\mathbf{b})$, αντικαθιστώντας στην (3.3.4) παίρνουμε

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a} + \xi(\mathbf{b} - \mathbf{a})) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}).$$

Θέτοντας τώρα $\xi = \mathbf{a} + \xi(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ έχουμε ότι $\xi \in (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ και

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \nabla f(\xi) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}).$$

□

Πόρισμα 3.3.3. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

- (1) Η f είναι σταθερή.
- (2) Για κάθε $(x, y) \in A$ ισχύει ότι $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$.

¹Το ανοικτό ευθύγραμμο τμήμα του $\mathbb{R}^2$ με άκρα τα $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ορίζεται να είναι το σύνολο

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) : t \in (0, 1)\}.$$

Απόδειξη. (1) $\implies$ (2): Αν η f είναι σταθερή τότε

$$f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

και ομοίως

$$f_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0.$$

(2) $\implies$ (1): Έστω $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ και έστω $c = f(\mathbf{a})$. Έστω $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ τυχόν σημείο του $\mathbb{R}^2$ διαφορετικό από το $\mathbf{a}$. Οι f_x, f_y ως σταθερές είναι και συνεχείς, άρα η f είναι παραγωγίσιμη σε όλα τα σημεία του $\mathbb{R}^2$. Τώρα, από το Θεώρημα 3.3.2 έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ με

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = f_x(\xi)(b_1 - a_1) + f_y(\xi)(b_2 - a_2)$$

και αφού $f_x = f_y = 0$ έπεται ότι $f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = 0$ δηλαδή $f(\mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) = c$. $\square$

Σημείωση: Το Πόρισμα 3.3.3 δεν ισχύει όταν το πεδίο ορισμού της f είναι τυχόν υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Για παράδειγμα, έστω $A = D_1 \cup D_2$, όπου D_1, D_2 είναι δύο ξένοι ανοικτοί δίσκοι του $\mathbb{R}^2$ και $f(x, y) = 1$ αν $(x, y) \in D_1$ ενώ $f(x, y) = 2$ αν $(x, y) \in D_2$. Τότε, $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ αλλά η f δεν είναι σταθερή. Το πρόβλημα εδώ είναι ότι αν θεωρήσουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει ένα σημείο από τον πρώτο δίσκο με ένα σημείο από τον δεύτερο, τότε αυτό το ευθύγραμμο τμήμα δεν περιέχεται ολόκληρο στο A και έτσι δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 3.3.2.

3.3.3 Κανόνας αλυσίδας για μερικές παραγώγους

Θεώρημα 3.3.4. Έστω $d, m \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ και $x_1, \dots, x_d : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$. Έστω $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση

$$F(t_1, \dots, t_m) = f(x_1(t_1, \dots, t_m), \dots, x_d(t_1, \dots, t_m))$$

για κάθε $(t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{R}^m$.

Έστω $\mathbf{t}_0 = (t_1^0, \dots, t_m^0) \in \mathbb{R}^m$ και $\mathbf{x}_0 = (x_1(\mathbf{t}_0), \dots, x_d(\mathbf{t}_0))$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ και οι $x_1, \dots, x_d$ είναι μερικώς παραγωγίσιμες στο $\mathbf{t}_0$ τότε η F είναι μερικώς παραγωγίσιμη στο $\mathbf{t}_0$ και για κάθε $j = 1, \dots, m$ ισχύει ότι

$$\frac{\partial F}{\partial t_j}(\mathbf{t}_0) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t_j}(\mathbf{t}_0)$$

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε κάποιο $j \in \{1, \dots, m\}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t_j}(\mathbf{t}_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t_1^0, \dots, t_j^0 + t, \dots, t_m^0) - F(t_1^0, \dots, t_j^0, \dots, t_m^0)}{t} \\ (3.3.5) \quad &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(\mathbf{t}_0 + t\mathbf{e}_j) - F(\mathbf{t}_0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_1(\mathbf{t}_0 + t\mathbf{e}_j), \dots, x_d(\mathbf{t}_0 + t\mathbf{e}_j)) - f(x_1(\mathbf{t}_0), \dots, x_d(\mathbf{t}_0))}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(y_1(t), \dots, y_d(t)) - f(y_1(0), \dots, y_d(0))}{t} = G'(0) \end{aligned}$$

όπου $y_i(t) = x_i(\mathbf{t}_0 + t\mathbf{e}_j)$ για κάθε $i = 1, \dots, d$ και $G(t) = f(y_1(t), \dots, y_d(t))$, $t \in \mathbb{R}$. Από το Θεώρημα 3.2.2

παίρνουμε

$$G'(0) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial y_i}(y_1(0), \dots, y_d(0)) \cdot y'_i(0)$$

Έχουμε

$$y'_i(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{y_i(t) - y_i(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x_i(t_0 + t\mathbf{e}_j) - x_i(t_0)}{t} = \frac{\partial x_i}{\partial t_j}(t_0)$$

και αντίστοιχα

$$\frac{\partial f}{\partial y_i}(y_1(0), \dots, y_d(0)) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1(t_0), \dots, x_d(t_0))$$

για όλα τα $i = 1, \dots, d$. Συνεπώς,

$$(3.3.6) \quad G'(0) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1(t_0), \dots, x_d(t_0)) \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t_j}(t_0)$$

Από τις (3.3.5) και (3.3.6) έπεται το ζητούμενο. □

3.4 Ασκήσεις

Άσκηση 3.4.1. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση που ικανοποιεί την

$$(3.4.1) \quad f(tx, ty) = t^a f(x, y)$$

για όλα τα $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ και $t \in (0, +\infty)$ (όπου $a \in \mathbb{R}$ σταθερά). Αποδείξτε ότι για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ισχύει ότι

$$xf_x(x, y) + yf_y(x, y) = af(x, y).$$

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε ένα σημείο $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Έστω $F : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση

$$F(t) = f(x_0 t, y_0 t)$$

Από τον κανόνα αλυσίδας (για $x(t) = x_0 t$ και $y(t) = y_0 t$) έχουμε

$$\begin{aligned} F'(t) &= f_x(x_0 t, y_0 t) \cdot x'(t) + f_y(x_0 t, y_0 t) \cdot y'(t) \\ &= x_0 \cdot f_x(x_0 t, y_0 t) + y_0 \cdot f_y(x_0 t, y_0 t) \end{aligned}$$

για κάθε $t > 0$. Από την άλλη πλευρά, από την (3.4.1),

$$F'(t) = at^{a-1}f(x_0, y_0)$$

και άρα θα πρέπει να ισχύει ότι

$$(3.4.2) \quad x_0 f_x(x_0 t, y_0 t) + y_0 f_y(x_0 t, y_0 t) = at^{a-1}f(x_0, y_0)$$

για κάθε $t > 0$. Θέτοντας $t = 1$ στην (3.4.2) έχουμε ότι

$$x_0 f_x(x_0, y_0) + y_0 f_y(x_0, y_0) = af(x_0, y_0)$$

και επειδή αυτό ισχύει για κάθε $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ η απόδειξη είναι πλήρης. $\square$

Με παρόμοιο τρόπο απαντάμε και στην επόμενη άσκηση.

Άσκηση 3.4.2. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση που ικανοποιεί την

$$(3.4.3) \quad f(x+t, y+t) = f(x, y)$$

για όλα τα $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ και $t \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ισχύει ότι

$$f_x(x, y) + f_y(x, y) = 0.$$

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε ένα σημείο $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Έστω $F : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση

$$F(t) = f(x_0 + t, y_0 + t).$$

Από τον κανόνα αλυσίδας (για $x(t) = x_0 + t$ και $y(t) = y_0 + t$) έχουμε

$$\begin{aligned} F'(t) &= f_x(x_0 + t, y_0 + t) \cdot x'(t) + f_y(x_0 + t, y_0 + t) \cdot y'(t) \\ &= f_x(x_0 + t, y_0 + t) + f_y(x_0 + t, y_0 + t) \end{aligned}$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Από την άλλη πλευρά, από την (3.4.3), έχουμε $F(t) = f(x_0, y_0) = c$ και άρα

$$F'(t) = 0.$$

Συνεπώς, ισχύει ότι

$$(3.4.4) \quad f_x(x_0 + t, y_0 + t) + f_y(x_0 + t, y_0 + t) = 0$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Θέτοντας $t = 0$ στην (3.4.2) $t = 0$ έχουμε ότι

$$f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0) = 0$$

και επειδή αυτό ισχύει για κάθε $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ παίρνουμε το ζητούμενο. $\square$

Μια άλλη γενίκευση της Άσκησης 3.4.1 είναι η ακόλουθη.

Άσκηση 3.4.3. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση που ικανοποιεί την

$$(3.4.5) \quad f(t_1 x_1, t_2 x_2) = t_1^{a_1} t_2^{a_2} f(x, y)$$

για όλα τα $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ και $t_1, t_2 > 0$. Αποδείξτε ότι για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ισχύει ότι

$$a_2 x f_x(x, y) = a_1 y f_y(x, y) = a_1 a_2 f(x, y).$$

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε ένα σημείο $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Έστω $F : (0, +\infty) \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση

$$F(t_1, t_2) = f(x_0 t_1, y_0 t_2).$$

Από το Θεώρημα 3.3.4 (για $x(t_1, t_2) = x_0 t_1$ και $y(t_1, t_2) = y_0 t_2$) έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial t_1}(t_1, t_2) &= f_x(x_0 t_1, y_0 t_2) \cdot \frac{\partial x}{\partial t_1}(t_1, t_2) + f_y(x_0 t_1, y_0 t_2) \cdot \frac{\partial y}{\partial t_1}(t_1, t_2) \\ &= f_x(x_0 t, y_0 t) \cdot x_0\end{aligned}$$

για κάθε $t_1, t_2 > 0$. Ομοίως,

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial t_2}(t_1, t_2) &= f_x(x_0 t_1, y_0 t_2) \cdot \frac{\partial x}{\partial t_2}(t_1, t_2) + f_y(x_0 t_1, y_0 t_2) \cdot \frac{\partial y}{\partial t_2}(t_1, t_2) \\ &= f_y(x_0 t_1, y_0 t_2) \cdot y_0.\end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά, από την (3.4.5),

$$\frac{\partial F}{\partial t_1}(t_1, t_2) = a_1 t_1^{a_1-1} t_2^{a_2} f(x_0, y_0)$$

και

$$\frac{\partial F}{\partial t_2}(t_1, t_2) = t_1^{a_1} a_2 t_2^{a_2-1} f(x_0, y_0)$$

άρα θα πρέπει να ισχύουν οι

$$x_0 f_x(x_0 t_1, y_0 t_2) = a_1 t_1^{a_1-1} t_2^{a_2} f(x_0, y_0)$$

και, αντίστοιχα,

$$y_0 f_y(x_0 t_1, y_0 t_2) = t_1^{a_1} a_2 t_2^{a_2-1} f(x_0, y_0)$$

για κάθε $t_1, t_2 > 0$. Θέτοντας $t_1 = t_2 = 1$ έχουμε ότι

$$x_0 f_x(x_0, y_0) = a_1 f(x_0, y_0) \text{ και } y_0 f_y(x_0, y_0) = a_2 f(x_0, y_0)$$

οπότε

$$a_2 x_0 f_x(x_0, y_0) = a_1 y_0 f_y(x_0, y_0) = a_1 a_2 f(x_0, y_0)$$

Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ παίρνουμε το ζητούμενο. □

Άσκηση 3.4.4. Έστω $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και έστω $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση

$$F(u, v, w) = f(u - v, v - w, w - u)$$

για κάθε $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$. Αποδείξτε ότι

$$F_u + F_v + F_w = 0.$$

Απόδειξη. Θέτουμε $x(u, v, w) = u - v$, $y(u, v, w) = v - w$ και $z(u, v, w) = w - u$. Έστω $(u_0, v_0, w_0) \in \mathbb{R}^3$ και

έστω $x_0 = u_0 - v_0$, $y_0 = v_0 - w_0$ και $z_0 = w_0 - u_0$. Έχουμε

$$\begin{aligned} F_u(u_0, v_0, z_0) &= \frac{\partial F}{\partial u}(u_0, v_0, w_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0, w_0) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0, w_0) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0, w_0) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) - \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0). \end{aligned}$$

Ομοίως,

$$\begin{aligned} F_v(u_0, v_0, z_0) &= \frac{\partial F}{\partial v}(u_0, v_0, w_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0, w_0) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0, w_0) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0, w_0) \\ &= -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} F_w(u_0, v_0, z_0) &= \frac{\partial F}{\partial w}(u_0, v_0, w_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \frac{\partial x}{\partial w}(u_0, v_0, w_0) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \frac{\partial y}{\partial w}(u_0, v_0, w_0) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \frac{\partial z}{\partial w}(u_0, v_0, w_0) \\ &= -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0). \end{aligned}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε τη ζητούμενη σχέση. $\square$

Άσκηση 3.4.5. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ με $f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{b})$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ στο ανοικτό ευθύγραμμο τμήμα $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ τέτοιο ώστε

$$(3.4.6) \quad \nabla f(\xi) \perp \mathbf{b} - \mathbf{a}.$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 3.3.2 έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ τέτοιο ώστε

$$(3.4.7) \quad f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \nabla f(\xi) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}).$$

Επειδή $f(\mathbf{b}) = f(\mathbf{a})$, έπεται ότι $\nabla f(\xi) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = 0$, δηλαδή $\nabla f(\xi) \perp \mathbf{b} - \mathbf{a}$. $\square$

Άσκηση 3.4.6. Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ καλείται τοπικά σταθερή αν είναι σταθερή γύρω από κάθε σημείο του $\mathbb{R}^2$, δηλαδή αν για κάθε σημείο $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ υπάρχει $\delta = \delta(a_1, a_2) > 0$ τέτοιο ώστε η f να είναι σταθερή στην ανοικτή μπάλα $B_\delta(a_1, a_2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x - a_1, y - a_2)\| \leq \delta\}$ με κέντρο το (a_1, a_2) και ακτίνα δ . Αποδείξτε ότι κάθε τοπικά σταθερή συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ είναι σταθερή.

Απόδειξη. Από το Πόρισμα 3.3.3 αρκεί να δείξουμε ότι η f είναι μερικώς παραγωγίσιμη και $f_x = f_y = 0$.

Πράγματι, έστω $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ και έστω $\delta = \delta(a_1, a_2) > 0$ η ακτίνα της μπάλας με κέντρο το (a_1, a_2) όπου η f είναι σταθερή. Τότε, για κάθε $h \in \mathbb{R}$ με $0 < |h| < \delta$ έχουμε ότι το σημείο $(a_1 + h, a_2)$ ανήκει σε αυτή τη μπάλα (αφού η απόστασή του από το (a_1, a_2) ισούται με $|h| < \delta$) και άρα $f(a_1 + h, a_2) = f(a_1, a_2)$. Συνεπώς,

$$f_x(a_1, a_2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + h, a_2) - f(a_1, a_2)}{h} = 0.$$

Ομοίως, για $k \in \mathbb{R}$ με $0 < |k| < \delta$ το σημείο $(a_1, a_2 + k)$ ανήκει στην ίδια μπάλα (αφού η απόστασή του από το (a_1, a_2) ισούται με $|k| < \delta$) και άρα $f(a_1, a_2 + k) = f(a_1, a_2)$. Συνεπώς,

$$f_y(a_1, a_2) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2 + k) - f(a_1, a_2)}{k} = 0.$$

□

Άσκηση 3.4.7. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x + h, y) = f(x, y + h) = f(x, y)$ για όλα τα $h \in (-\delta, \delta)$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση.

Απόδειξη. Από γνωστή συνέπεια του θεωρήματος μέσης τιμής, αρκεί να δείξουμε ότι η f έχει μηδενικές μερικές παραγώγους σε κάθε σημείο (x, y) . Πράγματι, έστω $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Από την υπόθεση υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x + h, y) = f(x, y + h) = f(x, y)$ για όλα τα $h \in (-\delta, \delta)$ και άρα $f(x + h, y) - f(x, y) = f(x, y + h) - f(x, y) = 0$ για h αρκετά κοντά στο 0. Συνεπώς,

$$f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

και ομοίως

$$f_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

□

Άσκηση 3.4.8. Έστω $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Αν υπάρχουν $\mathbf{a} \neq \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ με $f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{b})$ και $g(\mathbf{a}) = g(\mathbf{b})$, αποδείξτε ότι τότε υπάρχουν $\xi, \eta \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ τέτοια ώστε

$$f_x(\xi)g_y(\eta) - f_y(\xi)g_x(\eta) = 0.$$

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{a} = (a_1, a_2), \mathbf{b} = (b_1, b_2)$ δύο διαφορετικά σημεία του $\mathbb{R}^2$. Από το θεώρημα μέσης τιμής για την $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ υπάρχει $\xi \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ τέτοιο ώστε

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \nabla f(\xi) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = f_x(\xi)(b_1 - a_1) + f_y(\xi)(b_2 - a_2).$$

Ομοίως, για την g υπάρχει $\eta \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ με

$$g(\mathbf{b}) - g(\mathbf{a}) = \nabla g(\eta) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = g_x(\eta)(b_1 - a_1) + g_y(\eta)(b_2 - a_2).$$

Αφού $f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{b})$ και $g(\mathbf{a}) = g(\mathbf{b})$, οι παραπάνω εξισώσεις δίνουν ότι

$$f_x(\xi)(b_1 - a_1) + f_y(\xi)(b_2 - a_2) = 0$$

και

$$g_x(\eta)(b_1 - a_1) + g_y(\eta)(b_2 - a_2) = 0,$$

και, επειδή $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$, το σύστημα

$$f_x(\xi)x + f_y(\xi)y = 0$$

$$g_x(\eta)x + g_y(\eta)y = 0$$

έχει μη μηδενική λύση. Εφόσον το σύστημα είναι ομογενές, θα πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών να είναι μηδενική, δηλαδή

$$f_x(\xi)g_y(\eta) - f_y(\xi)g_x(\eta) = 0.$$

□

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Παράγωγοι ανώτερης τάξης

4.1 Μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Έστω (x_0, y_0) εσωτερικό σημείο του A τέτοιο ώστε οι f_x, f_y να υπάρχουν τουλάχιστον σε μια περιοχή του (x_0, y_0) . Οι μερικές παράγωγοι των συναρτήσεων f_x, f_y ως προς x και y στο σημείο (x_0, y_0) (εφόσον υπάρχουν) καλούνται **μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης της f στο σημείο (x_0, y_0)** .

Πιο συγκεκριμένα, έχουμε τέσσερις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x_0, y_0) &= (f_x)_x(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_x(x, y_0) - f_x(x_0, y_0)}{x - x_0} \\ f_{xy}(x_0, y_0) &= (f_x)_y(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f_x(x_0, y) - f_x(x_0, y_0)}{y - y_0} \\ f_{yx}(x_0, y_0) &= (f_y)_x(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_y(x, y_0) - f_y(x_0, y_0)}{x - x_0} \\ f_{yy}(x_0, y_0) &= (f_y)_y(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f_y(x_0, y) - f_y(x_0, y_0)}{y - y_0}. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιούμε επίσης τον συμβολισμό

$$\begin{aligned} f_{xx}(x_0, y_0) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), f_{xy}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0), f_{yy}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Οι μερικές παράγωγοι $f_{xx}(x_0, y_0)$, $f_{xy}(x_0, y_0)$, $f_{yy}(x_0, y_0)$ και $f_{yx}(x_0, y_0)$ είναι οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης της f στο σημείο (x_0, y_0) . Ειδικότερα, οι $f_{xy}(x_0, y_0)$ και $f_{yx}(x_0, y_0)$ καλούνται **μεικτές** μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης της f στο σημείο (x_0, y_0) .

Με τον παραπάνω τρόπο ορίζονται οι συναρτήσεις $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$ στα κατάλληλα σύνολα των σημείων (x, y) του A όπου οι τιμές $f_{xx}(x, y)$, $f_{xy}(x, y)$, $f_{yx}(x, y)$, $f_{yy}(x, y)$ υπάρχουν και είναι πεπερασμένες.

Παράδειγμα 4.1.1. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = x^3 + y^3 + x^2y + xy^2$. Για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ έχουμε

$f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy + y^2$, $f_y(x, y) = 3y^2 + x^2 + 2xy$ και

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= (f_x)_x(x, y) = 6x + 2y, & f_{xy}(x, y) &= (f_x)_y(x, y) = 2x + 2y, \\ f_{yx}(x, y) &= (f_y)_x(x, y) = 2x + 2y, & f_{yy}(x, y) &= (f_y)_y(x, y) = 6y + 2x. \end{aligned}$$

4.2 Συμμετρία των μεικτών παραγώγων

Στο Παράδειγμα 4.1.1 οι μεικτές μερικές παράγωγοι f_{xy} και f_{yx} είναι ίσες. Αυτό δεν είναι τυχαίο διότι για τη συνάρτηση του παραπάνω παραδείγματος ισχύουν οι υποθέσεις του ακόλουθου θεωρήματος.

Θεώρημα 4.2.1 (θεώρημα Schwarz). Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ όπου $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και (x_0, y_0) εσωτερικό σημείο του A . Αν οι μερικές παράγωγοι της f έως και δεύτερης τάξης ορίζονται σε μια περιοχή του (x_0, y_0) και οι f_{xy}, f_{yx} είναι συνεχείς στο (x_0, y_0) , τότε $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.1 χρειαζόμαστε κάποια προεργασία. Σε ό,τι ακολουθεί, για απλότητα θα υποθέσουμε ότι $A = \mathbb{R}^2$. Έστω $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Από τους ορισμούς των μεικτών παραγώγων έχουμε

$$(4.2.1) \quad f_{yx}(x_0, y_0) = (f_y)_x(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(x_0 + h, y_0) - f_y(x_0, y_0)}{h}.$$

Επειδή, για κάθε $h \neq 0$,

$$(4.2.2) \quad f_y(x_0 + h, y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0)}{k}$$

και

$$(4.2.3) \quad f_y(x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

αντικαθιστώντας τις (4.2.2) και (4.2.3) στην (4.2.1) βλέπουμε ότι η $f_{yx}(x_0, y_0)$ ισούται με το επάλληλο όριο

$$(4.2.4) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \left(\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)}{hk} \right).$$

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι η $f_{xy}(x_0, y_0)$ ισούται με

$$(4.2.5) \quad \lim_{k \rightarrow 0} \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)}{hk} \right).$$

Τα παραπάνω μας υποδεικνύουν να δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 4.2.2. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ και $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Για κάθε $h, k \neq 0$ ορίζουμε

$$\Delta(h, k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0).$$

Η επόμενη πρόταση είναι μια διδιάστατη επέκταση του θεωρήματος μέσης τιμής.

Πρόταση 4.2.3. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση που έχει μερικές παραγώγους έως και δεύτερης τάξης.

Έστω $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $h, k \neq 0$ και έστω

$$R(h, k) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x_0 < x < x_0 + h, y_0 < y < y_0 + k\}$$

το ανοικτό ορθογώνιο με κορυφές τα σημεία (x_0, y_0) , $(x_0, y_0 + k)$, $(x_0 + h, y_0)$, $(x_0 + h, y_0 + k)$. Τότε:

(1) Υπάρχει $(x_1, y_1) \in R(h, k)$ τέτοιο ώστε

$$(4.2.6) \quad \frac{\Delta(h, k)}{hk} = f_{xy}(x_1, y_1).$$

(2) Ομοίως, υπάρχει $(x_2, y_2) \in R(h, k)$ τέτοιο ώστε

$$(4.2.7) \quad \frac{\Delta(h, k)}{hk} = f_{yx}(x_2, y_2).$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε μόνο τον ισχυρισμό (1) (ο ισχυρισμός (2) προκύπτει με όμοιο τρόπο). Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\delta(x) = f(x, y_0 + k) - f(x, y_0).$$

Παρατηρούμε ότι

$$(4.2.8) \quad \Delta(h, k) = \delta(x_0 + h) - \delta(x_0).$$

Επίσης, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $\delta(x)$ είναι παραγωγίσιμη, με παράγωγο

$$(4.2.9) \quad \delta'(x) = f_x(x, y_0 + k) - f_x(x, y_0)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής (για συναρτήσεις μιας μεταβλητής) για τη συνάρτηση $\delta(x)$ έχουμε ότι

$$(4.2.10) \quad \begin{aligned} \Delta(h, k) &= \delta(x_0 + h) - \delta(x_0) = h\delta'(x_1) \\ &\stackrel{(4.2.9)}{=} h(f_x(x_1, y_0 + k) - f_x(x_1, y_0)) \end{aligned}$$

για κάποιο $x_1 \in (x_0, x_0 + h)$.

Τώρα, παρατηρώντας ότι η συνάρτηση $g(y) = f_x(x_1, y)$ είναι παραγωγίσιμη, με παράγωγο $g'(y) = (f_x)_y(x_1, y) = f_{xy}(x_1, y)$, και εφαρμόζοντας πάλι το θεώρημα μέσης τιμής, βλέπουμε ότι υπάρχει $y_1 \in (y_0, y_0 + k)$ τέτοιο ώστε

$$(4.2.11) \quad f_x(x_1, y_0 + k) - f_x(x_1, y_0) = g(y_0 + k) - g(y_0) = kg'(y_1) = kf_{xy}(x_1, y_1).$$

Αντικαθιστώντας στην (4.2.10) παίρνουμε το ζητούμενο. □

Είμαστε τώρα σε θέση να δώσουμε την απόδειξη του θεωρήματος Schwarz:

απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.1. Από την (4.2.6) και τη συνέχεια της f_{xy} στο (x_0, y_0) έχουμε

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta(h, k)}{hk} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} f_{xy}(x_1, y_1) = f_{xy}(x_0, y_0).$$

Ομοίως, από την (4.2.7) και τη συνέχεια της f_{yx} στο (x_0, y_0) έχουμε

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta(h,k)}{hk} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} f_{yx}(x_2, y_2) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

Συνεπώς, $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$. □

Το Θεώρημα Schwarz έχει και την παρακάτω πιο ισχυρή μορφή.

Θεώρημα 4.2.4 (ισχυρή μορφή του Θεωρήματος Schwarz). Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) εσωτερικό σημείο του A και $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι οι μερικές παράγωγοι f_x , f_y και f_{xy} υπάρχουν σε μια περιοχή του (x_0, y_0) και η f_{xy} είναι συνεχής στο (x_0, y_0) . Τότε, υπάρχει η $f_{yx}(x_0, y_0)$ και ισχύει ότι $f_{yx}(x_0, y_0) = f_{xy}(x_0, y_0)$.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.4 είναι παρόμοια με αυτήν του Θεωρήματος 4.2.1. Κλείνουμε αυτήν την ενότητα με το επόμενο παράδειγμα που δείχνει ότι η υπόθεση της συνέχειας των μερικών παραγώγων είναι απαραίτητη.

Παράδειγμα 4.2.5 (παράδειγμα συνάρτησης για την οποία $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$). Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0, 0) = 0$ και

$$f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$$

αν $(x, y) \neq (0, 0)$. Θα δείξουμε ότι $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$.

Απόδειξη. Έχουμε

$$(4.2.12) \quad f_{xy}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f_x(0, y) - f_x(0, 0)}{y}$$

και

$$(4.2.13) \quad f_{yx}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_y(x, 0) - f_y(0, 0)}{x}.$$

Πρέπει λοιπόν να υπολογίσουμε τις $f_x(0, 0)$, $f_y(0, 0)$, $f_x(0, y)$ και $f_y(x, 0)$. Για το σημείο $(0, 0)$ έχουμε

$$f_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{x} = 0,$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{y} = 0.$$

Για το σημείο $(0, y)$, με $y \neq 0$,

$$f_x(0, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(0, y)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} = -y,$$

και τέλος για το $(x, 0)$ με $x \neq 0$,

$$f_y(x, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(x, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} - 0}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} = x.$$

Αντικαθιστώντας στις (4.2.12) και (4.2.13) παίρνουμε

$$f_{xy}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y - 0}{y} = -1$$

ενώ

$$f_{yx}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 0}{x} = 1.$$

□

4.3 Μερικές παράγωγοι ανώτερης τάξης

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) εσωτερικό σημείο του A και $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε οι μερικές παράγωγοι της f έως και δεύτερης τάξης να υπάρχουν σε όλα τα σημεία μιας περιοχής του (x_0, y_0) . Οι μερικές παράγωγοι των συναρτήσεων $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$ ως προς x και y στο σημείο (x_0, y_0) (εφόσον υπάρχουν) καλούνται **μερικές παράγωγοι τρίτης τάξης της f στο σημείο (x_0, y_0)** . Υιοθετώντας αντίστοιχο συμβολισμό με αυτόν των μερικών παραγώγων δεύτερης τάξης, συμβολίζουμε τις μερικές παραγώγους τρίτης τάξης της f στο σημείο (x_0, y_0) ως εξής:

$$\begin{aligned} f_{xxx}(x_0, y_0) &= (f_{xx})_x(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) (x_0, y_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} (x_0, y_0) \\ f_{xxy}(x_0, y_0) &= (f_{xx})_y(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) (x_0, y_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} (x_0, y_0) \\ f_{xyx}(x_0, y_0) &= (f_{xy})_x(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) (x_0, y_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} (x_0, y_0) \\ f_{xyy}(x_0, y_0) &= (f_{xy})_y(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) (x_0, y_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} (x_0, y_0) \\ f_{yxx}(x_0, y_0) &= (f_{yx})_x(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) (x_0, y_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} (x_0, y_0) \\ f_{yxy}(x_0, y_0) &= (f_{yx})_y(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) (x_0, y_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} (x_0, y_0) \\ f_{yyx}(x_0, y_0) &= (f_{yy})_x(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) (x_0, y_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} (x_0, y_0) \\ f_{yyy}(x_0, y_0) &= (f_{yy})_y(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) (x_0, y_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} (x_0, y_0) \end{aligned}$$

Αν τώρα οι μερικές παράγωγοι της f έως και τρίτης τάξης υπάρχουν σε όλα τα σημεία μιας περιοχής του (x_0, y_0) τότε οι μερικές τους παράγωγοι στο σημείο (x_0, y_0) ως προς x και y (εφόσον υπάρχουν) καλούνται **μερικές παράγωγοι τέταρτης τάξης της f στο σημείο (x_0, y_0)** . Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, μπορούμε να ορίσουμε τις **μερικές παραγώγους n -τάξης της f στο σημείο (x_0, y_0)** .

Το Θεώρημα 4.2.1 γενικεύεται με επαγωγή ως εξής.

Θεώρημα 4.3.1. Έστω $n \geq 2$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ όπου $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και (x_0, y_0) εσωτερικό σημείο του A . Αν οι μερικές παράγωγοι της f έως και n -τάξης ορίζονται σε μια περιοχή του (x_0, y_0) και όλες οι μεικτές μερικές παράγωγοι n -τάξης είναι συνεχείς στο (x_0, y_0) τότε όλες οι μεικτές μερικές παράγωγοι στο (x_0, y_0) που περιέχουν τις ίδιες παραγωγίσεις με διαφορετική σειρά είναι ίσες.

Για παράδειγμα, αν ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος [4.3.1](#) για $n = 3$ τότε

$$f_{xyx}(x_0, y_0) = f_{xxy}(x_0, y_0) = f_{yxx}(x_0, y_0).$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Θεώρημα Taylor για πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών

5.1 Σύντομη επανάληψη

Ας θυμηθούμε τα δύο θεωρήματα Taylor για πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής πριν προχωρήσουμε στη γενίκευσή τους.

Θεώρημα 5.1.1 (τύπος Taylor για πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής). Έστω $m \geq 0$ ακέραιος, I διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ μια $(m+1)$ -φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Έστω επίσης $a \in I$. Τότε, για κάθε $h \neq 0$ με $a+h \in I$ υπάρχει σημείο ξ στο ανοικτό διάστημα με άκρα τα a και $a+h$ τέτοιο ώστε

$$(5.1.1) \quad f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^m \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} h^{m+1}.$$

Το πολυώνυμο

$$(5.1.2) \quad T_m(x) = f(a) + \sum_{k=1}^m \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

καλείται **πολυώνυμο Taylor m -τάξης της f με κέντρο το a** . Ο τύπος (5.1.1) γράφεται και ως εξής: Για κάθε $x \in I$,

$$(5.1.3) \quad f(x) = T_m(x) + \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} (x-a)^{m+1}$$

για κάποιο ξ στο ανοικτό διάστημα με άκρα τα a και x .

Προφανώς, $T_m(a) = f(a)$. Αν x είναι ένα σημείο του I διαφορετικό από το a , τότε η εξίσωση (5.1.3) μας λέει ότι η διαφορά $f(x) - T_m(x)$ γράφεται ως

$$(5.1.4) \quad f(x) - T_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} (x-a)^{m+1}$$

για κάποιο ξ στο ανοικτό διάστημα με άκρα τα a και x .

Θεώρημα 5.1.2. Έστω $m \geq 1$ ακέραιος, I διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Έστω $a \in I$ και έστω ότι η f

είναι m -φορές παραγωγίσιμη στο a . Έστω $T_m(x)$ το πολυώνυμο Taylor m -τάξης της f με κέντρο το a . Τότε,

$$(5.1.5) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_m(x)}{(x - a)^m} = 0.$$

5.2 Η συνάρτηση $F(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$

Για τα επόμενα σταθεροποιούμε μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, ένα σημείο $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in A$ και ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$ του $\mathbb{R}^2$ τέτοιο ώστε το ευθύγραμμο τμήμα $[\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{h}]$ να περιέχεται στο A .

Έστω επίσης $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση

$$(5.2.1) \quad F(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) = f(a_1 + th_1, a_2 + th_2)$$

για κάθε $t \in [0, 1]$.

Η συνάρτηση F έχει χρησιμοποιηθεί στην απόδειξη του θεωρήματος μέσης τιμής (Θεώρημα 3.3.2). Όπως είδαμε εκεί, αν η f είναι παραγωγίσιμη στο A τότε από τον κανόνα αλυσίδας έχουμε

$$F'(t) = \nabla f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) \cdot \mathbf{h} = f_x(\mathbf{a} + t\mathbf{h})h_1 + f_y(\mathbf{a} + t\mathbf{h})h_2.$$

Επίσης, παρατηρήστε ότι αν το $\mathbf{h}$ είναι μοναδιαίο τότε η παράγωγος της f στο $\mathbf{a}$ κατά την κατεύθυνση $\mathbf{h}$ στο $\mathbf{a}$, δηλαδή η $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{h}}(\mathbf{a})$, ισούται με την $F'(0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{h}}(\mathbf{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) - f(\mathbf{a})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t) - F(0)}{t} = F'(0).$$

Πρόταση 5.2.1. Αν $f \in C^2(A)$ τότε η F είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει ότι

$$(5.2.2) \quad F''(t) = f_{xx}(\mathbf{a} + t\mathbf{h})h_1^2 + 2f_{xy}(\mathbf{a} + t\mathbf{h})h_1h_2 + f_{yy}(\mathbf{a} + t\mathbf{h})h_2^2$$

για κάθε $t \in [0, 1]$.

Ειδικότερα, για $t = 0$ έχουμε

$$(5.2.3) \quad F''(0) = f_{xx}(\mathbf{a})h_1^2 + 2f_{xy}(\mathbf{a})h_1h_2 + f_{yy}(\mathbf{a})h_2^2.$$

Απόδειξη. Θέτουμε $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{h} = (a_1 + th_1, a_2 + th_2)$, $t \in [0, 1]$. Έχουμε δει ότι η $\mathbf{r}$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $t \in [0, 1]$ και το εφαπτόμενο διάνυσμά της σε κάθε $t \in [0, 1]$ είναι το $\mathbf{r}'(t) = (h_1, h_2) = \mathbf{h}$. Επίσης, η f είναι C^2 άρα και C^1 , συνεπώς είναι παραγωγίσιμη. Από τον κανόνα αλυσίδας έχουμε

$$F'(t) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = f_x(\mathbf{r}(t))h_1 + f_y(\mathbf{r}(t))h_2 = f_x(\mathbf{a} + t\mathbf{h})h_1 + f_y(\mathbf{a} + t\mathbf{h})h_2.$$

Επομένως,

$$(5.2.4) \quad \begin{aligned} F''(t) &= (F')'(t) = (f_x(\mathbf{r}(t))h_1 + f_y(\mathbf{r}(t))h_2)' \\ &= (f_x(\mathbf{r}(t))h_1)' + (f_y(\mathbf{r}(t))h_2)' \\ &= (f_x(\mathbf{r}(t)))'h_1 + (f_y(\mathbf{r}(t)))'h_2. \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα αλυσίδας για τη συνάρτηση $f_x(\mathbf{r}(t))$ βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} (f_x(\mathbf{r}(t)))' &= \nabla f_x(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) \\ &= (f_x)_x(\mathbf{r}(t))h_1 + (f_x)_y(\mathbf{r}(t))h_2 \\ &= f_{xx}(\mathbf{r}(t))h_1 + f_{xy}(\mathbf{r}(t))h_2 \\ &= f_{xx}(\mathbf{a} + t\mathbf{h})h_1 + f_{xy}(\mathbf{a} + t\mathbf{h})h_2. \end{aligned}$$

Ομοίως, εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας για τη συνάρτηση $f_y(\mathbf{r}(t))$ και λαμβάνοντας υπ' όψιν το γεγονός ότι $f_{xy} = f_{yx}$ (λόγω συνέχειας των μερικών παραγώγων δεύτερης τάξης) έχουμε

$$\begin{aligned} (f_y(\mathbf{r}(t)))' &= \nabla f_y(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) \\ &= (f_y)_x(\mathbf{r}(t))h_1 + (f_y)_y(\mathbf{r}(t))h_2 \\ &= f_{yx}(\mathbf{r}(t))h_1 + f_{yy}(\mathbf{r}(t))h_2 \\ &= f_{xy}(\mathbf{r}(t))h_1 + f_{yy}(\mathbf{r}(t))h_2 \\ &= f_{xy}(\mathbf{a} + t\mathbf{h})h_1 + f_{yy}(\mathbf{a} + t\mathbf{h})h_2. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην (5.2.4) παίρνουμε εύκολα την (5.2.2). □

Όπως παρατηρήσαμε στην αρχή αυτής της ενότητας, όταν το διάνυσμα $\mathbf{h}$ είναι μοναδιαίο τότε $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{h}}(\mathbf{a}) = F'(0)$. Από αυτήν την άποψη, η δεύτερη παράγωγος $F''(0)$ ορίζεται ως η *δεύτερης τάξης παράγωγος της f στο $\mathbf{a}$ κατά την κατεύθυνση $\mathbf{h}$* .

Παρατήρηση 5.2.2. Αν $\mathbf{h} = \mathbf{e}_1$ (αντίστοιχα $\mathbf{h} = \mathbf{e}_2$) παρατηρήστε ότι $F''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{a})$ (αντίστοιχα, $F''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{a})$).

Μπορούμε να γενικεύσουμε την Πρόταση 5.2.1 για παραγώγους ανώτερης τάξης. Για να διατυπώσουμε τη γενική μορφή της, είναι χρήσιμο να εισαγάγουμε τον παρακάτω συμβολισμό.

Ορισμός 5.2.3. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $k \geq 1$, $f \in C^k(A)$ και $\mathbf{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$. Ορίζουμε

$$\begin{aligned} \left[h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y} \right]^{(k)} f(x, y) &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-j} \partial y^j}(x, y) h_1^{k-j} h_2^j \\ (5.2.5) \quad &= \sum_{j=0}^k \frac{k!}{j!(k-j)!} \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-j} \partial y^j}(x, y) h_1^{k-j} h_2^j \end{aligned}$$

για κάθε $(x, y) \in A$.

Παρατήρηση 5.2.4. Ο συμβολισμός $\left[h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y} \right]^{(k)}$ δεν είναι τυχαίος. Προέρχεται από τον τύπο του *διδανύμου του Νεύτωνα*: Αν $a, b \in \mathbb{R}$ και $k \geq 0$ ακέραιος, τότε

$$(5.2.6) \quad (a + b)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a^{k-j} b^j$$

όπου

$$(5.2.7) \quad \binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!}$$

για κάθε $j = 0, \dots, k$.

Στις ειδικές περιπτώσεις όπου $k = 1, 2, 3$, η (5.2.5) παίρνει αντίστοιχα τις μορφές

$$\begin{aligned} \left[h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y} \right] f(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) h_2, \\ \left[h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y} \right]^{(2)} f(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) h_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) h_2^2, \\ \left[h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y} \right]^{(3)} f(x, y) &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x, y) h_1^3 \\ &\quad + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x, y) h_1^2 h_2 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x, y) h_1 h_2^2 \\ &\quad + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, y) h_2^3. \end{aligned}$$

Είμαστε τώρα έτοιμοι να διατυπώσουμε τη γενική μορφή της Πρότασης 5.2.1.

Πρόταση 5.2.5. Αν $f \in C^k(A)$ για κάποιον $k \in \mathbb{N}$, τότε η F είναι k -φορές παραγωγίσιμη και ισχύει ότι

$$(5.2.8) \quad F^{(k)}(t) = \left[h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y} \right]^{(k)} f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$$

για κάθε $t \in [0, 1]$.

Ειδικότερα, για $t = 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} (5.2.9) \quad F^{(k)}(0) &= \left[h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y} \right]^{(k)} f(\mathbf{a}) \\ &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-j} \partial y^j}(a_1, a_2) h_1^j h_2^{k-j}. \end{aligned}$$

Η απόδειξη της Πρότασης 5.2.5 γίνεται με επαγωγή και είναι παρόμοια με την απόδειξη της Πρότασης 5.2.1. Αν το $\mathbf{h}$ είναι μοναδιαίο τότε η παράγωγος $F^{(k)}(0)$ ονομάζεται k -τάξης παράγωγος της f κατά την κατεύθυνση $\mathbf{h}$.

5.3 Τύπος Taylor για πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών

Θεώρημα 5.3.1. Έστω $m \geq 0$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $f \in C^{m+1}(A)$ (δηλαδή, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους έως και $m+1$ τάξης). Έστω $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in A$ και $\mathbf{h} = (h_1, h_2) \neq \mathbf{0}$ τέτοιο ώστε $[\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{h}] \subseteq A$.

Τότε, υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) &= f(a_1, a_2) + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} \left[h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y} \right]^{(k)} f(a_1, a_2) \\ &\quad + \frac{1}{(m+1)!} \left[h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y} \right]^{(m+1)} f(a_1 + \xi h_1, a_2 + \xi h_2). \end{aligned}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}), \quad t \in [0, 1].$$

Αφού $f \in C^{m+1}(A)$, από την Πρόταση 5.2.5 έχουμε ότι η F είναι $m+1$ -φορές παραγωγίσιμη. Από τον τύπο του Taylor για πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής (Θεώρημα 5.1.1 για $a = 0$ και $h = 1$) έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$(5.3.1) \quad F(1) = F(0) + \sum_{k=1}^m \frac{F^{(k)}(0)}{k!} + \frac{F^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}$$

Επειδή $F(0) = f(\mathbf{a})$, $F(1) = f(\mathbf{a} + \mathbf{h})$,

$$F^{(k)}(0) \stackrel{(5.2.9)}{=} \left[h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y} \right]^{(k)} f(\mathbf{a})$$

και

$$F^{(m+1)}(\xi) \stackrel{(5.2.8)}{=} \left[h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y} \right]^{(m+1)} f(\mathbf{a} + \xi \mathbf{h}),$$

η σχέση (5.3.1) δίνει τον τύπο του Taylor. □

Ορισμός 5.3.2. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $f \in C^m(A)$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in A$ και $m \geq 1$ ακέραιος. Το πολυώνυμο

$$(5.3.2) \quad T_m(x, y) = f(a_1, a_2) + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} \left[(x - a_1) \frac{\partial}{\partial x} + (y - a_2) \frac{\partial}{\partial y} \right]^{(k)} f(a_1, a_2)$$

καλείται **πολυώνυμο Taylor m -τάξης της f με κέντρο το $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$** .

Το Θεώρημα 5.3.1 μας λέει ότι για κάθε $\mathbf{x} = (x, y) \in A$ με $[\mathbf{a}, \mathbf{x}] \subseteq A$ ισχύει ότι

$$f(x, y) = T_m(x, y) + R_m(x, y)$$

όπου

$$R_m(x, y) = \frac{1}{(m+1)!} \left[(x - a_1) \frac{\partial}{\partial x} + (y - a_2) \frac{\partial}{\partial y} \right]^{(m+1)} f(a_1 + \xi(x - a_1), a_2 + \xi(y - a_2))$$

για κάποιο $\xi \in (0, 1)$.

Παρατηρήστε επίσης ότι το πολυώνυμο Taylor πρώτης τάξης της f με κέντρο το $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ δίνεται από τον τύπο

$$T_1(x, y) = f(a_1, a_2) + f_x(a_1, a_2)(x - a_1) + f_y(a_1, a_2)(y - a_2).$$

Αντίστοιχα, το πολυώνυμο Taylor δεύτερης τάξης της f με κέντρο το $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ δίνεται από τον τύπο

$$T_2(x, y) = f(a_1, a_2) + f_x(a_1, a_2)(x - a_1) + f_y(a_1, a_2)(y - a_2) + \frac{1}{2} \left[f_{xx}(a_1, a_2)(x - a_1)^2 + 2f_{xy}(a_1, a_2)(x - a_1)(y - a_2) + f_{yy}(a_1, a_2)(y - a_2)^2 \right].$$

Παράδειγμα 5.3.3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y) = e^{3x+2y}$. Για $m = 1, 2$ υπολογίστε τα πολυώνυμα Taylor πρώτης και δεύτερης τάξης της f με κέντρο το $(0, 1)$.

Απάντηση: Ελέγχουμε εύκολα ότι

$$f_x(x, y) = 3e^{3x+2y}, \quad f_y(x, y) = 2e^{3x+2y}$$

και

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= (f_x)_x(x, y) = 9e^{3x+2y}, \quad f_{xy}(x, y) = (f_x)_y(x, y) = 6e^{3x+2y} \\ f_{yx}(x, y) &= (f_y)_x(x, y) = 6e^{3x+2y}, \quad f_{yy}(x, y) = (f_y)_y(x, y) = 4e^{3x+2y}. \end{aligned}$$

Από τα παραπάνω έχουμε ότι $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Επίσης βλέπουμε ότι

$$f_x(0, 1) = 3e^2, \quad f_y(0, 1) = 2e^2$$

και

$$f_{xx}(0, 1) = 9e^2, \quad f_{xy}(0, 1) = f_{yx}(0, 1) = 6e^2, \quad f_{yy}(0, 1) = 4e^2.$$

Συνεπώς, το πολυώνυμο Taylor πρώτης τάξης της f με κέντρο το $(a_1, a_2) = (0, 1)$ είναι το

$$\begin{aligned} T_1(x, y) &= f(0, 1) + f_x(0, 1)x + f_y(0, 1)(y - 1) \\ &= e^2 + 3e^2x + 2e^2(y - 1) \\ &= -e^2 + 3e^2x + 2e^2y. \end{aligned}$$

Αντίστοιχα, το πολυώνυμο Taylor δεύτερης τάξης της f με κέντρο το $(0, 1)$ είναι το

$$\begin{aligned} T_2(x, y) &= f(0, 1) + f_x(0, 1)x + f_y(0, 1)(y - 1) \\ &\quad + \frac{1}{2!} \left[f_{xx}(0, 1)x^2 + 2f_{xy}(0, 1)x(y - 1) + f_{yy}(0, 1)(y - 1)^2 \right] \\ &= e^2 + 3e^2x + 2e^2(y - 1) \\ &\quad + \frac{1}{2!} \left[9e^2x^2 + 12e^2x(y - 1) + 4e^2(y - 1)^2 \right]. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 5.3.4. Έστω C^2 συνάρτηση $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $f(0, 0) = f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ και $f_{xx}(x, y) = f_{yy}(x, y) = f_{xy}(x, y) = 2$ για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, αποδείξτε ότι $f(x, y) = (x + y)^2$.

Απάντηση: Έστω $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ με $(x, y) \neq (0, 0)$. Από τον τύπο του Taylor, για $m = 1$, $\mathbf{a} = (0, 0)$ και $\mathbf{b} = (x, y)$, έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} (5.3.3) \quad f(x, y) &= f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(f_{xx}(\xi x, \xi y)x^2 + 2f_{xy}(\xi x, \xi y)xy + f_{yy}(\xi x, \xi y)y^2 \right). \end{aligned}$$

Από τις υποθέσεις μας έπεται ότι

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$

για κάθε $(x, y) \neq (0, 0)$. Επειδή για $(x, y) = (0, 0)$ ο παραπάνω τύπος δίνει ότι $f(0, 0) = 0$, συμπεραίνουμε ότι $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$, για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

5.4 Θεώρημα Taylor για πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών

Στο κεφάλαιο για την παραγωγή είδαμε ότι μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ αν και μόνο αν οι μερικές παραγώγους $f_x(a_1, a_2)$ και $f_y(a_1, a_2)$ υπάρχουν και

$$(5.4.1) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a_1, a_2)} \frac{f(x, y) - f(a_1, a_2) - f_x(a_1, a_2)(x - a_1) - f_y(a_1, a_2)(y - a_2)}{\|(x - a_1, y - a_2)\|} = 0.$$

Επειδή το πρώτης τάξης πολυώνυμο Taylor της f με κέντρο το $\mathbf{a}$ ορίζεται να είναι το

$$T_1(x, y) = f(a_1, a_2) + f_x(a_1, a_2)(x - a_1) + f_y(a_1, a_2)(y - a_2),$$

ο τύπος (5.4.1) γράφεται

$$(5.4.2) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a_1, a_2)} \frac{f(x, y) - T_1(x, y)}{\|(x - a_1, y - a_2)\|} = 0.$$

Το επόμενο θεώρημα γενικεύει την (5.4.2) όταν η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους έως και m -τάξης.

Θεώρημα 5.4.1 (θεώρημα Taylor). Έστω $m \geq 1$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $f \in C^m(A)$. Έστω $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in A$ και $T_m(x, y)$ το πολυώνυμο Taylor m -τάξης της f με κέντρο το $\mathbf{a}$. Τότε,

$$(5.4.3) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a_1, a_2)} \frac{f(x, y) - T_m(x, y)}{\|(x - a_1, y - a_2)\|^m} = 0.$$

Με άλλα λόγια, για κάθε $(x, y) \in A$,

$$(5.4.4) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a_1, a_2)} \frac{f(x, y) - T_m(x, y)}{((x - a_1)^2 + (y - a_2)^2)^{m/2}} = 0.$$

Παρατήρηση 5.4.2. Το παραπάνω θεώρημα λέει ότι μπορούμε να γράψουμε τη συνάρτηση f ως

$$(5.4.5) \quad f(x, y) = T_m(x, y) + R_m(x, y)$$

με

$$(5.4.6) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a_1, a_2)} \frac{R_m(x, y)}{\|(x - a_1, y - a_2)\|^m} = 0.$$

Για παράδειγμα, αν $m = 2$, έχουμε

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(a_1, a_2) + f_x(a_1, a_2)(x - a_1) + f_y(a_1, a_2)(y - a_2) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[f_{xx}(a_1, a_2)(x - a_1)^2 + 2f_{xy}(a_1, a_2)(x - a_1)(y - a_2) + f_{yy}(a_1, a_2)(y - a_2)^2 \right] \\ &\quad + R_2(x, y) \end{aligned}$$

με

$$(5.4.7) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a_1,a_2)} \frac{R_2(x,y)}{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2} = 0.$$

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 5.4.1 θα χρειαστεί να κάνουμε κάποια προεργασία. Έστω $m \geq 1$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $f \in C^m(A)$. Έστω $\mathbf{x} = (x, y)$, $\mathbf{x}' = (x', y') \in A$ και $\mathbf{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$. Θέτουμε

$$(5.4.8) \quad \delta(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = \max \left\{ \left| \frac{\partial^m f}{\partial x^j \partial y^{m-j}}(x', y') - \frac{\partial^m f}{\partial x^j \partial y^{m-j}}(x, y) \right| : 0 \leq j \leq m \right\}$$

και

$$(5.4.9) \quad \Delta(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = \left[h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y} \right]^{(m)} f(x', y') - \left[h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y} \right]^{(m)} f(x, y).$$

Λήμμα 5.4.3. Για κάθε $\mathbf{x}', \mathbf{x} \in A$ και $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$ ισχύει ότι

$$(5.4.10) \quad |\Delta(\mathbf{x}', \mathbf{x})| \leq 2^{m/2} \delta(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \|(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2)\|^m.$$

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{x}', \mathbf{x} \in A$. Έχουμε

$$\begin{aligned} |\Delta(\mathbf{x}', \mathbf{x})| &= \left| \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-j} \partial y^j}(x', y') h_1^{m-j} h_2^j - \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-j} \partial y^j}(x, y) h_1^{m-j} h_2^j \right| \\ &\leq \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \left| \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-j} \partial y^j}(x', y') - \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-j} \partial y^j}(x, y) \right| |h_1|^{m-j} |h_2|^j \\ &\leq \delta(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} |h_1|^{m-j} |h_2|^j \\ &= \delta(\mathbf{x}', \mathbf{x}) (|h_1| + |h_2|)^m \quad (\text{διώνυμο του Νεύτωνα}) \\ &\leq 2^{m/2} \delta(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \|(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2)\|^m, \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει από την ανισότητα *Cauchy-Schwarz*:

$$|h_1| + |h_2| = (1, 1) \cdot (|h_1|, |h_2|) \leq \|(1, 1)\| \cdot \|(|h_1|, |h_2|)\| = 2^{1/2} \|(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2)\|$$

□

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.4.1. Έστω $m = 1$. Τότε $f \in C^1(A)$ και άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{a}$. Από τον χαρακτηρισμό της παραγωγισιμότητας της f στο $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ (Πόρισμα 2.3.3) έχουμε

$$(5.4.11) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a_1,a_2)} \frac{f(x,y) - f(a_1,a_2) - f_x(a_1,a_2)(x-a_1) - f_y(a_1,a_2)(y-a_2)}{\sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2}} = 0$$

Επειδή $T_1(x, y) = f(a_1, a_2) + f_x(\xi_1, \xi_2)(x - a_1) + f_y(\xi_1, \xi_2)(y - a_2)$, έχουμε

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a_1,a_2)} \frac{f(x,y) - T_1(x,y)}{\sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2}} = 0.$$

Υποθέτουμε τώρα ότι $m \geq 2$. Έστω $(x, y) \in A$ αρκετά κοντά στο $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ ώστε το ευθύγραμμο τμήμα

με άκρα τα $\mathbf{x}$ και $\mathbf{a}$ να περιέχεται στο A . Από τον τύπο Taylor (για « $m = m - 1$ ») έχουμε ότι υπάρχει $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ στο ανοικτό διάστημα με άκρα τα $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ και $\mathbf{x} = (x, y)$ τέτοιο ώστε

$$f(x, y) = T_{m-1}(x, y) + \frac{1}{m!} \left[(x - a_1) \frac{\partial f}{\partial x} + (x - a_2) \frac{\partial f}{\partial y} \right]^{(m)} (\xi_1, \xi_2).$$

Από τον ορισμό του πολυωνύμου Taylor παρατηρούμε ότι

$$T_{m-1}(x, y) = T_m(x, y) - \frac{1}{m!} \left[(x - a_1) \frac{\partial f}{\partial x} + (x - a_2) \frac{\partial f}{\partial y} \right]^{(m)} (x, y).$$

Θέτουμε $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$ με $h_1 = x - a_1$ και $h_2 = y - a_2$. Από τα παραπάνω και χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό του Λήμματος 5.4.3 συμπεραίνουμε ότι

$$f(x, y) = T_m(x, y) + \frac{1}{m!} \Delta(\xi, \mathbf{x}).$$

Συνεπώς,

$$(5.4.12) \quad \left| \frac{f(x, y) - T_m(x, y)}{((x - a_1)^2 + (y - a_2)^2)^{m/2}} \right| = \frac{1}{m!} \frac{|\Delta(\xi, \mathbf{x})|}{\|(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2)\|^m} \stackrel{(5.4.10)}{\leq} \frac{2^{m/2}}{m!} \delta(\xi, \mathbf{x})$$

όπου (βλ. σχέση (5.4.8)),

$$\delta(\xi, \mathbf{x}) = \max \left\{ \left| \frac{\partial^m f}{\partial x^j \partial y^{m-j}} (\xi_1, \xi_2) - \frac{\partial^m f}{\partial x^j \partial y^{m-j}} (x, y) \right| : 0 \leq j \leq m \right\}.$$

Από την συνέχεια των μερικών παραγώγων και επειδή το ξ ανήκει στο $[\mathbf{a}, \mathbf{x}]$, βλέπουμε ότι

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a_1, a_2)} \delta(\xi, \mathbf{x}) = 0$$

οπότε από την (5.4.12) προκύπτει ότι

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a_1, a_2)} \frac{f(x, y) - T_m(x, y)}{((x - a_1)^2 + (y - a_2)^2)^{m/2}} = 0.$$

□

Παράδειγμα 5.4.4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y) = e^{x+y}$. Βρίσκοντας πρώτα τα πολυώνυμα Taylor πρώτης και δεύτερης τάξης της f με κέντρο το $(0, 0)$, υπολογίστε τα όρια

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x+y} - 1 - x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

και

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x+y} - 1 - x - y - xy}{x^2 + y^2}.$$

Απάντηση: Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι όλες οι μερικές παράγωγοι της f οποιασδήποτε τάξης ταυτίζονται με την f και συνεπώς όλες οι μερικές παράγωγοι της f στο $(0, 0)$ οποιασδήποτε τάξης είναι ίσες με το $e^0 = 1$. Συνεπώς, τα πολυώνυμα Taylor πρώτης και δεύτερης τάξης της f με

κέντρο το $(0, 0)$ είναι αντίστοιχα τα

$$T_1(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y = 1 + x + y$$

και

$$\begin{aligned} T_2(x, y) &= f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y \\ &\quad + \frac{1}{2!} [f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2] \\ &= 1 + x + y + \frac{1}{2!} [x^2 + 2xy + y^2]. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - T_1(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x+y} - 1 - x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Επίσης

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - T_2(x, y)}{x^2 + y^2} = 0$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x+y} - 1 - x - y - \frac{1}{2!} [x^2 + 2xy + y^2]}{x^2 + y^2} &= \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left[\frac{e^{x+y} - 1 - x - y - xy}{x^2 + y^2} - \frac{1}{2} \right] &= 0 \end{aligned}$$

που σημαίνει ότι

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x+y} - 1 - x - y - xy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}.$$

Παράδειγμα 5.4.5. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ μια C^2 συνάρτηση και έστω

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2} = \ell \in \mathbb{R}$$

Αποδείξτε τα εξής:

(1) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$ και $f(0, 0) = 0$.

(2) Αν $T_1(x, y)$ είναι το πολυώνυμο Taylor της f πρώτης τάξης με κέντρο το $(0, 0)$, τότε $T_1(x, y) = 0$.

(2) Αν $T_2(x, y)$ είναι το πολυώνυμο Taylor της f δεύτερης τάξης με κέντρο το $(0, 0)$, τότε $T_2(x, y) = \ell(x^2 + y^2)$.

Απόδειξη. (1) Έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{x,y \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{f(x, y)}{x^2 + y^2} \cdot \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{f(x, y)}{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \right) \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2} \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} = \ell \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Επίσης,

$$f(0, 0) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{f(x, y)}{x^2 + y^2} \cdot (x^2 + y^2) \right) = \ell \cdot 0 = 0.$$

(2) Έχουμε

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - 0 \cdot x - 0 \cdot y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

και συνεπώς $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ (βλ. Πρόταση 2.3.2). Συνεπώς, $T_1(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y = 0$.

(3) Έχουμε

$$\begin{aligned} T_2(x, y) &= T_1(x, y) + \frac{1}{2} (f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2) \\ &= \frac{1}{2} (f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι

$$T_2(x, 0) = \frac{1}{2} f_{xx}(0, 0)x^2 \text{ και } T_2(0, y) = \frac{1}{2} f_{yy}(0, 0)y^2.$$

Από το Θεώρημα Taylor έχουμε ότι

$$(5.4.13) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - T_2(x, y)}{x^2 + y^2} = 0.$$

Επομένως,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - T_2(x, 0)}{x^2} = 0 \text{ και } \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - T_2(0, y)}{y^2} = 0$$

οπότε

$$(5.4.14) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0)}{x^2} = \frac{1}{2} f_{xx}(0, 0) \text{ και } \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y)}{y^2} = \frac{1}{2} f_{yy}(0, 0).$$

Επειδή, από την υπόθεση,

$$(5.4.15) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2} = \ell,$$

έχουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0)}{x^2} = \ell \text{ και } \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y)}{y^2} = \ell$$

και άρα, από την (5.4.14),

$$f_{xx}(0, 0) = f_{yy}(0, 0) = 2\ell.$$

Έπεται ότι

$$(5.4.16) \quad T_2(x, y) = \ell(x^2 + y^2) + f_{xy}(0, 0)xy$$

Μένει να δείξουμε ότι $f_{xy}(0, 0) = 0$. Πράγματι, από τις (5.4.13), (5.4.15) και (5.4.16) έχουμε ότι

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_{xy}(0, 0) \frac{xy}{x^2 + y^2} = 0.$$

Συνεπώς, αν είχαμε $f_{xy}(0, 0) \neq 0$ θα έπρεπε να ισχύει ότι

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = 0$$

που είναι άτοπο αφού, όπως έχουμε δει, το όριο αυτό δεν υπάρχει. $\square$

Παράδειγμα 5.4.6. Υπολογίστε το πολυώνυμο Taylor της $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ δεύτερης τάξης με κέντρο το $(1, 0)$ και εξετάστε αν υπάρχει το $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x^2 + y^2)}{(x-1)^2 + y^2}$.

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \frac{2x}{x^2 + y^2}, & f_y(x, y) &= \frac{2y}{x^2 + y^2} \\ f_{xx}(x, y) &= \frac{2(x^2 + y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ f_{yy}(x, y) &= \frac{2(x^2 + y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ f_{xy}(x, y) &= (f_x)_y = \frac{-2x \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$f_x(1, 0) = 2, \quad f_y(1, 0) = 0, \quad f_{xx}(1, 0) = -2, \quad f_{yy}(1, 0) = 2, \quad f_{xy}(1, 0) = 0$$

οπότε το πολυώνυμο Taylor της $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ δεύτερης τάξης με κέντρο το $(1, 0)$ είναι το

$$\begin{aligned} T_2(x, y) &= f(1, 0) + f_x(1, 0)(x-1) + f_y(1, 0)y \\ &\quad + \frac{1}{2} (f_{xx}(1, 0)(x-1)^2 + 2f_{xy}(1, 0)(x-1)y + f_{yy}(1, 0)y^2) \\ &= 2(x-1) - (x-1)^2 + y^2. \end{aligned}$$

Από το Θεώρημα Taylor έχουμε

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x^2 + y^2) - (2(x-1) - (x-1)^2 + y^2)}{(x-1)^2 + y^2} = 0.$$

Αν υπήρχε το $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x^2 + y^2)}{(x-1)^2 + y^2}$ τότε θα υπήρχε και το

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{2(x-1) - (x-1)^2 + y^2}{(x-1)^2 + y^2}$$

και θα ήταν ίσα. Όμως το παραπάνω όριο δεν υπάρχει αφού για $x = 1 + u$ με $u \neq 0$, $u \rightarrow 0$ και $y = 0$ το όριο ισούται με

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{2u - u^2}{u^2} = \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{2}{u} \right) - 1,$$

το οποίο δεν υπάρχει. Συνεπώς, το $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x^2 + y^2)}{(x-1)^2 + y^2}$ δεν υπάρχει. $\square$

Παράδειγμα 5.4.7. (α) Έστω C^2 συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0, 0) = f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$, $f_{xx}(0, 0) =$

$f_{yy}(0,0) = 0$ και $f_{xy}(0,0) = 1$. Εξετάστε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια:

$$(i) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{|x| + |y|} \quad (ii) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{x^2 + y^2}.$$

(β) Δίνεται C^1 συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0,0) = 0$ και $f_x(x,y) = 5x$ και $f_y(x,y) = 2y$ για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Αποδείξτε ότι $|f(x,y)| \leq 25x^2 + 4y^2$ για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Απόδειξη. (α) (i) Το πολυώνυμο Taylor πρώτης τάξης της f με κέντρο το $(0,0)$ είναι το $T_1(x,y) = 0$. Από το θεώρημα Taylor έχουμε

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - T_1(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Συνεπώς,

$$(5.4.17) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{|x| + |y|} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{|x| + |y|} = 0$$

αφού $\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{|x| + |y|} \leq 1$ για κάθε $(x,y) \neq (0,0)$.

(ii) Το πολυώνυμο Taylor δεύτερης τάξης της f είναι το $T_2(x,y) = xy$ και από το θεώρημα Taylor έχουμε

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - xy}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - T_2(x,y)}{x^2 + y^2} = 0.$$

Από αυτή τη σχέση παρατηρούμε ότι το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{x^2 + y^2}$ δεν υπάρχει, αφού διαφορετικά θα έπρεπε να υπάρχει και το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ που όμως, όπως ελέγχεται εύκολα με τις ακολουθίες $(1/n, 0)$ και $(1/n, 1/n)$, δεν υπάρχει.

(β) Για $(x,y) = (0,0)$ η ανισότητα προφανώς ισχύει. Έστω $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ με $(x,y) \neq (0,0)$. Από το θεώρημα μέσης τιμής έχουμε ότι υπάρχει (ξ, η) στο ανοικτό ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα $(0,0)$ και (x,y) τέτοιο ώστε

$$(5.4.18) \quad f(x,y) - f(0,0) = f_x(\xi, \eta)(x - 0) + f_y(\xi, \eta)(y - 0) = 5\xi \cdot x + 2\eta \cdot y.$$

Από την (5.4.18) και από την ανισότητα Cauchy–Schwarz παίρνουμε

$$(5.4.19) \quad |f(x,y)| = |f(x,y) - f(0,0)| = |5\xi x + 2\eta y| \leq \sqrt{25\xi^2 + 4\eta^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Επειδή το (ξ, η) ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα $(0,0)$ και (x,y) , έπεται ότι $|\xi| \leq |x|$ και $|\eta| \leq |y|$, και άρα $\sqrt{25\xi^2 + 4\eta^2} \leq \sqrt{25x^2 + 4y^2}$, οπότε από την (5.4.19) έχουμε ότι $|f(x,y)| \leq \sqrt{25x^2 + 4y^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = 25x^2 + 4y^2$. $\square$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Τοπικά ακρότατα πραγματικών συναρτήσεων δύο μεταβλητών

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε κριτήρια για τοπικά ακρότατα συναρτήσεων δύο μεταβλητών με συνεχείς μερικές παραγώγους έως και δεύτερης τάξης.

6.1 Βασικές έννοιες

6.1.1 Τοπικά ακρότατα

Αρχίζουμε με τον εξής γενικό ορισμό.

Ορισμός 6.1.1. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}^d$ και $\mathbf{a} \in A$.

(1) Λέμε ότι το $\mathbf{a}$ είναι σημείο *τοπικού μεγίστου* της f αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(\mathbf{a}) \geq f(\mathbf{x})$ για όλα τα $\mathbf{x} \in A \cap B_\delta(\mathbf{a})$. Αν, ειδικότερα, $f(\mathbf{a}) > f(\mathbf{x})$ για όλα τα $\mathbf{x} \in A \cap B_\delta(\mathbf{a})$ με $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$ τότε το $\mathbf{a}$ θα καλείται σημείο *αυστηρού τοπικού μεγίστου*. Το $\mathbf{a}$ θα καλείται σημείο *ολικού μεγίστου* της f αν $f(\mathbf{a}) \geq f(\mathbf{x})$ για όλα τα $\mathbf{x} \in A$. Ειδικότερα, αν $f(\mathbf{a}) > f(\mathbf{x})$ για όλα τα $\mathbf{x} \in A$ με $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$ τότε το $\mathbf{a}$ θα καλείται σημείο *αυστηρού ολικού μεγίστου*.

(2) Λέμε ότι το $\mathbf{a}$ είναι σημείο *τοπικού ελαχίστου* της f αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x})$ για όλα τα $\mathbf{x} \in A \cap B_\delta(\mathbf{a})$. Αν, ειδικότερα, $f(\mathbf{a}) < f(\mathbf{x})$ για όλα τα $\mathbf{x} \in A \cap B_\delta(\mathbf{a})$ με $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$ τότε το $\mathbf{a}$ θα καλείται σημείο *αυστηρού τοπικού ελαχίστου*. Το $\mathbf{a}$ θα καλείται σημείο *ολικού ελαχίστου* της f αν $f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x})$ για όλα τα $\mathbf{x} \in A$. Ειδικότερα, αν $f(\mathbf{a}) < f(\mathbf{x})$ για όλα τα $\mathbf{x} \in A$ με $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$ τότε το $\mathbf{a}$ θα καλείται σημείο *αυστηρού ολικού ελαχίστου*.

(3) Λέμε ότι το $\mathbf{a}$ είναι σημείο *τοπικού ακροτάτου* της f αν το $\mathbf{a}$ είναι σημείο τοπικού μεγίστου ή τοπικού ελαχίστου για την f . Αντίστοιχα ορίζονται οι έννοιες του σημείου *αυστηρού τοπικού ακροτάτου* και *ολικού τοπικού ακροτάτου*.

6.1.2 Συνεχείς συναρτήσεις σε συμπαγή σύνολα

Ένα από τα πλέον κλασικά θεωρήματα σχετικά με τα ακρότατα για πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής είναι ότι κάθε συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Η ιδιότητα αυτή γενικεύεται για συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών ως εξής.

Θεώρημα 6.1.2. Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$ κλειστό και φραγμένο, και $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε η f λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο K , δηλαδή υπάρχουν $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in K$ με

$$f(\mathbf{x}_1) = \min \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in K\} \text{ και } f(\mathbf{x}_2) = \max \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in K\}$$

6.1.3 Κρίσιμο σημεία

Ορισμός 6.1.3. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση που έχει μερικές παραγώγους πρώτης τάξης. Ένα σημείο $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in A$ καλείται *κρίσιμο σημείο* της f αν

$$f_x(\mathbf{a}) = f_y(\mathbf{a}) = 0$$

ή ισοδύναμα αν

$$\nabla f(a_1, a_2) = (0, 0)$$

Παρατήρηση 6.1.4. Αν η f είναι παραγωγίσιμη τότε ο τύπος του εφαπτόμενου επιπέδου της f στο (a_1, a_2) είναι

$$z = f(a_1, a_2) + \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)(x - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)(y - a_2).$$

Συνεπώς, αν το (a_1, a_2) είναι κρίσιμο σημείο της f τότε ο τύπος του εφαπτόμενου επιπέδου της f στο (a_1, a_2) γίνεται $z = f(a_1, a_2)$ και άρα είναι παράλληλο προς το xy -επίπεδο.

Πρόταση 6.1.5 (σχέση τοπικών ακροτάτων και κρίσιμων σημείων). Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση που έχει μερικές παραγώγους πρώτης τάξης. Τότε, κάθε σημείο τοπικού ακροτάτου της f είναι και κρίσιμο σημείο της f .

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ σημείο τοπικού ακροτάτου της f . Θυμίζουμε ότι

$$\begin{aligned} f_x(a_1, a_2) &= \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_1}(a_1, a_2) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{a})}{t} \\ (6.1.1) \quad &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t) - F(0)}{t} = F'(0) \end{aligned}$$

όπου $F(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_1)$, με $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ για κατάλληλα μικρό $\varepsilon > 0$ ώστε $\mathbf{a} + t\mathbf{e}_1 \in A$. Αφού $F(0) = f(\mathbf{a})$ και το $\mathbf{a}$ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της f , έπεται ότι το $t_0 = 0$ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της F . Άρα, από την γνωστή πρόταση του Fermat για τοπικά ακρότατα πραγματικών συναρτήσεων μιας μεταβλητής, συμπεραίνουμε ότι $F'(0) = 0$, που λόγω της (6.1.1) σημαίνει ότι $f_x(\mathbf{a}) = 0$. Ανάλογα δείχνουμε ότι $f_y(\mathbf{a}) = 0$. $\square$

Παρατήρηση 6.1.6. Όπως συμβαίνει και στις πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής, το αντίστροφο της Πρότασης 6.1.5 δεν ισχύει. Για παράδειγμα, είναι εύκολο να δούμε ότι το $(0, 0)$ είναι κρίσιμο σημείο της $f(x, y) = x^3 + y^3$ αλλά δεν είναι σημείο τοπικού ακροτάτου. Επίσης η Πρόταση 6.1.5 δεν ισχύει αν το A δεν είναι ανοικτό. Π.χ. έστω $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ ο κλειστός μοναδιαίος δίσκος και $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = x^2 + y^2$. Τότε εύκολα βλέπουμε ότι η f λαμβάνει μέγιστη τιμή σε όλα τα σημεία του μοναδιαίου κύκλου $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Όμως για κάθε σημείο $(x, y) \in S$ έχουμε $\nabla f(x, y) = (2x, 2y) \neq (0, 0)$.

Ορισμός 6.1.7. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Ένα κρίσιμο σημείο της f που δεν είναι σημείο τοπικού ακροτάτου καλείται *σαγματικό σημείο* ή (*σημείο σέλας*) της f .

Παρατήρηση 6.1.8. Είναι εύκολο να δούμε ότι ένα σημείο $\mathbf{a} \in A$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f αν και μόνο αν για κάθε $\delta > 0$ υπάρχουν σημεία $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in B_\delta(\mathbf{a})$, τέτοια ώστε

$$f(\mathbf{x}_1) < f(\mathbf{a}) < f(\mathbf{x}_2).$$

Στην περίπτωση που η f είναι παραγωγίσιμη, από τη Παρατήρηση 6.1.8, συμπεραίνουμε ότι ένα σημείο $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f αν και μόνο αν το το οριζόντιο επίπεδο $z = f(a_1, a_2)$ δεν αφήνει το γράφημα της f από τη μία πλευρά του. Κάτω από κάποιες προϋποθέσεις που θα δούμε στην συνέχεια (δείτε την περίπτωση (3) του Θεωρήματος 6.3.3 παρακάτω), το γράφημα της $f(x, y)$ στο σαγματικό σημείο μοιάζει με την επιφάνεια μιας σέλας, εξού και το όνομα. Αυτό όμως δεν συμβαίνει πάντα. Π.χ. το $(0, 0)$ είναι κρίσιμο σημείο της συνάρτησης $f(x, y) = y^3$ και δεν είναι τοπικό ακρότατο αλλά το γράφημα της f στο $(0, 0)$ δεν μοιάζει με σέλα, Γενικά θα λέγαμε ότι τα σαγματικά σημεία είναι κάτι σαν τα σημεία καμπής των συναρτήσεων μιας μεταβλητής.

6.2 Τετραγωνικές μορφές στον $\mathbb{R}^2$

Ορισμός 6.2.1. Μια συνάρτηση $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ καλείται *τετραγωνική μορφή* αν γράφεται ως

$$Q(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$$

όπου $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Από τον ορισμό της τετραγωνικής μορφής παρατηρούμε εύκολα ότι

$$(6.2.1) \quad Q(tx_1, tx_2) = t^2 Q(x_1, x_2)$$

για κάθε $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ και $t \in \mathbb{R}$. Αυτό σημαίνει ότι αν $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ τότε η Q διατηρεί το ίδιο πρόσημο σε όλα τα μη μηδενικά σημεία της ευθείας που διέρχεται από το $(0, 0)$ και το σημείο (x_1, x_2) .

Ορισμός 6.2.2. Έστω $Q(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$ μια τετραγωνική μορφή στον $\mathbb{R}^2$.

- (i) Η Q καλείται *θετικά ορισμένη* αν $Q(x_1, x_2) > 0$ για κάθε $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$.
- (ii) Η Q καλείται *αρνητικά ορισμένη* αν $Q(x_1, x_2) < 0$ για κάθε $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$.
- (iii) Η Q καλείται *ορισμένη* αν είτε είναι θετικά είτε είναι αρνητικά ορισμένη.

Παρατήρηση 6.2.3. Παρατηρήστε ότι, επειδή $Q(0, 0) = 0$, μια τετραγωνική μορφή Q είναι θετικά (αντίστοιχα, αρνητικά) ορισμένη αν και μόνο αν το $(0, 0)$ είναι σημείο αυστηρού ολικού ελαχίστου (αντίστοιχα, μεγίστου) της Q .

Πρόταση 6.2.4. Έστω Q μια τετραγωνική μορφή στον $\mathbb{R}^2$.

- (1) Η Q είναι θετικά ορισμένη αν και μόνο αν υπάρχει $m > 0$ τέτοιο ώστε

$$(6.2.2) \quad Q(\mathbf{x}) \geq m \cdot \|\mathbf{x}\|^2$$

για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

(2) Η Q είναι αρνητικά ορισμένη αν και μόνο αν υπάρχει $m > 0$ τέτοιο ώστε

$$(6.2.3) \quad Q(\mathbf{x}) \leq -m \cdot \|\mathbf{x}\|^2$$

για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

Απόδειξη. (1) Η εξίσωση (6.2.2) ισχύει τετραμμένα αν $\mathbf{x} = (0, 0)$. Έστω $\mathbf{x} \neq (0, 0)$. Τότε $\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\| \cdot \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$ και από την (6.2.1), για $t = \|\mathbf{x}\|$ έχουμε

$$(6.2.4) \quad Q(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2 \cdot Q\left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}\right)$$

Παρατηρήστε επίσης ότι το διάνυσμα $\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$ ανήκει στον μοναδιαίο κύκλο S αφού έχει νόρμα ίση με την μονάδα. Η Q είναι συνεχής και το S είναι συμπαγές (κλειστό και φραγμένο) υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Άρα από το Θεώρημα 6.1.2, η Q λαμβάνει ελάχιστη τιμή στο S . Έστω

$$m = \min\{Q(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in S\}$$

Επειδή υπάρχει $\mathbf{x}_0 \in S$ με $Q(\mathbf{x}_0) = m$ και έχουμε υποθέσει ότι η Q είναι θετικά ορισμένη, έπεται ότι $m > 0$ και άρα από την (6.2.4) έχουμε

$$Q(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2 \cdot Q\left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}\right) \geq m\|\mathbf{x}\|^2$$

(2) Προκύπτει από το (1) θεωρώντας την $-Q$. □

Η τετραγωνική μορφή $Q(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$ γράφεται και υπό τη μορφή γινομένου πινάκων:

$$(6.2.5) \quad Q(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Με άλλα λόγια, αν θέσουμε

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

τότε το $Q(x_1, x_2)$ ισούται με το (σύνηθες) εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ με το διάνυσμα $A\mathbf{x} = A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (ax_1 + bx_2, bx_1 + cx_2)$. Συνεπώς, έχουμε

$$(6.2.6) \quad Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot A\mathbf{x}$$

για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Γενικά, η μελέτη μιας τετραγωνικής μορφής γίνεται μέσω των ιδιοτιμών του πίνακα που την ορίζει. Εδώ, επειδή έχουμε μόνο δύο μεταβλητές, θα παρουσιάσουμε μια πιο στοιχειώδη προσέγγιση.

Σταθεροποιούμε για τα επόμενα μια τετραγωνική μορφή $Q(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$ στον $\mathbb{R}^2$ και θέτουμε

$$D = \det \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = ac - b^2$$

Όπως θα δούμε στα επόμενα το πρόσημο της ορίζουσας D καθορίζει το αν είναι ορισμένη ή όχι η τετραγωνική μορφή.

Πρόταση 6.2.5. (1) Η Q είναι θετικά ορισμένη αν και μόνο αν $a > 0$ και $D > 0$.

(2) Η Q είναι αρνητικά ορισμένη αν και μόνο αν $a < 0$ και $D > 0$.

Απόδειξη. (1) Έστω ότι η Q είναι θετικά ορισμένη. Τότε, $Q(1, 0) = a > 0$. Αν $a \neq 0$ είναι εύκολο να δούμε ότι η Q γράφεται στη μορφή

$$(6.2.7) \quad Q(x_1, x_2) = a \left[\left(x_1 + \frac{b}{a} x_2 \right)^2 + \frac{D}{a^2} x_2^2 \right],$$

Από την (6.2.7) παίρνουμε $Q\left(-\frac{b}{a}, 1\right) = \frac{D}{a^2} > 0$ και άρα $D > 0$.

Αντίστροφα τώρα, αν $a > 0$ και $D > 0$ τότε από την (6.2.7) προκύπτει άμεσα ότι $Q(x_1, x_2) > 0$ για κάθε $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$, δηλαδή η $Q(x_1, x_2)$ είναι θετικά ορισμένη.

(2) Προκύπτει από το (1) αν θεωρήσουμε την $-Q$. □

Πόρισμα 6.2.6. Η Q είναι ορισμένη αν και μόνο αν $D > 0$.

Απόδειξη. Έστω ότι η Q είναι ορισμένη, δηλαδή είναι είτε θετικά είτε αρνητικά ορισμένη. Από την Πρόταση 6.2.5 έχουμε ότι και στις δύο περιπτώσεις το D είναι θετικό. Αντίστροφα, έστω ότι $D = ac - b^2 > 0$. Συνεπώς $a \neq 0$ (διότι αν ήταν $a = 0$ τότε $D = -b^2 \leq 0$ άτοπο). Άρα είτε $a > 0$ είτε $a < 0$ οπότε πάλι από Πρόταση 6.2.5 η Q είναι ορισμένη. □

Πρόταση 6.2.7. Αν $D < 0$ τότε υπάρχουν δύο $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε

$$(6.2.8) \quad Q(tu_1, tu_2) < 0 < Q(tv_1, tv_2)$$

για κάθε $t \neq 0$. Με άλλα λόγια υπάρχουν δύο ευθείες που διέρχονται από το $(0, 0)$ στις οποίες στα μη μηδενικά σημεία της μιας η Q είναι γνήσια αρνητική ενώ στα μη μηδενικά σημεία της άλλης η Q είναι γνήσια αρνητική.

Απόδειξη. Από την (6.2.1) παρατηρούμε ότι για να αποδείξουμε την πρόταση αρκεί να βρούμε δύο σημεία στο $\mathbb{R}^2$ στα οποία η Q να παίρνει ετερόσημες τιμές. Πράγματι, αν $a \neq 0$ τότε από την (6.2.7) είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι $Q\left(-\frac{b}{a}, 1\right) \cdot Q(1, 0) < 0$. Με ανάλογο σκεπτικό βλέπουμε ότι το συμπέρασμα ισχύει όταν $c \neq 0$ και $D < 0$. Αν τώρα $a = c = 0$ τότε $Q(x_1, x_2) = 2bx_1x_2$ με $b \neq 0$ (διαφορετικά $D = ac - b^2 = 0$ άτοπο). Άρα $Q(1, 1) \cdot Q(-1, 1) = -4b^2 < 0$ και το συμπέρασμα πάλι ισχύει. □

Πρόταση 6.2.8. Αν $D = 0$ και η Q δεν είναι η μηδενική συνάρτηση τότε η Q λαμβάνει την τιμή 0 ακριβώς στα σημεία μιας ευθείας που διέρχεται από το $(0, 0)$ και παντού αλλού διατηρεί το ίδιο πρόσημο.

Απόδειξη. Έστω ότι η Q δεν είναι η μηδενική συνάρτηση. Επειδή $D = ac - b^2 = 0$ έπεται ότι τουλάχιστον ένα από τα a, c είναι διάφορο του 0. Έστω $a \neq 0$ (η περίπτωση $c \neq 0$ εξετάζεται όμοια).

Από την (6.2.1) έχουμε $Q(x_1, x_2) = a \left(x_1 + \frac{b}{a} x_2 \right)^2$. Άρα αν $a > 0$ τότε $Q(x_1, x_2) \geq 0$ για όλα τα $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

και αντίστοιχα, αν $a < 0$ τότε $Q(x_1, x_2) \leq 0$ για όλα τα $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Επίσης $Q(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 + \frac{b}{a} x_2 = 0$,

δηλαδή η Q μηδενίζεται ακριβώς στα σημεία της ευθείας $x_1 + \frac{b}{a} x_2 = 0$. □

Ορισμός 6.2.9. Έστω $Q(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$ μια τετραγωνική μορφή στον $\mathbb{R}^2$.

- (i) Η Q καλείται θετικά ημιορισμένη αν $Q(x_1, x_2) \geq 0$ για κάθε $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.
- (ii) Η Q καλείται αρνητικά ορισμένη αν $Q(x_1, x_2) \leq 0$ για κάθε $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.
- (iii) Η Q καλείται ημιορισμένη αν είτε είναι θετικά είτε είναι αρνητικά ημιορισμένη.

Με την παραπάνω ορολογία η Πρόταση 6.2.8 λέει ότι αν $D = 0$ τότε η Q δεν είναι ορισμένη αλλά είναι ημιορισμένη.

Τα παραπάνω συνοψίζονται στο εξής.

Πόρισμα 6.2.10. Έστω $Q(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$ μια τετραγωνική μορφή στον $\mathbb{R}^2$ και έστω

$$D = \det \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = ac - b^2$$

- (1) Αν $D > 0$ τότε η Q είναι ορισμένη. Ειδικότερα, αν $a > 0$ και $D > 0$ η Q είναι θετικά ορισμένη, ενώ αν $a < 0$ και $D < 0$ η Q είναι αρνητικά ορισμένη.
- (2) Αν $D < 0$ τότε η Q δεν είναι ορισμένη. Ειδικότερα, υπάρχουν δύο μη μηδενικά σημεία (a_1, a_2) και (b_1, b_2) του $\mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε

$$(6.2.9) \quad Q(a_1, a_2) < 0 < Q(b_1, b_2)$$

- (3) Αν $D = 0$ τότε η Q δεν είναι ορισμένη αλλά είναι ημιορισμένη. Ειδικότερα, αν η Q δεν είναι ημιορισμένη, τότε λαμβάνει την τιμή 0 ακριβώς στα σημεία μιας ευθείας που διέρχεται από το $(0, 0)$.

6.3 Το κριτήριο δεύτερης παραγώγου για τοπικά ακρότατα σε ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $f \in C^2(A)$ και $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in A$ ένα κρίσιμο σημείο της f . Από το Θεώρημα Taylor 5.4.1 (βλ. και την Παρατήρηση 5.4.2) έχουμε ότι για κάθε $\mathbf{x} = (x, y) \in A$,

$$(6.3.1) \quad f(\mathbf{x}) = T_2(\mathbf{x}) + R_2(\mathbf{x}) \quad \text{με} \quad \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{R_2(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2} = 0$$

όπου $T_2(\mathbf{x})$ είναι το δεύτερης τάξης πολυώνυμο Taylor της f με κέντρο το $\mathbf{a}$. Επειδή το $\mathbf{a}$ είναι κρίσιμο σημείο έχουμε $f_x(a_1, a_2) = f_y(a_1, a_2) = 0$ και άρα

$$T_2(x, y) = f(a_1, a_2) + \frac{1}{2} [a(x - a_1)^2 + 2b(x - a_1)(y - a_2) + c(y - a_2)^2]$$

όπου $a = f_{xx}(a_1, a_2)$, $b = f_{xy}(a_1, a_2)$ και $c = f_{yy}(a_1, a_2)$. Θέτοντας

$$Q(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$$

γράφουμε την (6.3.1) ως εξής:

$$(6.3.2) \quad f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) = \frac{1}{2} Q(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + R_2(\mathbf{x})$$

όπου

$$(6.3.3) \quad \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{R_2(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2} = 0$$

Πρόταση 6.3.1. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $f \in C^2(A)$ και $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in A$ κρίσιμο σημείο της f . Έστω $a = f_{xx}(a_1, a_2)$, $b = f_{xy}(a_1, a_2)$ και $c = f_{yy}(a_1, a_2)$, και έστω

$$Q(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2.$$

(1) Αν $Q(x_1, x_2) > 0$ για κάθε $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$, δηλαδή η Q είναι θετικά ορισμένη, τότε η f έχει αυστηρό τοπικό ελάχιστο στο $\mathbf{a}$.

(2) Αν $Q(x_1, x_2) < 0$ για κάθε $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$, δηλαδή η Q είναι αρνητικά ορισμένη τότε η f έχει αυστηρό τοπικό μέγιστο στο $\mathbf{a}$.

(3) Αν υπάρχουν $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ και $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε $Q(\mathbf{u}) < 0 < Q(\mathbf{v})$, τότε το $\mathbf{a}$ είναι σαγματικό σημείο της f . Ειδικότερα, επί της ευθείας $\{\mathbf{a} + t\mathbf{u} : t \in \mathbb{R}\}$ η f παρουσιάζει στο $\mathbf{a}$ αυστηρό τοπικό μέγιστο ενώ επί της ευθείας $\{\mathbf{a} + t\mathbf{v} : t \in \mathbb{R}\}$ η f παρουσιάζει στο $\mathbf{a}$ αυστηρό τοπικό ελάχιστο.

Απόδειξη. Όπως είδαμε στην αρχή της ενότητας, από το Θεώρημα Taylor έχουμε

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) = \frac{1}{2}Q(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + R_2(\mathbf{x}) \text{ με } \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{R_2(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2} = 0$$

για κάθε $\mathbf{x} \in A$.

(1) Έστω ότι η Q είναι θετικά ορισμένη. Τότε, από την (6.2.2) έχουμε ότι υπάρχει $m > 0$ τέτοιο ώστε

$$Q(\mathbf{x}) \geq m \cdot \|\mathbf{x}\|^2$$

και άρα για κάθε $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$ έχουμε,

$$(6.3.4) \quad \begin{aligned} f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) &= \frac{1}{2}Q(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + R_2(\mathbf{x}) \\ &\geq \frac{1}{2}m \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2 + R_2(\mathbf{x}) \\ &= \left[\frac{m}{2} + \frac{R_2(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2} \right] \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2. \end{aligned}$$

Αφού $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{R_2(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2} = 0$, μπορούμε να επιλέξουμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $\mathbf{x} \in A$,

$$(6.3.5) \quad 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta \Rightarrow \frac{|R_2(\mathbf{x})|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2} < \frac{m}{4} \Rightarrow -\frac{m}{4} < \frac{R_2(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2}$$

Από τις (6.3.4) και (6.3.5) προκύπτει ότι $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) > \frac{m}{4}\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2 > 0$ για κάθε $\mathbf{x} \in A$ με $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$ και συνεπώς το $\mathbf{a}$ είναι αυστηρό τοπικό ελάχιστο.

(2) Προκύπτει από την (1) θεωρώντας την $-Q$.

(3) Έστω ότι υπάρχουν $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ και $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε $Q(\mathbf{u}) < 0 < Q(\mathbf{v})$. Επειδή $Q(0, 0) = 0$, έχουμε ότι $\mathbf{u}, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = 1$$

αντικαθιστώντας τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ με τα $\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}$ και $\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ αντίστοιχα, αφού $Q\left(\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}\right) \stackrel{(6.2.1)}{=} \frac{Q(\mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|^2} < 0$ και ομοίως

$$Q\left(\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\right) = \frac{Q(\mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|^2} > 0.$$

Επειδή $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{R_2(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2} = 0$, μπορούμε να επιλέξουμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$(6.3.6) \quad 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta \Rightarrow \frac{|R_2(\mathbf{x})|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2} < \frac{1}{4} \min \{-Q(\mathbf{u}), Q(\mathbf{v})\}$$

Έστω $0 < |t| < \delta$ και έστω

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{u}$$

Τότε

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| = |t| \cdot \|\mathbf{u}\| = |t| < \delta$$

και άρα από την (6.3.6),

$$\frac{R_2(\mathbf{x})}{|t|^2} < \frac{1}{4} (-Q(\mathbf{u})) \Rightarrow R_2(\mathbf{x}) < -\frac{1}{4} t^2 Q(\mathbf{u})$$

Συνεπώς,

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) = \frac{1}{2} Q(t\mathbf{u}) + R_2(\mathbf{x}) < \frac{1}{2} t^2 Q(\mathbf{u}) - \frac{1}{4} t^2 Q(\mathbf{u}) = \frac{t^2 Q(\mathbf{u})}{4} < 0$$

Οπότε $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{a})$ για κάθε $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{u}$ με $0 < |t| < \delta$ και άρα το $\mathbf{a}$ είναι αυστηρό τοπικό μέγιστο της f επί της ευθείας $\mathbf{a} + t\mathbf{u}$.

Ομοίως έστω $0 < |t| < \delta$ και έστω

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$$

Τότε $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| = |t| < \delta$ και άρα από την (6.3.6),

$$-\frac{1}{4} Q(\mathbf{v}) < \frac{R_2(\mathbf{x})}{|t|^2} \Rightarrow R_2(\mathbf{x}) > -\frac{1}{4} t^2 Q(\mathbf{v})$$

Συνεπώς,

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) = \frac{1}{2} Q(t\mathbf{v}) + R_2(\mathbf{x}) > \frac{1}{2} t^2 Q(\mathbf{v}) - \frac{1}{4} t^2 Q(\mathbf{v}) = \frac{t^2 Q(\mathbf{v})}{4} > 0$$

Οπότε $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{a})$ για κάθε $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$ με $0 < |t| < \delta$ και άρα το $\mathbf{a}$ είναι αυστηρό τοπικό ελάχιστο της f επί της ευθείας $\mathbf{a} + t\mathbf{v}$. $\square$

Ορισμός 6.3.2. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $f \in C^2(A)$ και $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in A$. Ο συμμετρικός πίνακας

$$(6.3.7) \quad \begin{bmatrix} f_{xx}(a_1, a_2) & f_{xy}(a_1, a_2) \\ f_{xy}(a_1, a_2) & f_{yy}(a_1, a_2) \end{bmatrix}$$

καλείται *Εσσιανός πίνακας της f στο σημείο $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$* .

Από το Πρόγραμμα 6.2.10 και την Πρόταση 6.3.1 προκύπτει άμεσα το κριτήριο της δεύτερης παραγώγου:

Θεώρημα 6.3.3 (κριτήριο δεύτερης παραγώγου για συναρτήσεις δύο μεταβλητών). Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $f \in C^2(A)$. Έστω $(a_1, a_2) \in A$ κρίσιμο σημείο της f (δηλαδή $f_x(a_1, a_2) = f_y(a_1, a_2) = 0$).

Έστω

$$(6.3.8) \quad \Delta(a_1, a_2) = f_{xx}(a_1, a_2)f_{yy}(a_1, a_2) - f_{xy}^2(a_1, a_2)$$

η ορίζουσα του Εσσιανού πίνακα της f στο (a_1, a_2) . Τότε ισχύουν τα επόμενα:

- (1) Αν $f_{xx}(a_1, a_2) > 0$ και $\Delta(a_1, a_2) > 0$ τότε η f έχει αυστηρό τοπικό ελάχιστο στο σημείο (a_1, a_2) .
- (2) Αν $f_{xx}(a_1, a_2) < 0$ και $\Delta(a_1, a_2) > 0$ τότε η f έχει αυστηρό τοπικό μέγιστο στο σημείο (a_1, a_2) .
- (3) Αν $\Delta(a_1, a_2) < 0$ τότε το (a_1, a_2) είναι σαγματικό σημείο της f .

Παρατηρήσεις 6.3.4. (α) Αν $\Delta(a_1, a_2) = 0$ τότε δεν μπορούμε γενικά να αποφανθούμε για το αν το $\mathbf{a}$ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου ή όχι. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι υπάρχει ευθεία (βλ. Πρόταση 6.2.8) που διέρχεται από το (a_1, a_2) όπου εκεί η $Q(x - a_1, y - a_2)$ μηδενίζεται, οπότε για τα σημεία (x, y) αυτής της ευθείας, η διαφορά $f(x, y) - T_2(x, y)$ ισούται με το $R_2(x, y)$ το οποίο να μην τείνει στο 0 καθώς πλησιάζουμε το (a_1, a_2) αλλά δεν διατηρεί απαραίτητα πρόσημο.

(β) Αν $\Delta(a_1, a_2) \neq 0$ τότε οι τρεις περιπτώσεις (1)-(3) του θεωρήματος είναι όλες οι δυνατές περιπτώσεις που μπορούν να συμβούν. Πράγματι, η εναπομείνασα περίπτωση $\Delta(a_1, a_2) > 0$ και $f_{xx}(a_1, a_2) = 0$ είναι αδύνατον να συμβαίνει αφού τότε από τον ορισμό του $\Delta(a_1, a_2)$ (εξίσωση (6.3.8)) θα είχαμε $f_{xy}^2(a_1, a_2) < 0$ που φυσικά δεν μπορεί να ισχύει.

(γ) Υπάρχουν κάποιες περιπτώσεις (ειδικά αν η συνάρτηση που μελετάμε έχει πολύ απλό τύπο) όπου μπορούμε εντελώς στοιχειωδώς να βρούμε τα τοπικά ακρότατα απευθείας, χωρίς τη βοήθεια του κριτηρίου. Για παράδειγμα, μπορούμε να δούμε εύκολα ότι το $(0, 0)$ είναι το μοναδικό σημείο τοπικού ακροτάτου που έχει η συνάρτηση $f(x, y) = x^2 + y^2$. Πράγματι, για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = x^2 + y^2 \geq 0 = f(0, 0)$ και άρα η f έχει ολικό ελάχιστο στο $(0, 0)$. Αν τώρα υπήρχε και άλλο σημείο τοπικού ακροτάτου τότε θα έπρεπε αυτό να είναι κρίσιμο σημείο, δηλαδή θα ήταν λύση του συστήματος

$$f_x(x, y) = 2x = 0$$

$$f_y(x, y) = 2y = 0.$$

Όμως, το παραπάνω σύστημα έχει μοναδική λύση την $(x, y) = (0, 0)$.

Δίνουμε παρακάτω κάποια παραδείγματα εφαρμογής του Θεωρήματος 6.3.3.

Παράδειγμα 6.3.5. Μελετήστε τη συνάρτηση $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$ ως προς τα τοπικά ακρότατα.

Λύση: Έχουμε

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 3y$$

$$f_y(x, y) = 3y^2 + 3x$$

$$f_{xx}(x, y) = 6x$$

$$f_{yy}(x, y) = 6y$$

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 3$$

και άρα $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Υπολογίζουμε τώρα τα κρίσιμα σημεία, δηλαδή τις λύσεις του συστήματος

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 3y = 0$$

$$f_y(x, y) = 3y^2 + 3x = 0$$

Η πρώτη εξίσωση γράφεται $y = -x^2$ και άρα, αντικαθιστώντας στην δεύτερη, παίρνουμε

$$x^4 + x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 + 1) = 0 \iff x = 0 \text{ ή } x = -1.$$

Άρα, έχουμε δύο πιθανά τοπικά ακρότατα, τα $(0, 0)$ και $(-1, -1)$. Τώρα, για κάθε (x, y) έχουμε ότι

$$\Delta(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - (f_{xy}(x, y))^2 = 36xy - 9.$$

Εφόσον $\Delta(0, 0) = -9 < 0$, το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο. Επίσης, $\Delta(-1, -1) = 36 - 9 > 0$ και $f_{xx}(-1, -1) = -6 < 0$. Συνεπώς, στο σημείο $(-1, -1)$ έχουμε αυστηρό τοπικό μέγιστο.

Παράδειγμα 6.3.6. Μελετήστε τη συνάρτηση $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2$ ως προς τα τοπικά ακρότατα.

Λύση: Έχουμε

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 6x$$

$$f_y(x, y) = 6xy - 6y$$

$$f_{xx}(x, y) = 6x - 6$$

$$f_{yy}(x, y) = 6x - 6$$

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 6y$$

και άρα $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Υπολογίζουμε τώρα τα κρίσιμα σημεία, δηλαδή τις λύσεις του συστήματος

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 6x = 0$$

$$f_y(x, y) = 6xy - 6y = 0.$$

Η δεύτερη εξίσωση γράφεται $6y(x - 1) = 0$ και άρα

$$(6.3.9) \quad y = 0 \text{ ή } x = 1.$$

Για $y = 0$ από την πρώτη εξίσωση παίρνουμε $3x^2 - 6x = 0 \iff 3x(x - 2) = 0$ και άρα $x = 0$ ή $x = 2$.

Συνεπώς, έχουμε τα σημεία

$$(0, 0) \quad \text{και} \quad (2, 0).$$

Αντίστοιχα για $x = 1$ η πρώτη εξίσωση δίνει $3 + 3y^2 - 6 = 0 \iff y^2 - 1 = 0$ και άρα $y = 1$ ή $y = -1$.

Οπότε έχουμε και τα σημεία

$$(1, 1) \quad \text{και} \quad (1, -1).$$

Συνολικά δηλαδή έχουμε τέσσερα πιθανά τοπικά ακρότατα, τα $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(1, 1)$ και $(1, -1)$. Τώρα, για κάθε (x, y) υπολογίζουμε την

$$\Delta(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - (f_{xy}(x, y))^2 = (6x - 6) \cdot (6x - 6) - 36y^2.$$

Έχουμε

(1) $\Delta(0, 0) = 36 > 0$, $f_{xx}(0, 0) = -6 < 0$ και άρα το $(0, 0)$ είναι αυστηρό τοπικό μέγιστο.

(2) $\Delta(2, 0) = 36 > 0$, $f_{xx}(2, 0) = 6 > 0$ και άρα το $(2, 0)$ είναι αυστηρό τοπικό ελάχιστο.

(3) $\Delta(1, 1) = -36 < 0$ και άρα το $(1, 1)$ είναι σαγματικό σημείο.

(4) $\Delta(1, -1) = -36 < 0$ και άρα το $(1, -1)$ είναι σαγματικό σημείο.

Παράδειγμα 6.3.7. Μελετήστε τη συνάρτηση $f(x, y) = 4x^2 - x^4 - y^4$ ως προς τα τοπικά ακρότατα.

Λύση: Έχουμε

$$f_x(x, y) = 8x - 4x^3$$

$$f_y(x, y) = -4y^3$$

$$f_{xx}(x, y) = 8 - 12x^2$$

$$f_{yy}(x, y) = -12y^2$$

$$f_{xy}(x, y) = 0$$

και άρα $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Υπολογίζουμε τώρα τα κρίσιμα σημεία, δηλαδή τις λύσεις του συστήματος

$$f_x(x, y) = 8x - 4x^3 = 0$$

$$f_y(x, y) = -4y^3 = 0.$$

Εύκολα βλέπουμε ότι οι λύσεις είναι τα σημεία $(0, 0), (\sqrt{2}, 0), (-\sqrt{2}, 0)$. Επειδή

$$\Delta(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - (f_{xy}(x, y))^2 = -12(8 - 12x^2)y^2 = 0$$

και σε όλα τα κρίσιμα σημεία η y -συντεταγμένη είναι μηδενική έχουμε ότι

$$\Delta(0, 0) = \Delta(\sqrt{2}, 0) = \Delta(-\sqrt{2}, 0) = 0$$

που σημαίνει ότι το κριτήριο δεν αποφαινεται για κανένα από τα κρίσιμα σημεία.

Παρατηρούμε ότι

$$f(x, y) = 4x^2 - x^4 - y^4 = 4x^2 - x^4 - 4 + 4 - y^4 = 4 - (x^2 - 2)^2 - y^4 \leq 4 = f(\pm\sqrt{2}, 0)$$

και ειδικότερα,

$$4 - (x^2 - 2)^2 - y^4 \leq 4 = f(\pm\sqrt{2}, 0)$$

για κ'θε $(x, y) \neq (\pm\sqrt{2}, 0)$. Άρα η f παρουσιάζει αυστηρό ολικό μέγιστο στα σημεία $(\pm\sqrt{2}, 0)$. για κάθε $(x, y) \neq (\pm\sqrt{2}, 0)$, ισχύει ότι

Για το σημείο $(0, 0)$ παρατηρούμε ότι για κάθε σημείο $(0, y) \neq (0, 0)$ του y -άξονα $f(0, y) = -y^4 < 0$ ενώ για κάθε σημείο $(x, 0) \neq (0, 0)$ του x -άξονα με $|x| < 1$ έχουμε $f(x, 0) = 4x^2 - x^4 > 0$. Επειδή $f(0, 0) = 0$ το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο.

6.4 Ολικά ακρότατα σε κλειστά και φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ με εσωτερικό

Έστω $D \subseteq \mathbb{R}^2$ κλειστό και φραγμένο και $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ C^2 -συνάρτηση. Η f είναι συνεχής και συνεπώς πάνω στο D λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Για να προσδιορίσουμε τα ακρότατα της f εργαζόμαστε ως εξής:

(i) Βρίσκουμε τα πιθανά ακρότατα στο εσωτερικό του D μηδενίζοντας το ∇f .

(ii) Βρίσκουμε τα πιθανά ακρότατα στο σύνορο ∂D του D .

(iii) Συγκρίνουμε τις τιμές που βρήκαμε.

Παράδειγμα 6.4.1. Βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y - 1$$

πάνω στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Λύση: Στο εσωτερικό του D τα τοπικά ακρότατα βρίσκονται στα σημεία που μηδενίζεται η κλίση της f . Έχουμε $\nabla f(x, y) = (2x - 1, 2y - 1)$ και άρα

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Πάνω στο $\partial D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ η f παίρνει την μορφή

$$f(x, y) = -x - y$$

Έστω $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ $t \in [0, 2\pi]$ μια παραμετρικοποίηση του ∂D . Για να βρούμε τα πιθανά ακρότατα της f στο ∂D , αρκεί να βρούμε τα ακρότατα της

$$g(t) = -\cos t - \sin t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Αυτό γίνεται εύκολα: Τα πιθανά ολικά ακρότατα της g ανήκουν είτε τα άκρα $0, 2\pi$ ή στα εσωτερικά σημεία του $[0, 2\pi]$ με

$$g'(t) = \sin t - \cos t = 0 \Leftrightarrow \sin t = \cos t \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} \text{ ή } t = \frac{5\pi}{4}$$

Έχουμε

$$g(0) = g(2\pi) = -1, \quad g\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \quad \text{και} \quad g\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$

και άρα

$$f(1, 0) = f(0, 1) = -1, \quad f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}, \quad f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$$

Επίσης,

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

Συγκρίνοντας τις τιμές, βλέπουμε ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ με τιμή $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$ και ολικό μέγιστο στο $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, με τιμή $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$.

6.5 Τοπικά ακρότατα υπό συνθήκη – Μέθοδος των πολλαπλασιαστών Lagrange

Πολλές φορές αναζητάμε ακρότατα μιας συνάρτησης πολλών μεταβλητών με κάποια δέσμευση, για παράδειγμα ψάχνουμε τα ακρότατα μιας συνάρτησης $f(x, y)$ πάνω σε μια καμπύλη του $\mathbb{R}^2$. Ένα τέτοιο

πρόβλημα το συναντήσαμε ήδη στο Παράδειγμα 6.4.1, όπου ζητούσαμε τα ακρότατα της $f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y - 1$ πάνω στον μοναδιαίο κύκλο $x^2 + y^2 = 1$. Σε αυτές τις περιπτώσεις η τεχνική μέσω της εύρεσης των κρίσιμων σημείων της f λύνοντας την εξίσωση $\nabla f(x, y) = \mathbf{0}$ δεν μπορεί να εφαρμοστεί. Ο λόγος είναι ότι η συνθήκη είναι αναγκαία για ύπαρξη ακροτάτων μόνο αν το σύνολο στο οποίο μελετάμε την f είναι ανοικτό. Στο Παράδειγμα 6.4.1 έπρεπε να βρούμε τα ακρότατα της συνάρτησης πάνω στον μοναδιαίο κύκλο που δεν είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Λύσαμε το πρόβλημα αυτό με την μέθοδο της παραμετρικοποίησης. Παραμετρικοποιήσαμε τον μοναδιαίο κύκλο και με αυτόν τον τρόπο μετατρέψαμε το πρόβλημα σε πρόβλημα εύρεσης ακροτάτων συνάρτησης μιας μεταβλητής.

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε μια άλλη γενικότερη μέθοδο αντιμετώπισης προβλημάτων ακροτάτων υπό συνθήκη που καλείται *μέθοδος των πολλαπλασιαστών Lagrange*. Θα προσπαθήσουμε να εξηγήσουμε την μέθοδο αυτή μελετώντας το εξής πρόβλημα. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω S μια επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ (για παράδειγμα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι S είναι η μοναδιαία σφαίρα του $\mathbb{R}^3$). Θέλουμε να βρούμε τα σημεία της S όπου η f όταν την περιορίζουμε πάνω στην S λαμβάνει την μεγαλύτερη ή την μικρότερη τιμή, με άλλα λόγια ψάχνουμε τα ακρότατα της συνάρτησης

$$f|_S : S \rightarrow \mathbb{R}$$

Έστω ότι η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο πάνω στην επιφάνεια S στο (x_0, y_0, z_0) . Χωρίς βλάβη της γενικότητας ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο πάνω στην επιφάνεια S στο (x_0, y_0, z_0) . Αυτό εξ ορισμού σημαίνει ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$f(x, y, z) \geq f(x_0, y_0, z_0)$$

για όλα τα $(x, y, z) \in S \cap B_\delta(x_0, y_0, z_0)$.

Έστω C μια παραγωγίσιμη καμπύλη της S που διέρχεται από το $\mathbf{x}_0$. Η καμπύλη C μπορεί να περιγραφεί μέσω μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης

$$\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$$

όπου I είναι ένα ανοικτό διάστημα του $\mathbb{R}$ με $0 \in I$ και

$$\mathbf{r}(0) = (x_0, y_0, z_0)$$

Τότε η συνάρτηση

$$F : I \rightarrow \mathbb{R}$$

με τύπο

$$F(t) = f(\mathbf{r}(t))$$

(δηλαδή ο περιορισμός της f πάνω στην καμπύλη C) παρουσιάζει στο $t = 0$ τοπικό ακρότατο. Επομένως, από τον Κανόνα Αλυσίδας, αν η f είναι παραγωγίσιμη τότε και η F θα είναι παραγωγίσιμη και θα ισχύει

$$F'(0) = 0$$

ισοδύναμα

$$\left. \frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t)) \right|_{t=0} = \nabla f(\mathbf{r}(0)) \cdot \mathbf{r}'(0) = 0$$

και συνεπώς

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \perp \mathbf{r}'(0)$$

Αυτό θα ισχύει για οποιαδήποτε παραγωγίσιμη καμπύλη της S που διέρχεται από το (x_0, y_0, z_0) και συνεπώς μπορούμε να πούμε ότι το $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ είναι κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο της S στο σημείο (x_0, y_0, z_0) , δηλαδή το $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ είναι κάθετο στην επιφάνεια S . Αν επιπλέον η S είναι ισοσταθμική επιφάνεια μιας C^1 συνάρτησης g δηλαδή

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = c\}$$

τότε ξέρουμε ότι το ∇g είναι κάθετο στην S σε κάθε σημείο της άρα και στο (x_0, y_0, z_0) . Επομένως,

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \parallel \nabla g(x_0, y_0, z_0)$$

και άρα αν επιπλέον $\nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$ τότε θα υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0)$$

Ο αριθμός αυτός λ καλείται *πολλαπλασιαστής Lagrange*. Η μέθοδος που αναπτύξαμε παραπάνω μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε κάθε διάσταση $n = 2, 3, \dots$ και συνοψίζεται στο εξής θεώρημα.

Θεώρημα 6.5.1. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης. Έστω

$$S = \{\mathbf{x} \in A : g(\mathbf{x}) = c\}$$

και έστω $\mathbf{x}_0 \in S$ σημείο τοπικού ακροτάτου της συνάρτησης

$$f|_S : S \rightarrow \mathbb{R}$$

Αν $\nabla g(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$ τότε υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε

$$(6.5.1) \quad \nabla f(\mathbf{x}_0) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}_0)$$

Κάθε σημείο τοπικού ακροτάτου της $f|_S : S \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $S = \{\mathbf{x} \in A : g(\mathbf{x}) = c\}$ θα καλείται *τοπικό ακρότατο της f υπό την συνθήκη $g(\mathbf{x}) = c$* .

Πόρισμα 6.5.2. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης. Αν $\nabla g(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ για κάθε $\mathbf{x} \in A$ τότε τα πιθανά ακρότατα της f υπό την συνθήκη $g(\mathbf{x}) = c$ ικανοποιούν το σύστημα

$$\begin{cases} \nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}) \\ g(\mathbf{x}) = c \end{cases}$$

Παράδειγμα 6.5.3. Βρείτε το μέγιστο της συνάρτησης $f(x, y, z) = x + z$ πάνω στην μοναδιαία σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Λύση: Θέτουμε $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ και συνεπώς η συνθήκη γίνεται

$$g(x, y, z) = 1$$

Για να βρούμε τα σημεία στα οποία η f πιθανόν να παρουσιάζει ακρότατο λύνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 1 \end{cases}$$

Ισοδύναμα,

$$\begin{cases} (1, 0, 1) = \lambda(2x, 2y, 2z) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

Από το παραπάνω σύστημα παίρνουμε ότι πιθανά τοπικά ακρότατα της f είναι τα σημεία

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{και} \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Επειδή η f είναι συνεχής και η μοναδιαία σφαίρα είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$, από το Θεώρημα 6.1.2 έχουμε ότι η f λαμβάνει σίγουρα μέγιστη και ελάχιστη τιμή επί της μοναδιαίας σφαίρας. Με σύγκριση των τιμών της f στα παραπάνω δύο σημεία βλέπουμε ότι στο $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ λαμβάνεται η μέγιστη τιμή και αντίστοιχα στο $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ λαμβάνεται η ελάχιστη τιμή της f πάνω στην σφαίρα.

Παράδειγμα 6.5.4. Να μελετήσετε ως προς τα ακρότατα την συνάρτηση $f(x, y) = x^2 + y^2$ πάνω στην ευθεία $y - x - 1 = 0$.

Λύση: Θέτουμε $g(x, y) = y - x - 1$. Επειδή $\nabla g(x, y) = (-1, 1) \neq (0, 0)$ και $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$, έχουμε να λύσουμε το σύστημα

$$\begin{cases} 2x = -\lambda \\ 2y = \lambda \\ y - x - 1 = 0 \end{cases}$$

Από το σύστημα αυτό προκύπτει μόνο ένα σημείο το $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Για να προσδιορίσουμε το είδος του ακροτάτου κάνουμε την εξής σκέψη: Καθώς οι ισοσταθμικές της f που είναι οι κύκλοι με κέντρο το $(0, 0)$ απομακρύνονται από την αρχή των αξόνων η τιμή της f μεγαλώνει. Επομένως εκεί που εφάπτεται η ισοσταθμική με την ευθεία $y - x - 1 = 0$ θα έχουμε ελάχιστο για την f πάνω στην ευθεία.

Παρατήρηση 6.5.5. Το Παράδειγμα 6.5.4 θα μπορούσε να λυθεί και χωρίς την χρήση των πολλαπλασιαστών Lagrange ως εξής: Λύνουμε την εξίσωση της συνθήκης $y - x - 1 = 0$ ως προς μια από τις μεταβλητές π.χ. ως προς y και παίρνουμε $y = x + 1$. Αντικαθιστούμε τώρα στον τύπο της f το y με $x + 1$ και έχουμε μια συνάρτηση μιας μεταβλητής

$$F(x) = f(x, x + 1) = x^2 + (x + 1)^2 = x^2 + x^2 + 2x + 1 = 2x^2 + 2x + 1$$

Παρατηρήστε ότι ένα σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ είναι τοπικό (αντ. ολικό) ελάχιστο για την F αν και μόνο αν το $(x_0, x_0 + 1)$ είναι τοπικό (αντ. ολικό) ελάχιστο για την f πάνω στην ευθεία $y - x - 1 = 0$. Ομοίως ένα σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ είναι τοπικό (αντ. ολικό) μέγιστο για την F αν και μόνο αν το $(x_0, x_0 + 1)$ είναι τοπικό (αντ. ολικό) μέγιστο για την f πάνω στην ευθεία $y - x - 1 = 0$. Με αυτό τον τρόπο, το πρόβλημα της

εύρεσης των τοπικών ακροτάτων υπό συνθήκη της συνάρτησης δύο μεταβλητών $f(x, y)$ ανάγεται σε πρόβλημα εύρεσης των τοπικών ακροτάτων χωρίς κάποια συνθήκη, της συνάρτησης μιας μεταβλητής $F(x)$.

Τα πιθανά τοπικά ακρότατα της F είναι τα σημεία $x \in \mathbb{R}$ που μηδενίζουν την F' . Έχουμε

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Επιπλέον $F'(x) < 0$ για $x < 1/2$ και $F'(x) > 0$ για $x > 0$. Άρα η F είναι φθίνουσα για $x \leq 1/2$ και αύξουσα για $x \geq 1/2$ και συνεπώς στο $x = 1/2$ η F παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. Ισοδύναμα, η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο πάνω στην ευθεία $y - x - 1 = 0$ στο σημείο $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

6.6 Ασκήσεις

Άσκηση 6.6.1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y) = ax^4 + by^4$, όπου a, b μη μηδενικές σταθερές.

- (i) Αν $a \cdot b > 0$ δείξτε ότι το $(0, 0)$ είναι τοπικό ακρότατο της f .
- (ii) Αν $a \cdot b < 0$ δείξτε ότι το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο της f .

Άσκηση 6.6.2. Να μελετηθεί ως προς τα τοπικά ακρότατα η συνάρτηση $f(x, y) = x^4 - 4xy + 2y^2 - 10$.

[Απάντηση: Κρίσιμα σημεία είναι τα σημεία $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(-1, -1)$. Το $(0, 0)$ είναι σαγματικό ενώ τα $(1, 1)$, $(-1, -1)$ είναι τοπικά ελάχιστα.]

Άσκηση 6.6.3. Μελετήστε τη συνάρτηση $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$ ως προς τα τοπικά ακρότατα.

[Απάντηση: Κρίσιμα σημεία είναι τα σημεία $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, και $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Περιορίζοντας την f σε κατάλληλες ευθείες βλέπουμε ότι το $(0, 0)$ είναι σαγματικό. Επίσης, τα σημεία $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, και $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ είναι τοπικά ελάχιστα.]

Άσκηση 6.6.4. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x - y)^4$.

[Υπόδειξη : Δείχνουμε πρώτα ότι η f έχει ένα μοναδικό κρίσιμο σημείο το $(0, 0)$. Με περιορισμό της f πάνω σε κατάλληλες ευθείες αποδεικνύουμε ότι το $(0, 0)$ είναι σαγματικό και άρα η f δεν έχει τοπικά ακρότατα.]

Άσκηση 6.6.5. Βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x, y) = 4x^2 - y^2$ πάνω στην έλλειψη $x^2 + 2y^2 = 4$.

[Απάντηση: Με την μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange βρισκουμε ότι η f πάνω στην έλλειψη παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στα σημεία $(0, -\sqrt{2})$ και $(0, \sqrt{2})$ και ολικό μέγιστο στα $(-2, 0)$ και $(2, 0)$.]

Άσκηση 6.6.6. Βρείτε το σημείο του επιπέδου $x + y + z = 3$ που είναι πλησιέστερο στο $(0, 0, 0)$.

[Απάντηση: Με την μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange (ή και με επίλυση της συνθήκης) βρισκουμε ότι το $(1, 1, 1)$ είναι το ζητούμενο σημείο.]

Άσκηση 6.6.7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y) = y$ και έστω η καμπύλη $y^3 = x^2$.

- (α) Παρατηρήστε ότι το $(0, 0)$ είναι ολικό ακρότατο της f υπό την συνθήκη $y^3 - x^2 = 0$.

(β) Δείξτε ότι το σύστημα

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

δεν έχει λύση.

(γ) Γιατί η μέθοδος των πολλαπλασιαστών *Lagrange* δεν εφαρμόζεται;

[Υπόδειξη : $\nabla g(0, 0) = (0, 0)$]

Άσκηση 6.6.8. Δείξτε ότι μεταξύ όλων των τριγώνων που είναι εγγεγραμμένα σε δεδομένο κύκλο το ισόπλευρο είναι το τρίγωνο με το μεγαλύτερο εμβαδόν.

[Υπόδειξη : Έστω R η ακτίνα του κύκλου και $AB\Gamma$ ένα εγγεγραμμένο τρίγωνο. Αν με x, y, z συμβολίσουμε τις επίκεντρες γωνίες που βαίνουν στις πλευρές AB , $B\Gamma$, ΓA τότε το εμβαδόν του $AB\Gamma$ δίνεται από τον τύπο

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2}R^2 (\sin x + \sin y + \sin z)$$

όπου $x + y + z = 2\pi$ και $0 < x, y, z < \pi$. Επομένως ψάχνουμε να βρούμε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x, y, z)$ υπό την συνθήκη $g(x, y, z) = x + y + z - 2\pi = 0$.]

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης

7.1 Το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης για δύο μεταβλητές

Σε αυτήν την ενότητα θα μελετήσουμε το πρόβλημα της επίλυσης μιας εξίσωσης δύο μεταβλητών

$$(7.1.1) \quad F(x, y) = 0$$

ως προς τη μία από τις μεταβλητές συναρτήσει της άλλης. Θέλουμε δηλαδή να δώσουμε κάποιες συνθήκες ώστε δεδομένης της εξίσωσης (7.1.1) να υπάρχει μια λύση της μορφής

$$(7.1.2) \quad y = f(x) \quad \text{ή} \quad x = g(y).$$

Το ερώτημα αυτό έχει και την εξής γεωμετρική διατύπωση: Πότε το σύνολο των σημείων $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ που ικανοποιούν την εξίσωση $F(x, y) = 0$, αποτελεί το ίχνος μιας «φυσιολογικής» καμπύλης του $\mathbb{R}^2$, δηλαδή είναι το γράφημα μιας συνάρτησης από ένα διάστημα του $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$;

Παράδειγμα 7.1.1. Αν η $F(x, y) = 0$ είναι η εξίσωση

$$(7.1.3) \quad F(x, y) = ax + by + c = 0$$

και $b \neq 0$ τότε η (7.1.3) λύνεται ως προς τη μεταβλητή y :

$$(7.1.4) \quad y = f(x) = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

και συνεπώς όλα τα σημεία $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ που ικανοποιούν την (7.1.3) αποτελούν το γράφημα της συνάρτησης (7.1.4), δηλαδή μια ευθεία του $\mathbb{R}^2$.

Παράδειγμα 7.1.2. Από την άλλη πλευρά, αν έχουμε την εξίσωση

$$(7.1.5) \quad F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

βλέπουμε ότι για κάθε $x \in (-1, 1)$ υπάρχουν δύο διαφορετικά y_1, y_2 με $F(x, y_1) = F(x, y_2) = 0$ και αντίστοιχα για κάθε $y \in (-1, 1)$ υπάρχουν δύο διαφορετικά x_1, x_2 με $F(x_1, y) = F(x_2, y) = 0$. Συνεπώς, η εξίσωση $x^2 + y^2 - 1 = 0$ δεν μπορεί να επιλυθεί πλήρως ως προς καμία από τις μεταβλητές x, y . Όμως, αν περιορίσουμε τα (x, y) με $F(x, y) = 0$ που θεωρούμε, τότε μπορούμε να επιλύσουμε την $F(x, y) = 0$

ως προς μία μεταβλητή συναρτήσει της άλλης. Για παράδειγμα, παρατηρούμε ότι ισχύει η ισοδυναμία

$$F(x, y) = 0 \text{ και } y \geq 0 \iff y = \sqrt{1-x^2}, x \in [-1, 1].$$

Ομοίως,

$$F(x, y) = 0 \text{ και } x \leq 0 \iff x = -\sqrt{1-y^2}, y \in [-1, 1].$$

Γενικά μπορούμε να δούμε ότι για κάθε (x_0, y_0) με $F(x_0, y_0) = 0$ υπάρχει πάντα ένα διάστημα I_0 που έχει το x_0 στο εσωτερικό του και ένα διάστημα J_0 που έχει το y_0 στο εσωτερικό του ώστε μέσα στο ορθογώνιο $I_0 \times J_0 = \{(x, y) : x \in I_0, y \in J_0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ να μπορούμε να επιλύσουμε την $F(x, y) = 0$ είτε ως προς y είτε ως προς x . Για παράδειγμα, στο σημείο $(0, 1)$ η $F(x, y) = 0$ επιλύεται ως προς y ($y = \sqrt{1-x^2}$) όταν περιοριστούμε στα (x, y) με $x \in [-1, 1]$ και $y \geq 0$.

Στο δεύτερο παράδειγμα λύνουμε την εξίσωση $F(x, y) = 0$ τοπικά δηλαδή γύρω από κάθε σημείο (x_0, y_0) με $F(x_0, y_0) = 0$. Πιο συγκεκριμένα, αν (x_0, y_0) είναι μια λύση της $F(x, y) = 0$ τότε επιλέγοντας κατάλληλα ανοικτά διαστήματα X και Y που περιέχουν τα x_0 και y_0 αντίστοιχα, μπορούμε να βρούμε μια συνάρτηση $f : X \rightarrow Y$ (ή μια συνάρτηση $g : Y \rightarrow X$) τέτοια ώστε $y = f(x)$ (αντίστοιχα, $x = g(y)$) για κάθε $x \in X$ και $y \in Y$. Το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης μας δίνει μια ικανή συνθήκη ώστε να εξασφαλιστεί αυτό.

Θεώρημα 7.1.3. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $F \in C^1(A)$. Έστω

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\}.$$

Αν το $(x_0, y_0) \in C$ ικανοποιεί την

$$(7.1.6) \quad F_y(x_0, y_0) \neq 0$$

τότε υπάρχουν ανοικτό διάστημα $Y = (y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2)$ με κέντρο το y_0 , ανοικτό διάστημα $X = (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$ με κέντρο το x_0 , και μοναδική C^1 συνάρτηση $f : X \rightarrow Y$ τέτοια ώστε

$$(7.1.7) \quad F(x, y) = 0 \iff y = f(x)$$

για κάθε $x \in X$ και $y \in Y$. Ισοδύναμα,

$$(7.1.8) \quad \{(x, y) \in C : x \in X \text{ και } y \in Y\} = \{(x, f(x)) : x \in X\}$$

και άρα το σύνολο C σε μια περιοχή του σημείου (x_0, y_0) είναι το γράφημα μιας C^1 συνάρτησης μιας μεταβλητής.

Επιπλέον,

$$(7.1.9) \quad f'(x) = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} \Big|_{y=f(x)}$$

για κάθε $x \in X$. Ειδικότερα,

$$(7.1.10) \quad f'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη χωρίζεται σε τρία βήματα. Πρώτα προσδιορίζουμε τα ανοικτά διαστήματα με

την εξής σειρά: πρώτα το Y και ύστερα το X , έτσι ώστε για κάθε $x \in X$ να υπάρχει μοναδικό $y \in Y$ τέτοιο ώστε $F(x, y) = 0$ και ταυτόχρονα αν $y', y'' \in Y$ να έχουμε ότι

$$y' < y < y'' \Leftrightarrow F(x, y') < 0 < F(x, y'').$$

Άρα, αν $f : X \rightarrow Y$ είναι η συνάρτηση που στέλνει κάθε $x \in X$ στο μοναδικό $y \in Y$ με $F(x, y) = 0$ τότε θα έχουμε ότι η γραφική παράσταση C της f θα χωρίζει το ορθογώνιο $X \times Y$ σε δύο μέρη έτσι ώστε η $F(x, y)$ να είναι γνησίως αρνητική κάτω από την C , ίση με μηδέν επί της C και γνησίως θετική πάνω από την C . Στο δεύτερο βήμα δείχνουμε ότι αυτή η συνάρτηση είναι συνεχής και στο τρίτο και τελευταίο βήμα, χρησιμοποιώντας το θεώρημα μέσης τιμής δείχνουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη, με παράγωγο που δίνεται από τον τύπο (7.1.9).

Βήμα 1. Έστω ότι $F_y(x_0, y_0) > 0$ (αν $F_y(x_0, y_0) < 0$ τότε η απόδειξη προχωράει ανάλογα). Επειδή η $F_y : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής, μπορούμε να επιλέξουμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $F_y(x, y) > 0$ για κάθε $(x, y) \in B_\delta(x_0, y_0)$. Θέτουμε

$$\delta_2 = \delta/2, \quad y_0^- = y_0 - \delta_2, \quad y_0^+ = y_0 + \delta_2, \quad \text{και } Y = (y_0^-, y_0^+).$$

Περιορίζουμε τώρα την F στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα (x_0, y_0^-) και (x_0, y_0^+) , δηλαδή θεωρούμε τη συνάρτηση $g_0 : Y \rightarrow \mathbb{R}$ με $g_0(y) = F(x_0, y)$ για κάθε $y \in Y$. Είναι εύκολο να δούμε ότι $g'_0(y) = F_y(x_0, y)$ και συνεπώς $g'_0(y) > 0$ για κάθε $y \in Y$. Αυτό σημαίνει ότι η g_0 είναι μια γνησίως αύξουσα συνεχής συνάρτηση. Επειδή $g_0(y_0) = F(x_0, y_0) = 0$ θα πρέπει να έχουμε $g_0(y) < 0 < g_0(y')$ για κάθε $y < y_0 < y'$ στο Y . Ειδικότερα,

$$F(x_0, y_0^-) < 0 < F(x_0, y_0^+).$$

Επειδή η F είναι συνεχής στα (x_0, y_0^-) και (x_0, y_0^+) θα υπάρχει $\delta' > 0$ τέτοιο ώστε

$$F(x, y) < 0 \text{ αν } (x, y) \in B_{\delta'}(x_0, y_0^-) \text{ και } F(x, y) > 0 \text{ αν } (x, y) \in B_{\delta'}(x_0, y_0^+)$$

Μπορούμε να υποθέσουμε (μικραίνοντας το δ' αν χρειαστεί) ότι το δ' είναι αρκετά μικρό ώστε οι δίσκοι $B_{\delta'}(x_0, y_0^-)$ και $B_{\delta'}(x_0, y_0^+)$ να περιέχονται στον αρχικό δίσκο $B_\delta(x_0, y_0)$. Θέτουμε

$$\delta_1 = \delta', \quad x_0^- = x_0 - \delta_1, \quad x_0^+ = x_0 + \delta_1, \quad \text{και } X = (x_0^-, x_0^+).$$

Τότε

$$F(x, y_0^-) < 0, \quad F(x, y_0^+) > 0$$

για κάθε $x \in X$. Επιπλέον, $X \times Y \subseteq B_\delta(x_0, y_0)$ και άρα, αν σταθεροποιήσουμε κάποιο $x \in X$ και θεωρήσουμε όπως προηγουμένως τη συνάρτηση $g(y) = F(x, y)$, $y \in Y$, θα έχουμε ότι $g'(y) = F_y(x, y) > 0$, δηλαδή η g είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής. Επειδή $g(y_0^-) = F(x, y_0^-) < 0$ και $h(y_0^+) = F(x, y_0^+) > 0$, θα υπάρχει μοναδικό $y \in Y$ με $h(y) = F(x, y) = 0$. Έστω $f : X \rightarrow Y$ η συνάρτηση που στέλνει κάθε $x \in X$ στο μοναδικό $y \in Y$ με $F(x, y) = 0$.

Βήμα 2. Δείχνουμε τώρα ότι η f είναι συνεχής. Θεωρούμε τυχόν σημείο $a \in X$ και $\varepsilon > 0$. Από την επιλογή των X και Y παραπάνω, το $b = f(a)$ θα είναι το μοναδικό σημείο του διαστήματος Y που ικανοποιεί τις $F(a, b) = 0$ και $F(a, y) < 0 < F(a, y')$ αν και μόνο αν $y < b < y'$. Περνώντας σε μικρότερο $\varepsilon > 0$ αν χρειάζεται, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $(b - \varepsilon, b + \varepsilon) \subseteq Y$. Επειδή $F(a, b - \varepsilon) < 0 < F(a, b + \varepsilon)$ και η F είναι συνεχής, μπορούμε να επιλέξουμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $F(x, y) < 0$ αν

$(x, y) \in B_\delta(a, b - \varepsilon)$ και $F(x, y) > 0$ αν $(x, y) \in B_\delta(a, b + \varepsilon)$. Ειδικότερα, για κάθε $x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ έχουμε $F(x, b - \varepsilon) < 0 < F(x, b + \varepsilon)$, το οποίο σημαίνει ότι $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$, αφού, από την επιλογή των Y, X και τον ορισμό της f στο Βήμα 1, το $f(x)$ είναι το μοναδικό σημείο y στο Y με την ιδιότητα $F(x, y') < 0 < F(x, y'') \iff y' < y < y''$.

Βήμα 3. Έστω $a \in X$ και έστω $x \in X$ με $x \neq a$. Παρατηρήστε ότι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα $\mathbf{a} = (a, f(a))$ και $\mathbf{x} = (x, f(x))$ περιέχεται ολόκληρο στο $X \times Y$, άρα περιέχεται στο A . Επειδή η F είναι C^1 , είναι και παραγωγίσιμη και άρα από το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (\mathbf{a}, \mathbf{x})$ τέτοιο ώστε

$$F(x, f(x)) - F(a, f(a)) = F_x(\xi)(x - a) + F_y(\xi)(f(x) - f(a)).$$

Από τις $F(x, f(x)) = F(a, f(a)) = 0$ έπεται ότι

$$F_x(\xi)(x - a) + F_y(\xi)(f(x) - f(a)) = 0.$$

Εφόσον $\xi \in X \times Y \subseteq B_\delta(x_0, y_0)$ (βλ. Βήμα 1), $F_y(\xi) > 0$. Ειδικότερα, $F_y(\xi) \neq 0$ και άρα

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\frac{F_x(\xi)}{F_y(\xi)}.$$

Λόγω συνέχειας της f , $\lim_{x \rightarrow a}(x, f(x)) = (a, f(a))$. Επειδή $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ με $0 < |\xi_1 - a| < |x - a|$ και $0 < |\xi_2 - f(a)| < |f(x) - f(a)|$, έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow a} \xi = (a, f(a))$ και άρα

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\lim_{x \rightarrow a} \frac{F_x(\xi)}{F_y(\xi)} = -\frac{F_x(a, f(a))}{F_y(a, f(a))}.$$

□

Παρατηρήσεις 7.1.4. (1) Το Παράδειγμα 7.1.1 είναι ένα απλό παράδειγμα που επιβεβαιώνει τη συνθήκη $F_y(x, y) \neq 0$ για να λύνεται η F ως προς y . Πράγματι, η F λύνεται ως προς y συναρτήσει του x αν $b = F_y(x, y) \neq 0$.

(2) Παρατηρήστε ότι η επίλυση της $F(x, y) = 0$ ως προς $y = f(x)$ είναι τοπική στο (x_0, y_0) , δηλαδή υπάρχει μια περιοχή X του x_0 και μια περιοχή Y του y_0 , όπου η $F(x, y) = 0$ λύνεται ως προς y συναρτήσει του x . Γενικά όμως μπορεί για κάποια ή και για όλα τα $x \in X$ να υπάρχουν και άλλα y που δεν ανήκουν στο Y αλλά ικανοποιούν την $F(x, y) = 0$. Στο Παράδειγμα 7.1.2 όπου $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, αν $(x_0, y_0) = (0, 1)$, $X = (-1, 1)$ και $Y = (0, 2)$ έχουμε $F(x, +\sqrt{1-x^2}) = 0$ για κάθε $x \in X$ (εδώ $f(x) = +\sqrt{1-x^2}$), ενώ για $Y = (-2, 0)$, $F(x, -\sqrt{1-x^2}) = 0$, πάλι για κάθε $x \in X$ (και άρα $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$).

(3) Η συνάρτηση $f : X \rightarrow Y$ που επιλύει την $F(x, y) = 0$ ως προς y συνήθως δεν δίνεται από κάποιον κλειστό τύπο. Αυτό που γνωρίζουμε για την f είναι ότι ανήκει στην κλάση C^1 . Γενικότερα, αποδεικνύεται ότι αν $F \in C^k(A)$ για κάποιον $k \in \mathbb{N}$ τότε και η f είναι $C^k(X)$.

Ισχύουν ανάλογα αποτελέσματα αν υποθέσουμε ότι $F_x(x_0, y_0) \neq 0$. Πιο συγκεκριμένα, από το Θεώρημα 7.1.5 και με εναλλαγή των x και y παίρνουμε το εξής.

Θεώρημα 7.1.5. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $F \in C^1(A)$. Έστω

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\}.$$

Αν $(x_0, y_0) \in C$ και

$$(7.1.11) \quad F_x(x_0, y_0) \neq 0$$

τότε υπάρχει ένα ανοικτό διάστημα $X = (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$ με κέντρο το x_0 , ένα ανοικτό διάστημα $Y = (y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2)$ με κέντρο το y_0 , και μοναδική C^1 συνάρτηση $g : Y \rightarrow X$ τέτοια ώστε

$$(7.1.12) \quad F(x, y) = 0 \iff x = g(y)$$

για κάθε $x \in X$ και $y \in Y$. Ισοδύναμα,

$$(7.1.13) \quad \{(x, y) \in C : x \in X \text{ και } y \in Y\} = \{(g(y), y) : y \in Y\}$$

και άρα το σύνολο C σε μια περιοχή του σημείου (x_0, y_0) ταυτίζεται με το γράφημα μιας C^1 πραγματικής συνάρτησης μιας μεταβλητής.

Επιπλέον,

$$(7.1.14) \quad g'(y) = -\frac{F_y(x, y)}{F_x(x, y)} \Big|_{x=g(y)}$$

για κάθε $y \in Y$. Ειδικότερα,

$$(7.1.15) \quad g'(y_0) = -\frac{F_y(x_0, y_0)}{F_x(x_0, y_0)}.$$

Παράδειγμα 7.1.6. Αποδείξτε ότι υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση f ορισμένη σε ανοικτό διάστημα με κέντρο το 1 που ικανοποιεί τη σχέση $f(x) = 2x^{f(x)}$.

Απόδειξη. Θέτοντας $y = f(x)$ έχουμε $y = 2x^y \iff 2x^y - y = 0$. Θέτουμε $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}$ και ορίζουμε τη συνάρτηση $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$F(x, y) = 2x^y - y.$$

Έχουμε

$$F_x(x, y) = 2yx^{y-1} \text{ και } F_y(x, y) = 2 \ln x \cdot x^y - 1$$

και άρα η F είναι C^1 . Επίσης,

$$F(1, 2) = 0 \text{ και } F_y(1, 2) = -1 \neq 0.$$

Από το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης η F λύνεται τοπικά στο $(1, 2)$ ως προς y , δηλαδή υπάρχουν ανοικτά διαστήματα X και Y με κέντρα τα $x_0 = 1$ και $y_0 = 2$ αντίστοιχα, και μια C^1 συνάρτηση $f : X \rightarrow Y$ τέτοια ώστε $F(x, y) = 0 \iff y = f(x)$, για κάθε $x \in X$ και $y \in Y$. Συνεπώς, $f(1) = 2$ και $F(x, f(x)) = 0 \iff 2x^{f(x)} - f(x) = 0 \iff f(x) = 2x^{f(x)}$, για κάθε $x \in X$. $\square$

7.2 Το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης για πολλές μεταβλητές

Το Θεώρημα 7.1.3 γενικεύεται (με παρόμοια απόδειξη) και για εξισώσεις με περισσότερες από δύο μεταβλητές. Ταυτίζοντας τον $\mathbb{R}^{d+1}$ με το καρτεσιανό γινόμενο $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ θα συμβολίζουμε κάθε σημείο

του $\mathbb{R}^{d+1}$ με $(x_1, \dots, x_d, y)$ ή $(\mathbf{x}, y)$ όπου $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ και $y \in \mathbb{R}$. Η μεταβλητή y θα είναι η μεταβλητή ως προς την οποία σκοπεύουμε να λύσουμε την εξίσωση $F(x_1, \dots, x_d, y) = 0$ συναρτήσει του $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$.

Θεώρημα 7.2.1. Έστω $d \in \mathbb{N}$ θετικός ακέραιος, $A \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$, ανοικτό σύνολο, $F \in C^1(A)$ και έστω

$$S = \{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^{d+1} : F(\mathbf{x}, y) = 0\}.$$

Αν $(\mathbf{x}_0, y_0) \in S$ και

$$(7.2.1) \quad F_y(\mathbf{x}_0, y_0) \neq 0$$

τότε υπάρχει μια ανοικτή περιοχή $Y \subseteq \mathbb{R}$ του y_0 , μια ανοικτή περιοχή $X \subseteq \mathbb{R}^d$ του $\mathbf{x}_0$ και μοναδική C^1 συνάρτηση $f : X \rightarrow Y$ τέτοια ώστε

$$(7.2.2) \quad F(\mathbf{x}, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(\mathbf{x})$$

για κάθε $\mathbf{x} \in X$ και $y \in Y$. Ισοδύναμα,

$$(7.2.3) \quad \{(\mathbf{x}, y) \in S : \mathbf{x} \in X \text{ και } y \in Y\} = \{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) : \mathbf{x} \in X\}$$

και άρα το σύνολο S σε μια περιοχή του $(\mathbf{x}_0, y_0)$ ταυτίζεται με το γράφημα μιας πραγματικής συνάρτησης d -μεταβλητών. Επιπλέον,

$$(7.2.4) \quad f_{x_i}(\mathbf{x}) = -\frac{F_{x_i}(\mathbf{x}, y)}{F_y(\mathbf{x}, y)} \Big|_{y=f(\mathbf{x})}$$

για κάθε $\mathbf{x} \in X$ και $i = 1, \dots, d$. Ειδικότερα,

$$(7.2.5) \quad f_{x_i}(\mathbf{x}_0) = -\frac{F_{x_i}(\mathbf{x}_0, y_0)}{F_y(\mathbf{x}_0, y_0)}.$$

Παράδειγμα 7.2.2. Η εξίσωση

$$F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - 4 = 0$$

λύνεται ως προς $z = z(x, y)$ σε μια περιοχή του σημείου $(1, 1, 2)$.

Πράγματι,

$$F_x(x, y, z) = 3x^2 - 3yz, \quad F_y(x, y, z) = 3y^2 - 3xz, \quad F_z(x, y, z) = 3z^2 - 3xy.$$

Άρα, η F είναι C^1 . Επιπλέον, $F(1, 1, 2) = 0$ και $F_z(1, 1, 2) = 12 - 3 = 9 \neq 0$. Άρα, από το Θεώρημα 7.2.1 μπορούμε να βρούμε ανοικτή περιοχή $U \subseteq \mathbb{R}^2$ του $(1, 1)$ και ανοικτή περιοχή $Z \subseteq \mathbb{R}$ του $z = 2$ ώστε για κάθε $(x, y) \in U$ να υπάρχει μοναδικό $z = z(x, y) \in Z$ με $F(x, y, z(x, y)) = 0$. Επίσης,

$$z_x(x, y) = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} \Big|_{z=z(x, y)}, \quad z_y(x, y) = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} \Big|_{z=z(x, y)}$$

και άρα (αφού $z(1, 1) = 2$),

$$z_x(1, 1) = -\frac{-3}{9} = 1/3, \quad z_y(1, 1) = -\frac{-3}{9} = 1/3.$$

Παράδειγμα 7.2.3. Δίνεται η συνάρτηση $F(x, y, z) = z^3 + z - x^2 - y^2 - 2$.

(α) Αποδείξτε ότι η εξίσωση $F(x, y, z) = 0$ λύνεται ως προς $z = z(x, y)$ σε μια περιοχή του $(0, 0, 1)$.

(β) Αποδείξτε ότι η $z(x, y)$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $(0, 0)$.

(γ) Γράψτε το πολυώνυμο Taylor $T_2(x, y)$ δεύτερης τάξης της $z = z(x, y)$ με κέντρο το $(0, 0)$ και υπολογίστε το όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{z(x, y) - z(0, 0)}{x^2 + y^2}$.

Απάντηση: (α) Η F είναι C^2 συνάρτηση ως πολυωνυμική. Επίσης έχουμε $F(0, 0, 1) = 0$ και $F_z(x, y, z) = 3z^2 + 1 \neq 0$ για κάθε $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ (οπότε και $F_z(0, 0, 1) \neq 0$). Άρα, η εξίσωση $F(x, y, z) = 0$ λύνεται ως προς $z = z(x, y)$, όπου η $z = z(x, y) : U \rightarrow \mathbb{R}$ είναι C^2 συνάρτηση και $U \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι μια ανοικτή περιοχή του $(0, 0)$.

(β) Έχουμε $F_x(x, y, z) = -2x$, $F_y(x, y, z) = -2y$ και όπως είδαμε $F_z(x, y, z) = 3z^2 + 1$. Υπολογίζουμε:

$$z_x(x, y) = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}_{z=z(x,y)} = -\frac{2x}{3z^2(x, y) + 1}, \quad z_y(x, y) = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}_{z=z(x,y)} = -\frac{2y}{3z^2(x, y) + 1}$$

και άρα

$$\begin{aligned} z_{xx}(x, y) &= \frac{2(3z^2(x, y) + 1) - 2x \cdot 6z(x, y)z_x(x, y)}{(3z^2 + 1)^2} \\ z_{yy}(x, y) &= \frac{2(3z^2(x, y) + 1) - 2y \cdot 6z(x, y)z_y(x, y)}{(3z^2(x, y) + 1)^2} \\ z_{xy}(x, y) &= \frac{-2x \cdot 6z(x, y)z_y(x, y)}{(3z^2(x, y) + 1)^2}. \end{aligned}$$

Άρα, επειδή $z(0, 0) = 1$, $z_x(0, 0) = z_y(0, 0) = 0$. Συνεπώς το $(0, 0)$ είναι κρίσιμο σημείο για την $z = z(x, y)$. Επιπλέον, $z_{xx}(0, 0) = z_{yy}(0, 0) = 8/16 = 1/2$ και $z_{xy}(0, 0) = 0$. Άρα, $z_{xx}(0, 0) > 0$ και $\Delta = z_{xx}(0, 0) \cdot z_{yy}(0, 0) - z_{xy}(0, 0)^2 = 1/4 > 0$ και άρα, από το κριτήριο δεύτερης μερικής παραγώγου, η $z(x, y)$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $(0, 0)$.

(β) Έχουμε

$$T_2(x, y) = z(0, 0) + z_x(0, 0)x + z_y(0, 0)y + \frac{1}{2}(z_{xx}(0, 0)x^2 + 2z_{xy}(0, 0)xy + z_{yy}(0, 0)y^2)$$

και άρα αντικαθιστώντας παίρνουμε

$$T_2(x, y) = 1 + \frac{1}{4}(x^2 + y^2).$$

Από το θεώρημα Taylor έχουμε

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{z(x, y) - T_2(x, y)}{x^2 + y^2} = 0$$

δηλαδή

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{z(x, y) - 1 - \frac{1}{4}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left[\frac{z(x, y) - 1}{x^2 + y^2} - \frac{1}{4} \right] = 0.$$

Συνεπώς, αφού $z(0, 0) = 1$,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{z(x, y) - z(0, 0)}{x^2 + y^2} = \frac{1}{4}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Διπλό ολοκλήρωμα

8.1 Διπλό ολοκλήρωμα σε ορθογώνιο

Ορισμός 8.1.1. Ορθογώνιο στον $\mathbb{R}^2$ είναι ένα σύνολο της μορφής

$$T = [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta]$$

όπου $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$. Δηλαδή,

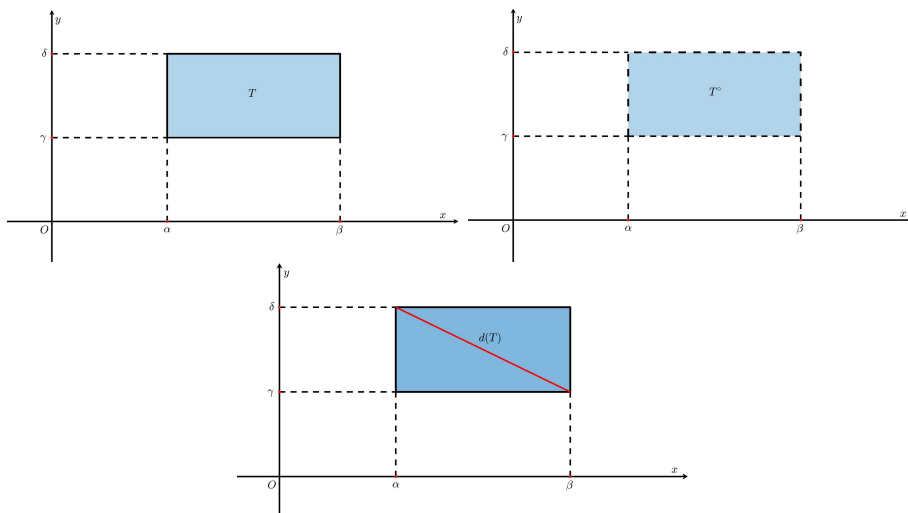
$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \leq x \leq \beta, \gamma \leq y \leq \delta\}.$$

Το εσωτερικό του T είναι το ανοικτό ορθογώνιο $T^\circ := (\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta)$. Συμβολίζουμε με $|T|$ το εμβαδόν του T (το οποίο είναι ίσο με το εμβαδόν του T°). Δηλαδή,

$$|T| = |T^\circ| = (\beta - \alpha)(\delta - \gamma).$$

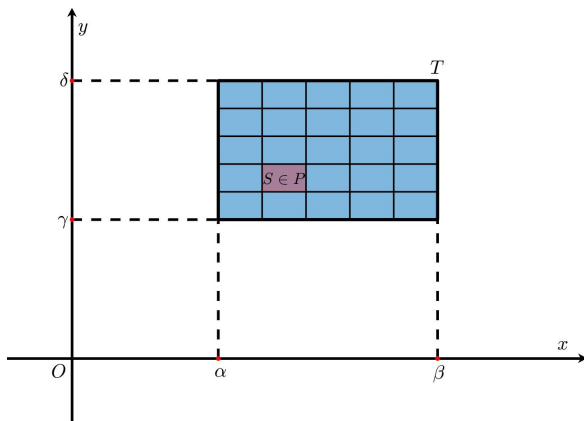
Η διάμετρος του T είναι η ποσότητα

$$d(T) = \sup\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in T\} = \sqrt{(\beta - \alpha)^2 + (\delta - \gamma)^2}.$$



Ορισμός 8.1.2. Διαμέριση ενός ορθογωνίου $T = [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta]$ είναι ένα σύνολο της μορφής $\mathcal{P} = \mathcal{P}^1 \times \mathcal{P}^2$, όπου $\mathcal{P}^1 = \{\alpha = x_0 < x_1 < \dots < x_n = \beta\}$ και $\mathcal{P}^2 = \{\gamma = y_0 < y_1 < \dots < y_m = \delta\}$ είναι διαμερίσεις των $[\alpha, \beta]$ και $[\gamma, \delta]$ αντίστοιχα. Κάθε τέτοια διαμέριση ορίζει ένα πεπερασμένο σύνολο ορθογωνίων $S_{i,j} := [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ που ανά δύο έχουν ξένα εσωτερικά και η ένωσή τους ισούται με το T . Για απλότητα θα γράφουμε $\sum_S$ εννοώντας άθροιση πάνω από όλα τα υποορθογώνια $S_{i,j}$ που ορίζει η $\mathcal{P}$. Παρατηρήστε ότι

$$\sum_S |S| = |T|.$$



Παράδειγμα 8.1.3. Θεωρούμε το τετράγωνο $T = [0, 1] \times [0, 1]$. Για κάθε $n \geq 1$ θεωρούμε τη διαμέριση

$$\mathcal{P}^{(n)} = \left\{ \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) : 0 \leq i, j \leq n \right\}$$

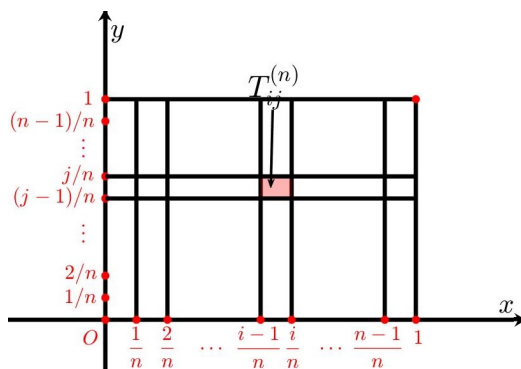
η οποία χωρίζει το T στα τετράγωνα

$$S_{i,j}^{(n)} = \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} \right] \times \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n} \right], \quad 0 \leq i, j \leq n-1$$

με ακμές μήκους $1/n$. Παρατηρήστε ότι

$$d(S_{i,j}^{(n)}) = \frac{\sqrt{2}}{n} \longrightarrow 0$$

καθώς το $n \rightarrow \infty$. Δηλαδή μπορούμε να ορίσουμε διαμερίσεις του T τέτοιες ώστε όλα τα υποορθογώνιά τους να έχουν αυθαίρετα μικρή διάμετρο.



Γενικότερα, αν $T = [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta]$ είναι τυχόν ορθογώνιο, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε διαμέριση $\mathcal{P}$ του T τέτοια ώστε $d(S) < \varepsilon$ για κάθε υποορθογώνιο που προκύπτει από την $\mathcal{P}$. Αρκεί, για μεγάλο n , να θεωρήσουμε τα σημεία

$$\left(\alpha + k \frac{\beta - \alpha}{n}, \gamma + s \frac{\delta - \gamma}{n} \right), \quad 0 \leq k, s \leq n.$$

Το σύνολο αυτών των σημείων είναι διαμέριση του T και κάθε υποορθογώνιο S που προκύπτει από αυτήν την διαμέριση έχει ακμές ίσες με $\frac{\beta - \alpha}{n}$ και $\frac{\delta - \gamma}{n}$, οπότε

$$d(S) = \frac{\sqrt{(\beta - \alpha)^2 + (\delta - \gamma)^2}}{n} \rightarrow 0$$

καθώς το $n \rightarrow \infty$.

Έστω $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και $\mathcal{P}$ μια διαμέριση του T . Το άνω άθροισμα της f που αντιστοιχεί στη διαμέριση $\mathcal{P}$ είναι το

$$U(f, \mathcal{P}) = \sum_S |S| \sup_S f$$

και το κάτω άθροισμα της f που αντιστοιχεί στη διαμέριση $\mathcal{P}$ είναι το

$$L(f, \mathcal{P}) = \sum_S |S| \inf_S f$$

όπου τα αθροίσματα είναι πάνω από όλα τα υποορθογώνια S που ορίζει η $\mathcal{P}$.

Αν $\mathcal{P}$ και $\mathcal{Q}$ είναι δύο διαμερίσεις του ορθογωνίου T τότε λέμε ότι η $\mathcal{Q}$ είναι εκλέπτυνση της $\mathcal{P}$ αν $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{Q}$. Παρατηρήστε ότι τότε κάθε υποορθογώνιο S που ορίζει η $\mathcal{P}$ γράφεται ως ένωση μη επικαλυπτόμενων υποορθογωνίων $S'_1, \dots, S'_m$ που ορίζει η $\mathcal{Q}$. Τότε

$$\sup_S f \geq \sup_{S'_j} f$$

για κάθε $j = 1, \dots, m$ και

$$|S| = |S'_1| + \dots + |S'_m|,$$

άρα

$$|S| \sup_S f \geq |S'_1| \sup_{S'_1} f + \dots + |S'_m| \sup_{S'_m} f$$

και αθροίζοντας ως προς S βλέπουμε ότι

$$U(f, \mathcal{P}) \geq U(f, \mathcal{Q}).$$

Ομοίως,

$$|S| \inf_S f \leq |S'_1| \inf_{S'_1} f + \dots + |S'_m| \inf_{S'_m} f$$

και αθροίζοντας ως προς S βλέπουμε ότι

$$L(f, \mathcal{P}) \leq L(f, \mathcal{Q}).$$

Συνοψίζουμε στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 8.1.4. Έστω T ορθογώνιο και $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Αν $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ είναι διαμερίσεις του T και η $\mathcal{Q}$ είναι εκλέπτυνση της $\mathcal{P}$ τότε

$$L(f, \mathcal{P}) \leq L(f, \mathcal{Q}) \leq U(f, \mathcal{Q}) \leq U(f, \mathcal{P}).$$

Από την Πρόταση 8.1.4, θεωρώντας τυχούσες διαμερίσεις $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ του T και την κοινή τους εκλέπτυνση $\mathcal{Q} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$, παίρνουμε άμεσα την εξής.

Πρόταση 8.1.5. Έστω T ορθογώνιο και $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Αν $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ είναι τυχούσες διαμερίσεις του T τότε

$$L(f, \mathcal{P}_1) \leq U(f, \mathcal{P}_2).$$

Η Πρόταση 8.1.5 μας λέει ότι οποιοδήποτε άνω άθροισμα της f είναι μικρότερο ή ίσο από οποιοδήποτε άνω άθροισμα της f . Βασιζόμενοι σε αυτήν την παρατήρηση δίνουμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 8.1.6. Έστω T ορθογώνιο και $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Ορίζουμε το κάτω ολοκλήρωμα της f στο T θέτοντας

$$L - \iint_T f = \sup \{L(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ διαμέριση του } T\}$$

και το άνω ολοκλήρωμα της f στο T θέτοντας

$$U - \iint_T f = \inf \{U(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ διαμέριση του } T\}.$$

Από την Πρόταση 8.1.5 βλέπουμε ότι

$$L - \iint_T f \leq U - \iint_T f.$$

Ορισμός 8.1.7. Έστω T ορθογώνιο και $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη. Η f λέγεται ολοκληρώσιμη στο T αν υπάρχει $I \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε

$$L - \iint_T f = U - \iint_T f = I.$$

Σε αυτή την περίπτωση γράφουμε

$$\iint_T f = \iint_T f(x, y) dx dy = I.$$

Ο I είναι το διπλό ολοκλήρωμα της f στο T .

Παραδείγματα 8.1.8. (α) Έστω $f(x, y) = c \in \mathbb{R}$ για κάθε $(x, y) \in T$. Τότε, για κάθε διαμέριση $\mathcal{P}$ του T έχουμε

$$L(f, \mathcal{P}) = \sum_S |S| \inf_S f = c \sum_S |S| = c|T|$$

και όμοια

$$U(f, \mathcal{P}) = c|T|.$$

Δηλαδή, όλα τα κάτω και άνω αθροίσματα της f είναι ίσα με $c|T|$. Έπεται ότι

$$L - \iint_T f = U - \iint_T f = c|T|.$$

Άρα, η f είναι ολοκληρώσιμη στο T και

$$\iint_T f = c|T|.$$

(β) Θεωρούμε το ορθογώνιο $T = [0, 1] \times [0, 1]$ και τη συνάρτηση $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{αν } (x, y) \in (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \cap T, \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Η f είναι φραγμένη αλλά δεν είναι ολοκληρώσιμη. Πράγματι, αν $\mathcal{P}$ είναι μια διαμέριση του T και S οποιοδήποτε από τα υποορθογώνια που ορίζει, τότε λόγω της πυκνότητας των ρητών και των αρρήτων στο $[0, 1]$ το S περιέχει σημεία εντός και εκτός του $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, οπότε

$$\sup_S f = 1 \quad \text{και} \quad \inf_S f = 0.$$

Έπεται ότι

$$L(f, \mathcal{P}) = \sum_S |S| \sup_S f = \sum_S |S| = |T| = 1$$

και

$$L(f, \mathcal{P}) = \sum_S |S| \inf_S f = 0.$$

Αυτό δείχνει ότι

$$L - \iint_T f = 0 \quad \text{και} \quad U - \iint_T f = 1,$$

άρα η f δεν είναι ολοκληρώσιμη.

Πρόταση 8.1.9 (κριτήριο Riemann). Έστω T ορθογώνιο και $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

- (α) Η f είναι ολοκληρώσιμη στο T .
- (β) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση $\mathcal{P}$ του T τέτοια ώστε

$$U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) < \varepsilon.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι ακριβώς όμοια με αυτήν στην περίπτωση συναρτήσεων $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ μιας πραγματικής μεταβλητής. $\square$

Πρόταση 8.1.10. Έστω T ορθογώνιο και $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε, η f είναι ολοκληρώσιμη στο T .

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο Riemann. Έστω $\varepsilon > 0$. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο T , άρα υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, αν $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in T$ και $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta$ τότε

$$(8.1.1) \quad |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq \frac{\varepsilon}{|T|}.$$

Επιλέγουμε διαμέριση $\mathcal{P}$ του T τέτοια ώστε

$$(8.1.2) \quad d(S) = \sup\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in S\} < \delta$$

για κάθε υποορθογώνιο που ορίζει η $\mathcal{P}$. Θεωρούμε τυχόν υποορθογώνιο S . Αφού η f είναι συνεχής, υπάρχουν $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ τέτοια ώστε

$$\sup_S f = f(\mathbf{x}) \quad \text{και} \quad \inf_S f = f(\mathbf{y}).$$

Από τις (8.1.1) και (8.1.2) έχουμε ότι

$$(8.1.3) \quad \sup_S f - \inf_S f = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}) \leq \frac{\varepsilon}{|T|}.$$

Τώρα, παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) &= \sum_S |S| \sup_S f - \sum_S |S| \inf_S f = \sum_S |S| \left(\sup_S f - \inf_S f \right) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{|T|} \sum_S |S| = \frac{\varepsilon}{|T|} |T| = \varepsilon, \end{aligned}$$

και το ζητούμενο έπεται από το κριτήριο Riemann. $\square$

Χρησιμοποιώντας το κριτήριο Riemann μπορούμε επίσης να αποδείξουμε τις ακόλουθες βασικές ιδιότητες του διπλού ολοκληρώματος.

Πρόταση 8.1.11. Έστω T ορθογώνιο, $f, g : T \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε:

(α) Οι $\lambda f + \mu g$, $f \cdot g$ και $|f|$ είναι ολοκληρώσιμες.

(β) Το ολοκλήρωμα είναι γραμμικό:

$$\iint_T (\lambda f + \mu g) = \lambda \iint_T f + \mu \iint_T g.$$

(γ) Εάν $f \leq g$ στο T , τότε

$$\iint_T f \leq \iint_T g.$$

(δ) Ισχύει η ανισότητα

$$\left| \iint_T f \right| \leq \iint_T |f|.$$

Θεώρημα 8.1.12 (θεώρημα Fubini). Έστω $T = [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta]$ και $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

(α) Η f είναι ολοκληρώσιμη.

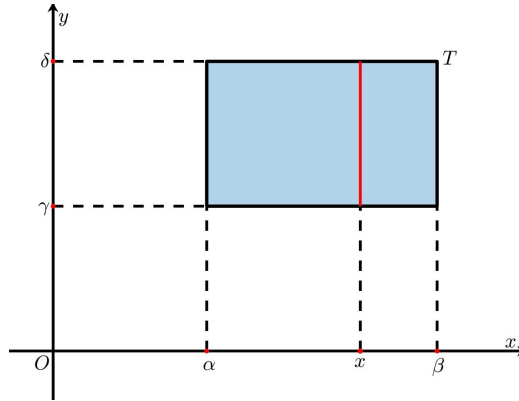
(β) Για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ η συνάρτηση $f_x : [\gamma, \delta]$ με $f_x(y) = f(x, y)$ είναι ολοκληρώσιμη.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$F(x) = \int_{\gamma}^{\delta} f_x(y) dy = \int_{\gamma}^{\delta} f(x, y) dy.$$

Τότε, η F είναι ολοκληρώσιμη και

$$\iint_T f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} F(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_{\gamma}^{\delta} f(x, y) dy \right] dx.$$



Πόρισμα 8.1.13. Έστω $T = [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta]$ και $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ όπως στο Θεώρημα 8.1.12. Υποθέτουμε επιπλέον ότι για κάθε $y \in [\gamma, \delta]$ η συνάρτηση $f^y : [\alpha, \beta]$ με $f^y(x) = f(x, y)$ είναι ολοκληρώσιμη. Τότε,

$$\iint_T f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_{\gamma}^{\delta} f(x, y) dy \right] dx = \int_{\gamma}^{\delta} \left[\int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dx \right] dy.$$

Πόρισμα 8.1.14. Έστω $T = [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta]$ και $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε,

$$\iint_T f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_{\gamma}^{\delta} f(x, y) dy \right] dx = \int_{\gamma}^{\delta} \left[\int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dx \right] dy.$$

Τα δύο ολοκληρώματα στο Πόρισμα 8.1.13 και το Πόρισμα 8.1.14 καλούνται *επάλληλα* (ή *διαδοχικά*) ολοκληρώματα. Το επόμενο παράδειγμα δείχνει ότι αν η $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ δεν είναι ολοκληρώσιμη τότε ενδέχεται τα επάλληλα ολοκληρώματα (αν υπάρχουν) να είναι διαφορετικά.

Παράδειγμα 8.1.15. Θεωρούμε το ορθογώνιο $T = [0, 1] \times [0, 1]$ και τη συνάρτηση $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} & \text{αν } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{αν } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Παρατηρήστε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$. Αυτό δείχνει ότι η f δεν είναι φραγμένη, άρα η f δεν είναι ολοκληρώσιμη.

Υπολογίζουμε το

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \right] dx = \int_0^1 \frac{y}{x^2 + y^2} \Big|_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1} = \arctan x \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{4}$$

και το

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \right] dy = - \int_0^1 \frac{x}{x^2 + y^2} \Big|_{x=0}^{x=1} dy = - \int_0^1 \frac{dy}{y^2 + 1} = - \arctan y \Big|_{y=0}^{y=1} = -\frac{\pi}{4},$$

δηλαδή τα επάλληλα ολοκληρώματα υπάρχουν αλλά είναι διαφορετικά.

Παράδειγμα 8.1.16. Θεωρούμε το ορθογώνιο $T = [-1, 1] \times [-1, 1]$ και τη συνάρτηση $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{αν } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{αν } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Παρατηρήστε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$. Αυτό δείχνει ότι η f δεν είναι φραγμένη, άρα η f δεν είναι ολοκληρώσιμη.

Ελέγξτε ότι τα δύο επάλληλα ολοκληρώματα υπάρχουν. Επειδή οι συναρτήσεις

$$x \mapsto \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{και} \quad y \mapsto \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$$

είναι περιττές συναρτήσεις του x και του y αντίστοιχα, τα επάλληλα ολοκληρώματα είναι και τα δύο ίσα με μηδέν.

Παράδειγμα 8.1.17. Θεωρούμε το ορθογώνιο $T = [1, 2] \times [0, \pi]$ και τη συνάρτηση $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y) = y \sin(xy)$. Η f είναι συνεχής, οπότε εφαρμόζοντας το θεώρημα Fubini έχουμε

$$\begin{aligned} \iint_T f(x, y) dx dy &= \int_0^\pi \left[\int_1^2 y \sin(xy) dx \right] dy = - \int_0^\pi \cos(xy) \Big|_{x=1}^{x=2} dy \\ &= - \int_0^\pi (\cos(2y) - \cos(y)) dy = - \left(\frac{\sin(2y)}{2} - \sin y \right) \Big|_{y=0}^{y=\pi} = 0. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 8.1.18. Για κάθε $b > 0$ θεωρούμε το ορθογώνιο $T_b = [0, b] \times [0, b]$ και το ολοκλήρωμα

$$I_b = \iint_{T_b} e^{-xy} \sin x dx.$$

(α) Εκφράστε το ολοκλήρωμα I_b με δύο τρόπους.

(β) Παίρνοντας το $\lim_{b \rightarrow +\infty} I_b$, αποδείξτε ότι

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Γράφουμε αρχικά

$$(8.1.4) \quad I_b = \int_0^b \left[\int_0^b e^{-xy} dy \right] \sin x dx = - \int_0^b \frac{e^{-xy}}{x} \Big|_{y=0}^{y=b} \cdot \sin x dx = \int_0^b \frac{1 - e^{-bx}}{x} \sin x dx.$$

Έχουμε επίσης

$$I_b = \int_0^b \left[\int_0^b e^{-xy} \sin x dx \right] dy = \int_0^b J(y) dy$$

όπου

$$\begin{aligned} J(y) &= \int_0^b e^{-xy} \sin x dx = - \int_0^b e^{-xy} (\cos x)' dx = -e^{-xy} \cos x \Big|_{x=0}^x=b - y \int_0^b e^{-xy} \cos x dx \\ &= 1 - e^{-by} \cos b - y \int_0^b e^{-xy} (\sin x)' dx = 1 - e^{-by} \cos b - y e^{-xy} \sin x \Big|_{x=0}^x=b - y^2 \int_0^b e^{-xy} \sin x dx \\ &= 1 - e^{-by} (\cos b + y \sin b) - y^2 J(y), \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι

$$J(y) = \frac{1}{1+y^2} - \frac{e^{-by}(\cos b + y \sin b)}{1+y^2} = \frac{1}{1+y^2} - \varphi_b(y),$$

όπου

$$\varphi_b(y) = \frac{e^{-by}(\cos b + y \sin b)}{1+y^2}.$$

Συνεπώς,

$$(8.1.5) \quad I_b = \int_0^b \frac{dy}{1+y^2} - \int_0^b \varphi_b(y) dy = \arctan b - \int_0^b \varphi_b(y) dy.$$

Παρατηρούμε ότι, για κάθε $y \in [0, b]$,

$$|\varphi_b(y)| = \frac{e^{-by}}{1+y^2} |\cos b + y \sin b| \leq \frac{1+y}{1+y^2} e^{-by} \leq \frac{3}{2} e^{-by}.$$

Συνεπώς,

$$\left| \int_0^b \varphi_b(y) dy \right| \leq \frac{3}{2} \int_0^b e^{-by} dy = \frac{3}{2} \frac{1 - e^{-b^2}}{b} \rightarrow 0$$

καθώς το $b \rightarrow +\infty$, και από την (8.1.5) συμπεραίνουμε ότι

$$(8.1.6) \quad \lim_{b \rightarrow +\infty} I_b = \frac{\pi}{2}.$$

Ταυτόχρονα,

$$I_b = \int_0^b \frac{\sin x}{x} dx - \int_0^b \frac{e^{-bx}}{x} \sin x dx,$$

άρα

$$\left| I_b - \int_0^b \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq \int_0^b e^{-bx} \frac{|\sin x|}{x} dx \leq \int_0^b e^{-bx} dx = \frac{1 - e^{-b^2}}{b} \rightarrow 0$$

καθώς το $b \rightarrow +\infty$. Έπεται ότι

$$(8.1.7) \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} I_b.$$

Από τις (8.1.6) και (8.1.7) συμπεραίνουμε ότι

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

8.2 Σύνολα μέτρου 0 και θεώρημα Lebesgue σε ορθογώνια

Παράδειγμα 8.2.1. Θεωρούμε το τετράγωνο $T = [0, 1] \times [0, 1]$ και τη συνάρτηση $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \neq y, \\ 0 & \text{αν } x = y \end{cases}$$

Το σύνολο των σημείων του T στα οποία η f είναι ασυνεχής είναι το $\Delta = \{(x, x) : x \in [0, 1]\}$, το οποίο έχει «εμβαδόν» ίσο με 0. Αναμένουμε η f να είναι ολοκληρώσιμη, με ολοκλήρωμα

$$\iint_T f = \iint_T 1 = 1.$$

Για να το αποδείξουμε θα χρειαστούμε το παρακάτω.

Λήμμα 8.2.2. Έστω T ορθογώνιο και $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ακολουθία διαμερίσεων $\mathcal{P}^{(n)}$ του T τέτοια ώστε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [U(f, \mathcal{P}^{(n)}) - L(f, \mathcal{P}^{(n)})] = 0.$$

Τότε, η f είναι ολοκληρώσιμη και

$$\iint_T f = \lim_{n \rightarrow \infty} U(f, \mathcal{P}^{(n)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} L(f, \mathcal{P}^{(n)}).$$

Απόδειξη. Για κάθε $n \geq 1$ έχουμε

$$L(f, \mathcal{P}^{(n)}) \leq L - \iint_T f \leq U - \iint_T f \leq U(f, \mathcal{P}^{(n)}),$$

άρα

$$0 \leq L - \iint_T f - L(f, \mathcal{P}^{(n)}) \leq U - \iint_T f - L(f, \mathcal{P}^{(n)}) \leq U(f, \mathcal{P}^{(n)}) - L(f, \mathcal{P}^{(n)}) \rightarrow 0.$$

Από το κριτήριο παρεμβολής έπεται ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(f, \mathcal{P}^{(n)}) = L - \iint_T f = U - \iint_T f.$$

Άρα, η f είναι ολοκληρώσιμη και

$$\iint_T f = \lim_{n \rightarrow \infty} L(f, \mathcal{P}^{(n)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} U(f, \mathcal{P}^{(n)}).$$

□

Επιστρέφουμε στο Παράδειγμα 8.2.1. Για κάθε $n \geq 1$ θεωρούμε τη διαμέριση $\mathcal{P}^{(n)}$ του T που ορίζει τα υποορθογώνια

$$S_{ij}^{(n)} = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right] \times \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n} \right], \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Παρατηρούμε ότι, προφανώς, κανένα από τα $S_{ij}^{(n)}$ δεν περιέχεται στο Δ , δηλαδή υπάρχει $(x, y) \in S_{ij}^{(n)}$ με $x \neq y$, για το οποίο $f(x, y) = 1$ και συνεπώς $\sup_{S_{ij}^{(n)}} f = 1$. Έτσι,

$$U(f, \mathcal{P}^{(n)}) = \sum_{i,j} |S_{ij}^{(n)}| = |T| = 1.$$

Θέτουμε

$$J = \{(i, j) : S_{ij}^{(n)} \cap \Delta \neq \emptyset\}$$

και παρατηρούμε ότι $\inf_{S_{ij}^{(n)}} f = 0$ αν $(i, j) \in J$ και $\inf_{S_{ij}^{(n)}} f = 1$ αν $(i, j) \notin J$.

Παρατηρούμε επίσης ότι $(i, j) \in J$ αν και μόνο αν $|i - j| \leq 1$, δηλαδή αν $i = j$ ή $i = j + 1$ ή $j = i + 1$ (εξηγήστε γιατί). Συνεπώς, το πλήθος των ορθογωνίων $S_{ij}^{(n)}$ για τα οποία $(i, j) \in I$ είναι ίσο με $3n - 2$, και άρα

$$L(f, \mathcal{P}^{(n)}) = \sum_{(i,j) \notin J} |S_{ij}^{(n)}| = (n^2 - 3n + 2) \cdot \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}.$$

Έπεται ότι

$$U(f, \mathcal{P}^{(n)}) - L(f, \mathcal{P}^{(n)}) = \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2} \rightarrow 0.$$

Από το Λήμμα 8.2.2 η f είναι ολοκληρώσιμη και

$$\iint_T f = \lim_{n \rightarrow \infty} U(f, \mathcal{P}^{(n)}) = 1.$$

Ερωτήματα 8.2.3. (α) Πώς θα μπορούσαμε να ορίσουμε την έννοια του «συνόλου με εμβαδόν 0»;

(β) Εάν το σύνολο των σημείων ασυνέχειας μιας φραγμένης συνάρτησης $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ έχει εμβαδόν 0, είναι τότε σωστό ότι η f είναι ολοκληρώσιμη;

Στο προηγούμενο παράδειγμα, το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f είναι το

$$\Delta = \{(x, x) : x \in [0, 1]\}.$$

Παρατηρούμε ότι, για κάθε $n \geq 1$,

$$\Delta \subseteq \bigcup_{i=1}^n T_{ii}^{(n)} = \bigcup_{i=1}^n \left[\frac{i-1}{n}, \frac{1}{n} \right] \times \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right]$$

και

$$\sum_{i=1}^n |T_{ii}^{(n)}| = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

καθώς το $n \rightarrow \infty$. Δηλαδή, μπορούμε να καλύψουμε το Δ από πεπερασμένο πλήθος ορθογωνίων με συνολικό εμβαδόν «οσοδήποτε μικρό».

Ορισμός 8.2.4. Έστω $A \subset \mathbb{R}^2$. Λέμε ότι το A έχει μέτρο 0 αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ακολουθία ορθογωνίων $\{T^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ τέτοια ώστε

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty T^{(n)} \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^\infty |T^{(n)}| < \varepsilon.$$

Αν το A έχει μέτρο 0 θα γράφουμε

$$|A| = 0.$$

Παραδείγματα 8.2.5. (α) Κάθε αριθμήσιμο $A \subset \mathbb{R}^2$ έχει μέτρο 0. Πράγματι, έστω

$$A = \{(x_n, y_n) : n \geq 1\}$$

και έστω $\varepsilon > 0$. Θέτουμε

$$T^{(n)} = \left[x_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+3}}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+3}} \right] \times [y_n - 1, y_n + 1]$$

για κάθε $n \geq 1$. Τότε η ένωση των $T^{(n)}$ καλύπτει το A και

$$\sum_{n=1}^{\infty} |T^{(n)}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} \cdot 2 = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Άρα, $|A| = 0$. Ειδικότερα, το $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ (ως αριθμήσιμο σύνολο) έχει μέτρο 0.

(β) Εάν $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση τότε το $\text{Gr}(\varphi) = \{(x, \varphi(x)) : x \in [a, b]\}$ έχει μέτρο 0. Πράγματι, για τυχόν $\varepsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ του $[a, b]$ τέτοια ώστε

$$\sum_{i=1}^n |I_i|(M_i - m_i) < \varepsilon,$$

όπου $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, $|I_i|$ είναι το μήκος του I_i και $M_i = \sup_{I_i} \varphi$, $m_i = \inf_{I_i} \varphi$. Αν θέσουμε $T_i = I_i \times [m_i, M_i]$, $1 \leq i \leq n$ τότε

$$\text{Gr}(\varphi) \subseteq \bigcup_{i=1}^n T_i \quad \text{και} \quad \sum_{i=1}^n |T_i| = \sum_{i=1}^n |I_i|(M_i - m_i) < \varepsilon.$$

(γ) Κάθε ευθεία ή ευθύγραμμο τμήμα στον $\mathbb{R}^2$ έχει μέτρο 0.

(δ) Η καμπύλη που ορίζεται ως η ένωση του ημικυκλίου $\{(x, \sqrt{1-x^2}) : x \in [-1, 1]\}$ και του ευθύγραμμου τμήματος $\{(x, 0) : x \in [-1, 1]\}$ έχει μέτρο 0.

Πρόταση 8.2.6. (α) Εάν $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^2$ και $|B| = 0$ τότε $|A| = 0$.

(β) Εάν $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία υποσυνόλων του $\mathbb{R}^2$ με $|A_n| = 0$ για κάθε $n \geq 1$, τότε

$$\left| \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right| = 0.$$

Απόδειξη. (α) Προκύπτει άμεσα από τον Ορισμό 8.2.4.

(β) Έστω $\varepsilon > 0$. Για κάθε $n \geq 1$ μπορούμε να βρούμε ακολουθία ορθογωνίων $\{T^{n,m}\}_{m=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε

$$A_n \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} T^{n,m} \quad \text{και} \quad \sum_{m=1}^{\infty} |T^{n,m}| < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Τότε,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n,m=1}^{\infty} T^{n,m}$$

και

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} |T^{n,m}| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} |T^{n,m}| \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

□

Παραδείγματα 8.2.7. (α) Ισχύει ότι $|\mathbb{Q} \times \mathbb{R}| = 0$. Πράγματι, αν θεωρήσουμε μια αρίθμηση $\mathbb{Q} = \{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ του $\mathbb{Q}$ τότε

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\{q_n\} \times \mathbb{R}).$$

Κάθε σύνολο $\{q_n\} \times \mathbb{R}$ είναι ευθεία του επιπέδου, άρα έχει μέτρο 0. Από την Πρόταση 8.2.6 έπεται ότι $|\mathbb{Q} \times \mathbb{R}| = 0$.

(β) Εάν $n \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση, τότε

$$|\text{Gr}(\varphi)| = 0.$$

Πράγματι,

$$\text{Gr}(\varphi) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{Gr}(\varphi|_{[-n,n]})$$

και κάθε σύνολο $\text{Gr}(\varphi|_{[-n,n]})$ έχει μέτρο 0. Από την Πρόταση 8.2.6 έπεται ότι $|\text{Gr}(\varphi)| = 0$.

Θεώρημα 8.2.8 (θεώρημα Lebesgue). Έστω $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη και

$$\mathcal{A}(f) = \{x \in T : n f \text{ είναι ασυνεχής στο } x\}.$$

Τότε, $n f$ είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν $|\mathcal{A}(f)| = 0$.

Θεώρημα 8.2.9. Έστω $f, g : T \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι το σύνολο

$$\{x \in T : f(x) \neq g(x)\}$$

έχει μέτρο 0. Τότε,

$$\iint_T f = \iint_T g.$$

Παραδείγματα 8.2.10. (α) Θεωρούμε το τετράγωνο $T = [0, 1] \times [0, 1]$ και τη συνάρτηση $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x, y) = \begin{cases} x & \text{αν } x^2 + y^2 \neq 1, \\ e^{y^3} & \text{αν } x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι $\mathcal{A}(f) \subseteq \{(x, y) \in T : x^2 + y^2 = 1\}$, και το σύνολο δεξιά έχει μέτρο 0 ως λεία καμπύλη. Άρα, $|\mathcal{A}(f)| = 0$ και συμπεραίνουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη.

Επίσης,

$$\{(x, y) \in T : f(x, y) \neq x\} \subseteq \{(x, y) \in T : x^2 + y^2 = 1\}$$

και η $g(x, y) = x$ είναι συνεχής, άρα ολοκληρώσιμη. Από το Θεώρημα 8.2.9 συμπεραίνουμε ότι

$$\iint_T f = \iint_T x \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 x \, dx \right) dy = \frac{1}{2}.$$

(β) Θεωρούμε το τετράγωνο $T = [0, 1] \times [0, 1]$ και τη συνάρτηση $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{αν } y \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{αν } y \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι $\mathcal{A}(f) = [0, 1] \times [0, 1]$. Αφού $|\mathcal{A}(f)| > 0$, η f δεν είναι ολοκληρώσιμη.

Επίσης, το σύνολο

$$\{(x, y) \in T : f(x, y) \neq 0\} \subseteq \{(x, y) \in T : y \in \mathbb{Q}\}$$

έχει μέτρο 0 και η $g(x, y) = 0$ είναι συνεχής, άρα ολοκληρώσιμη. Το παράδειγμα αυτό δείχνει ότι για να εφαρμοστεί το Θεώρημα 8.2.9 πρέπει και οι δύο συναρτήσεις f, g να είναι ολοκληρώσιμες.

(γ) Θεωρούμε το τετράγωνο $T = [0, 1] \times [0, 1]$ και τη συνάρτηση $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x, y) = \begin{cases} 2xy & \text{αν } y \in \mathbb{Q}, \\ y & \text{αν } y \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι αν η f είναι συνεχής σε κάποιο $(x_0, y_0) \in T$ θα πρέπει να ισχύει ότι $2x_0y_0 = y_0$ (εξηγήστε γιατί) δηλαδή $x_0 = \frac{1}{2}$ ή $y_0 = 0$. Αυτό σημαίνει, για παράδειγμα, ότι

$$\mathcal{A}(f) \supseteq [0, \frac{1}{3}] \times (0, 1],$$

άρα το $\mathcal{A}(f)$ έχει θετικό μέτρο. Από το θεώρημα Lebesgue έπεται ότι η f δεν είναι ολοκληρώσιμη. Παρατηρούμε επίσης ότι, για κάθε $y \in [0, 1]$ η $x \mapsto f(x, y)$ είναι συνεχής (εξηγήστε γιατί) και

$$\int_0^1 f(x, y) dx = y,$$

άρα

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy = \frac{1}{2}.$$

Δηλαδή, παρόλο που η f δεν είναι ολοκληρώσιμη, το ένα επάλληλο ολοκλήρωμα της f υπάρχει.

8.3 Διπλό ολοκλήρωμα πάνω σε φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$

Υπενθυμίζουμε αρχικά κάποιους ορισμούς από το πρώτο κεφάλαιο.

Ορισμός 8.3.1. Έστω A υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.

(α) Ένα σημείο $\mathbf{x}_0 \in A$ καλείται εσωτερικό σημείο του A αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$B(\mathbf{x}_0, \delta) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \delta\} \subseteq A.$$

Το σύνολο των εσωτερικών σημείων του A συμβολίζεται με A° ή $\text{int}(A)$.

(β) Το A καλείται ανοικτό αν $A^\circ = A$.

(γ) Το A καλείται κλειστό αν το $A^c = \mathbb{R}^2 \setminus A$ είναι ανοικτό.

Παραδείγματα 8.3.2. (α) Αν $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ είναι ο κλειστός μοναδιαίος δίσκος τότε το B είναι κλειστό σύνολο και $B^\circ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.

(β) Για κάθε $S \subseteq \mathbb{R}^2$ το σύνολο S° είναι ανοικτό.

(γ) Το ημιεπίπεδο $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < x\}$ είναι ανοικτό.

Ορισμός 8.3.3. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$. Το $\mathbf{x}_0$ καλείται συνοριακό σημείο του A αν για κάθε $\delta > 0$ έχουμε ότι

$$B(\mathbf{x}_0, \delta) \cap A \neq \emptyset \quad \text{και} \quad B(\mathbf{x}_0, \delta) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus A) \neq \emptyset.$$

Το σύνολο των συνοριακών σημείων του A συμβολίζεται με ∂A .

Παραδείγματα 8.3.4. (α) Αν $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ τότε $\partial B = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$.

(β) Αν $A = \{(x, y) : y < x\}$ τότε $\partial A = \{(x, y) : y = x\}$.

Ορισμός 8.3.5. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Η κλειστή θήκη του A είναι το σύνολο

$$\bar{A} = A^\circ \cup \partial A.$$

Για παράδειγμα, αν $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ τότε $\bar{B} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Πρόταση 8.3.6. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Τότε, $A \subseteq \bar{A}$ και $A = \bar{A}$ αν και μόνο αν το A είναι κλειστό.

Επίσης, αν $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(α) $\mathbf{x}_0 \in \bar{A}$.

(β) Για κάθε $\delta > 0$ ισχύει ότι $B(\mathbf{x}_0, \delta) \cap A \neq \emptyset$.

(γ) Υπάρχει ακολουθία $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 1}$ στο A τέτοια ώστε $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\| \rightarrow 0$ καθώς το $n \rightarrow \infty$.

Παράδειγμα 8.3.7. Έστω $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Το σύνολο

$$A = \{(x, y) : x \in [a, b], y \leq \varphi(x)\}$$

είναι κλειστό. Πράγματι, από την Πρόταση 8.3.6 αρκεί να δείξουμε ότι $\bar{A} = A$. Έστω $(x_0, y_0) \in \bar{A}$. Από την Πρόταση 8.3.6 υπάρχει ακολουθία $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^\infty$ στο A τέτοια ώστε $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$, δηλαδή

$$a \leq x_n \leq b, \quad y_n \leq \varphi(x_n), \quad x_n \rightarrow x_0, \quad y_n \rightarrow y_0.$$

Τότε, $x_0 \in [a, b]$ και λόγω συνέχειας της φ στο x_0 έχουμε $\varphi(x_n) \rightarrow \varphi(x_0)$. Αφού $y_n \rightarrow y_0$ και $y_n \leq \varphi(x_n)$, συμπεραίνουμε ότι $y_0 \leq \varphi(x_0)$. Δηλαδή, $(x_0, y_0) \in A$.

Πρόταση 8.3.8. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{αν } \mathbf{x} \in A, \\ 0 & \text{αν } \mathbf{x} \notin A \end{cases}$$

(α) Αν $n \tilde{f}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0 \in A$ τότε $n f$ είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$.

(β) Αν $n f$ είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0 \in A \setminus \partial A$ τότε $n \tilde{f}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$.

(γ) Ισχύει ότι

$$\mathcal{A}(f) \subseteq \mathcal{A}(\tilde{f}) \subseteq \mathcal{A}(f) \cup \partial A,$$

όπου

$$\mathcal{A}(f) = \{\mathbf{x} \in A : n f \text{ είναι ασυνεχής στο } \mathbf{x}\}.$$

και

$$\mathcal{A}(\tilde{f}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : n \tilde{f} \text{ είναι ασυνεχής στο } \mathbf{x}\}.$$

Απόδειξη. (α) Έστω $(\mathbf{x}_n)$ στο A με $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}_0$. Αφού $n \tilde{f}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$, ισχύει ότι $\tilde{f}(\mathbf{x}_n) \rightarrow \tilde{f}(\mathbf{x}_0)$, δηλαδή $f(\mathbf{x}_n) \rightarrow f(\mathbf{x}_0)$.

(β) Αν $\mathbf{x}_0 \in A \setminus \partial A$ τότε $\mathbf{x}_0 \in A^\circ$. Το A° είναι ανοικτό και $n \tilde{f}|_{A^\circ} = f|_{A^\circ}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$, άρα $n \tilde{f}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$.

(γ) Έστω $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{A}(\tilde{f}) \setminus \partial A$. Υποθέτουμε ότι $\mathbf{x}_0 \notin A$. Τότε, $\mathbf{x}_0 \notin A \cup \partial A = \bar{A}$. Από την Πρόταση 8.3.6 υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $B(\mathbf{x}_0, \delta) \cap A = \emptyset$. Δηλαδή, $\mathbf{x}_0 \in V := (\mathbb{R}^2 \setminus A)^\circ$. Η $\tilde{f}|_V = 0$ είναι συνεχής, άρα η $\tilde{f}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$ και καταλήγουμε σε άτοπο.

Έχουμε λοιπόν $\mathbf{x}_0 \in A \setminus \partial A$ και από το (β) συμπεραίνουμε ότι $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{A}(f)$.

Είδαμε ότι $\mathcal{A}(\tilde{f}) \setminus \partial A \subseteq \mathcal{A}(f)$, άρα $\mathcal{A}(\tilde{f}) \subseteq \mathcal{A}(f) \cup \partial A$. □

Τέλος, θα χρειαστούμε κάποιες επιπλέον ιδιότητες του διπλού ολοκληρώματος πάνω σε ορθογώνια.

Πρόταση 8.3.9. Έστω T_1, T_2 ορθογώνια με $T_1^\circ \cap T_2^\circ \neq \emptyset$. Τότε το $T_1 \cap T_2$ είναι ορθογώνιο.

Πρόταση 8.3.10. Έστω T_1, T_2 ορθογώνια με $T_2 \subseteq T_1$ και $f : T_1 \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη. Τότε, η $f|_{T_2} : T_2 \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη.

Πρόταση 8.3.11. Έστω $T, T_1, \dots, T_n$ ορθογώνια τέτοια ώστε $T_i^\circ \cap T_j^\circ = \emptyset$ για κάθε $i \neq j$ και

$$T = \bigcup_{j=1}^n T_j.$$

Έστω $f : T \rightarrow \mathbb{R}$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(α) Η f είναι ολοκληρώσιμη στο T .

(β) Η f είναι ολοκληρώσιμη στα $T_1, \dots, T_n$.

Σε αυτήν την περίπτωση,

$$\iint_T f = \sum_{j=1}^n \iint_{T_j} f.$$

Ορισμός 8.3.12. Έστω A μη κενό, φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και T ορθογώνιο με $A \subset T^\circ$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{αν } (x, y) \in A, \\ 0 & \text{αν } (x, y) \notin A \end{cases}$$

Θα λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο A αν η $\tilde{f}$ είναι ολοκληρώσιμη στο T .

Σε αυτήν την περίπτωση ορίζουμε

$$\iint_A f = \iint_T \tilde{f}.$$

Ο ορισμός είναι ανεξάρτητος από την επιλογή του ορθογωνίου T με $A \subseteq T^\circ$. Πράγματι, έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ φραγμένο μη κενό σύνολο και T_1, T_2 ορθογώνια τέτοια ώστε $A \subseteq (T_1)^\circ$ και $A \subseteq (T_2)^\circ$. Υποθέτουμε ότι η $\tilde{f}$ είναι ολοκληρώσιμη στο T_1 . Από την Πρόταση 8.3.9 το $T_1 \cap T_2$ είναι ορθογώνιο που περιέχεται στο T , άρα η $\tilde{f}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $T_1 \cap T_2$.

Το $T_2 \setminus T_1$ είναι η ένωση δύο (ενδεχομένως κενών) ορθογωνίων $S_{2,1}, S_{2,2}$ και το $T_1 \setminus T_2$ είναι η ένωση δύο (ενδεχομένως κενών) ορθογωνίων $S_{1,1}, S_{1,2}$. Έχουμε

$$\tilde{f}|_{S_{2,1}} = \tilde{f}|_{S_{2,2}} = 0$$

άρα η $\tilde{f}$ είναι ολοκληρώσιμη στα $S_{2,1}, S_{2,2}$. Αφού $T_2 = (T_1 \cap T_2) \cup S_{2,1} \cup S_{2,2}$ και αυτά τα τρία ορθογώνια είναι μη επικαλυπτόμενα, από την Πρόταση 8.3.11 συμπεραίνουμε ότι η $\tilde{f}$ είναι ολοκληρώσιμη στο T_2

και

$$\iint_{T_2} \tilde{f} = \iint_{T_1 \cap T_2} \tilde{f} + \iint_{S_{2,1}} \tilde{f} + \iint_{S_{2,2}} \tilde{f} = \iint_{T_1 \cap T_2} \tilde{f}.$$

Αφού $T_1 = (T_1 \cap T_2) \cup S_{1,1} \cup S_{1,2}$ και

$$\tilde{f}|_{S_{1,1}} = \tilde{f}|_{S_{1,2}} = 0,$$

συμπεραίνουμε όμοια ότι

$$\iint_{T_1} \tilde{f} = \iint_{T_1 \cap T_2} \tilde{f} + \iint_{S_{1,1}} \tilde{f} + \iint_{S_{1,2}} \tilde{f} = \iint_{T_1 \cap T_2} \tilde{f} = \iint_{T_2} \tilde{f}.$$

Με βάση τον Ορισμό 8.3.12 ενδέχεται για κάποιο φραγμένο σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^2$ οι σταθερές συναρτήσεις να μην είναι ολοκληρώσιμες στο A .

Παράδειγμα 8.3.13. Έστω A φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ τέτοιο ώστε το ∂A να μην έχει μέτρο 0. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y) = 1$ για κάθε $(x, y) \in A$. Θεωρούμε επίσης ορθογώνιο T με $A \subset T^\circ$ και τη συνάρτηση $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{αν } (x, y) \in A, \\ 0 & \text{αν } (x, y) \notin A \end{cases}$$

Τότε η $\tilde{f}|_T$ είναι ασυνεχής σε κάθε σημείο του ∂A (εξηγήστε γιατί). Αφού $\partial A \subseteq \mathcal{A}(\tilde{f}|_T)$, το $\mathcal{A}(\tilde{f}|_T)$ δεν έχει μέτρο 0, και από το θεώρημα Lebesgue για ορθογώνια η $\tilde{f}|_T$ δεν είναι ολοκληρώσιμη, δηλαδή η $f \equiv 1$ δεν είναι ολοκληρώσιμη.

Για να αποφύγουμε τέτοιες καταστάσεις δουλεύουμε με σύνολα A για τα οποία $|\partial A| = 0$.

Ορισμός 8.3.14. Ένα φραγμένο σύνολο $A \subset \mathbb{R}^2$ λέγεται Jordan μετρήσιμο αν $|\partial A| = 0$.

Θεώρημα 8.3.15 (γενικό θεώρημα Lebesgue). Έστω A φραγμένο Jordan μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Τότε, η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν $|\mathcal{A}(f)| = 0$, όπου

$$\mathcal{A}(f) = \{x \in A : \text{η } f \text{ είναι ασυνεχής στο } x\}.$$

Απόδειξη. Έστω T ορθογώνιο με $A \subset T^\circ$ και $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση με

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{αν } (x, y) \in A, \\ 0 & \text{αν } (x, y) \notin A \end{cases}$$

Υποθέτουμε ότι $|\mathcal{A}(f)| = 0$. Από την Πρόταση 8.3.8 έχουμε

$$\mathcal{A}(\tilde{f}|_T) \subseteq \mathcal{A}(f) \cup \partial A.$$

Αφού $|\mathcal{A}(f)| = |\partial A| = 0$ και $|\mathcal{A}(f)| = |\partial A| = 0$, έπεται ότι $|\mathcal{A}(\tilde{f}|_T)| = 0$ και από το θεώρημα Lebesgue για ορθογώνια συμπεραίνουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο A .

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο A . Τότε, η $\tilde{f}|_T$ είναι ολοκληρώσιμη στο T και από το θεώρημα Lebesgue για ορθογώνια έχουμε $|\mathcal{A}(\tilde{f}|_T)| = 0$. Όμως, από την Πρόταση 8.3.8 έχουμε ότι $\mathcal{A}(f) \subseteq \mathcal{A}(\tilde{f}|_T)$, άρα $|\mathcal{A}(f)| = 0$. $\square$

Πόρισμα 8.3.16. Έστω A μη κενό, φραγμένο Jordan μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη και συνεχής συνάρτηση. Τότε, η f είναι ολοκληρώσιμη.

Ειδικότερα, αν A είναι ένα μη κενό, κλειστό και φραγμένο Jordan μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια φραγμένη και συνεχής συνάρτηση, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη.

Ορισμός 8.3.17. Έστω A μη κενό, φραγμένο Jordan μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Ορίζουμε ως εμβαδόν του A το ολοκλήρωμα

$$|A| = \iint_A 1 \, dx \, dy.$$

Οι ιδιότητες των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων πάνω σε ορθογώνια, επεκτείνονται στις ολοκληρώσιμες συναρτήσεις πάνω σε φραγμένα χωρία.

Πρόταση 8.3.18. Έστω A μη κενό, φραγμένο Jordan μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε το σύνολο $\{x \in A : f(x) \neq g(x)\}$ να έχει μέτρο 0. Τότε,

$$\iint_A f = \iint_A g.$$

Απόδειξη. Έστω T ορθογώνιο με $A \subseteq T^\circ$ και $\tilde{f}, \tilde{g} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $\tilde{f}|_A = f$, $\tilde{g}|_A = g$ και $\tilde{f} = \tilde{g} = 0$ στο $\mathbb{R}^2 \setminus A$. Τότε, το σύνολο

$$\{x \in T : \tilde{f}(x) \neq \tilde{g}(x)\} \subseteq \{x \in A : f(x) \neq g(x)\}$$

έχει μέτρο 0. Από το Θεώρημα 8.2.9 έχουμε ότι

$$\iint_T \tilde{f} = \iint_T \tilde{g},$$

άρα

$$\iint_A f = \iint_A g.$$

□

Παράδειγμα 8.3.19. Θεωρούμε το χωρίο $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ και τη συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \neq y, \\ e^{y^3} & \text{αν } x = y \end{cases}$$

Το A είναι Jordan μετρήσιμο διότι ο κύκλος ∂A έχει μέτρο 0. Επίσης, το σύνολο

$$\{(x, y) \in A : f(x, y) \neq 1\} \subseteq \{(x, y) \in A : y = x\}$$

έχει μέτρο 0, και όμοια το $\mathcal{A}(f) \subseteq \{(x, y) \in A : x = y\}$ έχει μέτρο 0. Από το Θεώρημα 8.3.15 η f είναι ολοκληρώσιμη και από την Πρόταση 8.3.17 έχουμε ότι

$$\iint_A f = \iint_A 1 = \pi,$$

το εμβαδόν του A .

Πρόταση 8.3.20. Έστω A_1, A_2 μη κενά, φραγμένα και Jordan μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ με $A_1^\circ \cap A_2^\circ = \emptyset$ και $f : A = A_1 \cup A_2 \rightarrow \mathbb{R}$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(α) $H f$ είναι ολοκληρώσιμη στο A .

(β) $H f$ είναι ολοκληρώσιμη στα A_1, A_2 .

Σε αυτήν την περίπτωση,

$$\iint_A f = \iint_{A_1} f + \iint_{A_2} f.$$

Πρόταση 8.3.21. Έστω A μη κενό φραγμένο Jordan μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη και $\emptyset \neq B \subset A$ Jordan μετρήσιμο. Τότε, η $f|_B$ είναι ολοκληρώσιμη.

Πρόταση 8.3.22. Έστω A μη κενό φραγμένο Jordan μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε:

(α) $H \lambda f + \mu g$ είναι ολοκληρώσιμη και

$$\iint_A (\lambda f + \mu g) = \lambda \iint_A f + \mu \iint_A g.$$

(β) $H f \cdot g$ είναι ολοκληρώσιμη.

(γ) Εάν $f \leq g$ τότε

$$\iint_A f \leq \iint_A g.$$

(δ) Ισχύει ότι

$$\left| \iint_A f \right| \leq \iint_A |f|.$$

Πρόταση 8.3.23. Έστω A μη κενό, φραγμένο και Jordan μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και $f : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη. Τότε,

$$\iint_{\bar{A}} f = \iint_{A^\circ} f = \iint_A f.$$

Πρόταση 8.3.24 (γενίκευση της Πρότασης 8.3.20). Έστω A_1, A_2 μη κενά, φραγμένα και Jordan μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ και f ολοκληρώσιμη στα A_1, A_2 . Τότε,

$$\iint_{A_1 \cup A_2} f = \iint_{A_1} f + \iint_{A_2} f - \iint_{A_1 \cap A_2} f.$$

Ειδικότερα, αν $f \geq 0$ τότε

$$\iint_{A_1 \cup A_2} f \leq \iint_{A_1} f + \iint_{A_2} f.$$

8.4 Θεώρημα Fubini σε απλά χωρία

Έστω $\varphi, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $\varphi \leq g$. Θεωρούμε το σύνολο

$$(8.4.1) \quad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], \varphi(x) \leq y \leq g(x)\}.$$

Ορισμός 8.4.1. Τα επίπεδα χωρία της μορφής (8.4.1) ονομάζονται x -απλά χωρία ή χωρία κατακόρυφης σάρωσης.

Πρόταση 8.4.2. Κάθε x -απλό χωρίο είναι κλειστό, φραγμένο και Jordan μετρήσιμο.

Απόδειξη. Έστω $\varphi, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $\varphi \leq g$ και

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], \varphi(x) \leq y \leq g(x)\}.$$

Δείχνουμε ότι το A είναι κλειστό: Έστω $(x, y) \in \bar{A}$. Τότε υπάρχει ακολουθία $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^\infty$ στο A τέτοια ώστε $x_n \rightarrow x$ και $y_n \rightarrow y$. Αφού $a \leq x_n \leq b$ έχουμε ότι $a \leq x \leq b$ και αφού $\varphi(x_n) \leq y_n \leq g(x_n)$, από τη συνέχεια των φ, g στο x και την αρχή της μεταφοράς παίρνουμε $\varphi(x) \leq y \leq g(x)$. Επομένως, $(x, y) \in A$. Είδαμε ότι $\bar{A} \subseteq A$, άρα το A είναι κλειστό.

Δείχνουμε τώρα ότι το A είναι φραγμένο. Πράγματι, αν $m = \min_{[a,b]} \varphi$ και $M = \max_{[a,b]} g$, τότε $A \subseteq [a, b] \times [m, M]$.

Τέλος, δείχνουμε ότι το A είναι Jordan μετρήσιμο. Θεωρούμε το σύνολο

$$G = \{(x, y) : a < x < b, \varphi(x) < y < g(x)\}.$$

Χρησιμοποιώντας τη συνέχεια των φ, g δείχνουμε ότι το G είναι ανοικτό (ελέγξτε τις λεπτομέρειες). Επομένως, $G \subseteq A^\circ$ και έχουμε ότι

$$\partial A = \bar{A} \setminus A^\circ = A \setminus A^\circ \subseteq A \setminus G.$$

Τότε,

$$\partial A \subseteq (\{a\} \times \mathbb{R}) \cup (\{b\} \times \mathbb{R}) \cup \text{Gr}(\varphi) \cup \text{Gr}(g).$$

Αυτό δείχνει ότι το ∂A έχει μέτρο 0 ως πεπερασμένη ένωση συνόλων μέτρου 0, άρα το A είναι Jordan μετρήσιμο. $\square$

Θεώρημα 8.4.3 (θεώρημα Fubini για x -απλά χωρία). Έστω A ένα x -απλό χωρίο της μορφής

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], \varphi(x) \leq y \leq g(x)\}$$

όπου $\varphi, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $\varphi \leq g$. Έστω επίσης $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε,

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{g(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

Απόδειξη. Θέτουμε $m = \min_{[a,b]} \varphi$ και $M = \max_{[a,b]} g$, οπότε $A \subseteq [a, b] \times [m, M]$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\tilde{f} : T \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{αν } (x, y) \in A, \\ 0 & \text{αν } (x, y) \in T \setminus A \end{cases}$$

Επειδή το A είναι κλειστό, φραγμένο και Jordan μετρήσιμο και η f είναι συνεχής, η $\tilde{f}$ είναι ολοκληρώσιμη στο T , άρα η f είναι ολοκληρώσιμη στο A και, από το θεώρημα Fubini για ορθογώνια,

$$(8.4.2) \quad \iint_A f(x, y) dx dy = \iint_T \tilde{f}(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_m^M \tilde{f}(x, y) dy \right] dx.$$

Σταθεροποιούμε $x \in [a, b]$. Τότε,

$$\int_m^M \tilde{f}(x, y) dy = \int_m^{\varphi(x)} \tilde{f}(x, y) dy + \int_{\varphi(x)}^{g(x)} \tilde{f}(x, y) dy + \int_{g(x)}^M \tilde{f}(x, y) dy.$$

Για κάθε $y \in [m, \varphi(x)) \cup (g(x), M]$ έχουμε $(x, y) \notin A$ άρα $\tilde{f}(x, y) = 0$, και συνεπώς

$$\int_m^{\varphi(x)} \tilde{f}(x, y) dy = \int_{g(x)}^M \tilde{f}(x, y) dy = 0,$$

ενώ για κάθε $y \in [\varphi(x), g(x)]$ έχουμε ότι $\tilde{f}(x, y) = f(x, y)$. Άρα,

$$\int_m^M \tilde{f}(x, y) dy = \int_{\varphi(x)}^{g(x)} f(x, y) dy.$$

Επιστρέφοντας στην (8.4.2) βλέπουμε ότι

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{g(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

□

Ορισμός 8.4.4. Ένα χωρίο $A \subset \mathbb{R}^2$ λέγεται *y-απλό* ή *οριζόντιας σάρωσης* αν υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις $\varphi, g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ με $\varphi \leq g$ τέτοιες ώστε

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \varphi(y) \leq x \leq g(y)\}.$$

Πρόταση 8.4.5. Κάθε *y-απλό* χωρίο είναι κλειστό, φραγμένο και Jordan μετρήσιμο.

Θεώρημα 8.4.6 (θεώρημα Fubini για *y-απλά* χωρία). Έστω A ένα *y-απλό* χωρίο της μορφής

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d], \varphi(y) \leq x \leq g(y)\}$$

όπου $\varphi, g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $\varphi \leq g$. Έστω επίσης $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε,

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_{\varphi(y)}^{g(y)} f(x, y) dx \right] dy.$$

Παράδειγμα 8.4.7. Υπολογίστε το $I := \iint_A x dx dy$ όπου A το χωρίο που φράσσεται από τον κύκλο $x^2 + y^2 = 4$, την ευθεία $x = 1$ και τους θετικούς ημιάξονες.

Για σταθερό $x \in [0, 1]$ το y βρίσκεται μεταξύ 0 και $\sqrt{4 - x^2}$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 x \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy \right) dx = \int_0^1 x \sqrt{4 - x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_3^4 \sqrt{u} du = \frac{1}{3} u^{3/2} \Big|_{u=3}^{u=4} = \frac{4^{3/2} - 3^{3/2}}{3}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 8.4.8. Υπολογίστε το $I := \iint_A \frac{x^3}{x^4 + y^4 + 1} dx dy$ όπου A το χωρίο που φράσσεται από τον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$, τον άξονα x' και βρίσκεται στο ημιεπίπεδο $y \geq 0$.

Για σταθερό $y \in [0, 1]$ το x βρίσκεται μεταξύ $-\sqrt{1 - y^2}$ και $\sqrt{1 - y^2}$. Συνεπώς,

$$I = \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{x^3}{x^4 + y^4 + 1} dx \right) dy.$$

Όμως, η $x \mapsto \frac{x^3}{x^4 + y^4 + 1}$ είναι περιττή συνάρτηση, άρα το εσωτερικό ολοκλήρωμα ισούται με 0 για κάθε $y \in [0, 1]$. Έπεται ότι $I = 0$.

Παράδειγμα 8.4.9. Υπολογίστε το $\iint_A e^{-y^2} dx dy$ όπου A το χωρίο που φράσσεται από την ευθεία $y = x$, τον άξονα Oy και την ευθεία $y = 1$.

Για σταθερό $y \in [0, 1]$ το x βρίσκεται μεταξύ 0 και y . Συνεπώς,

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^y e^{-y^2} dx \right) dy = \int_0^1 y e^{-y^2} dy = \frac{1}{2} e^{-y^2} \Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{e-1}{2}.$$

Σημειώνουμε ότι το A είναι ταυτόχρονα και x -απλό, αλλά δεν εξυπηρετεί να ολοκληρώσουμε πρώτα ως προς y διότι η e^{-y^2} δεν έχει παράγουσα η οποία να εκφράζεται με στοιχειώδεις συναρτήσεις.

Παράδειγμα 8.4.10. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^1 y \left(\int_y^1 \frac{dx}{(1+x^3)^5} \right) dy$$

αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης.

Έχουμε $I = \iint_A \frac{y}{(1+x^3)^5} dx dy$, όπου

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1], y \leq x \leq 1\}.$$

Το A είναι x -απλό και y -απλό. Θα το θεωρήσουμε ως x -απλό. Για σταθερό $x \in [0, 1]$ το y βρίσκεται μεταξύ 0 και x , άρα

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{y}{(1+x^3)^5} dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^3)^5} dx \\ &= \frac{1}{6} \int_1^2 \frac{du}{u^5} = -\frac{1}{24} u^{-4} \Big|_1^2 = \frac{1}{24} \left(1 - \frac{1}{16} \right) = \frac{15}{24 \cdot 16}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 8.4.11. Υπολογίστε το $I := \iint_A (x+y) dx dy$ όπου A το χωρίο που φράσσεται από τις ευθείες $x+y=1$, $x+y=2$ και τους θετικούς ημιάξονες.

Γράφουμε $A = A_1 \cup A_2$, όπου A_1 το χωρίο που φράσσεται από τις ευθείες $x+y=1$, $x+y=2$ και τις ευθείες $x=0$, $x=1$, και A_2 το τρίγωνο που φράσσεται από τις ευθείες $x+y=2$, $x=1$ και τον ημιάξονα Ox . Έχουμε $A_1^\circ \cap A_2^\circ = \emptyset$, άρα

$$I := \iint_A (x+y) dx dy = \iint_{A_1} (x+y) dx dy + \iint_{A_2} (x+y) dx dy.$$

Υπολογίζουμε πρώτα το

$$\iint_{A_1} (x+y) dx dy.$$

Για σταθερό $x \in [0, 1]$ έχουμε $y \in [1 - x, 2 - x]$, άρα

$$\begin{aligned} \iint_{A_1} (x + y) dx dy &= \int_0^1 \left[\int_{1-x}^{2-x} (x + y) dy \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (x + y)^2 \Big|_{y=1-x}^{y=2-x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (2^2 - 1^2) dx = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τώρα το

$$\iint_{A_2} (x + y) dx dy.$$

Για σταθερό $x \in [1, 2]$ έχουμε $y \in [0, 2 - x]$, άρα

$$\begin{aligned} \iint_{A_2} (x + y) dx dy &= \int_1^2 \left[\int_0^{2-x} (x + y) dy \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 (x + y)^2 \Big|_{y=0}^{y=2-x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (2^2 - x^2) dx \\ &= 2 - \frac{1}{2} \int_1^2 x^2 dx = 2 - \frac{1}{6} x^3 \Big|_{x=1}^{x=2} = 2 - \frac{1}{6} (2^3 - 1) = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

Τελικά,

$$I = \frac{3}{2} + \frac{5}{6} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}.$$

Παράδειγμα 8.4.12. Υπολογίστε το $I := \iint_A |x| dx dy$ όπου A το χωρίο που φράσσεται από τις παραβολές $y = x^2$ και $y = 2 - x^2$.

Οι παραβολές $y = x^2$ και $y = 2 - x^2$ τέμνονται στα σημεία $(1, 1)$ και $(-1, 1)$. Το A είναι x -απλό. Για σταθερό $x \in [-1, 1]$ το y βρίσκεται μεταξύ x^2 και $2 - x^2$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \left(\int_{x^2}^{2-x^2} |x| dy \right) dx = 2 \int_{-1}^1 |x| (1 - x^2) dx \\ &= 4 \int_0^1 x (1 - x^2) dx = 4 \int_0^1 (x - x^3) dx = 4 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = 1. \end{aligned}$$

8.5 Θεώρημα αντικατάστασης

8.5.1 Μετασχηματισμοί στο επίπεδο

Ορισμός 8.5.1. Μετασχηματισμό στον $\mathbb{R}^2$ ονομάζουμε μια απεικόνιση $T : U \rightarrow \mathbb{R}^2$, όπου $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό.

Τότε, ορίζονται δύο συναρτήσεις $x, y : U \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε

$$T(u, v) = (x(u, v), y(u, v)), \quad (u, v) \in U.$$

Ο T λέγεται C^1 αν οι x, y είναι C^1 , δηλαδή αν έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους. Τότε, ο Ιακωβιανός πίνακας του T στο $\mathbf{u}_0 \in U$ είναι ο

$$T'(\mathbf{u}_0) = \begin{vmatrix} x_u(\mathbf{u}_0) & x_v(\mathbf{u}_0) \\ y_u(\mathbf{u}_0) & y_v(\mathbf{u}_0) \end{vmatrix}$$

και η Ιακωβιανή ορίζουσα του T στο $\mathbf{u}_0 \in U$ είναι η

$$J_T(\mathbf{u}_0) = \det [T'(\mathbf{u}_0)].$$

Παραδείγματα 8.5.2. (α) Έστω M ένας 2×2 πίνακας και $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ η γραμμική απεικόνιση

$$T(u, v) = M \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

Τότε, $J_T(u, v) = \det(M)$ για κάθε $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

(β) Έστω $\rho > 0$ και $T : (0, \rho) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ο μετασχηματισμός με $T(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ για κάθε $0 < r < \rho$ και $0 < \varphi < 2\pi$. Αν $x = r \cos \varphi$ και $y = r \sin \varphi$, τότε

$$J_T(r, \varphi) = \begin{vmatrix} x_r & x_\varphi \\ y_r & y_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r.$$

Θεώρημα 8.5.3 (θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης). Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $T : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ C^1 -μετασχηματισμός, ο οποίος είναι 1-1 με $J_T(u_0, v_0) \neq 0$ για κάποιο $(u_0, v_0) \in U$. Τότε, υπάρχει W ανοικτό τέτοιο ώστε: $(u_0, v_0) \in W \subseteq U$, η $T|_W$ είναι 1-1, το $T(W)$ είναι ανοικτό, η $T^{-1} : T(W) \rightarrow W$ είναι C^1 και

$$J_{T^{-1}}(T(u_0, v_0)) = \frac{1}{J_T(u_0, v_0)}.$$

Πόρισμα 8.5.4. Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $T : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ C^1 -μετασχηματισμός, ο οποίος είναι 1-1 με $J_T(u, v) \neq 0$ για κάθε $(u, v) \in U$. Τότε, το $T(U)$ είναι ανοικτό, η $T^{-1} : T(U) \rightarrow U$ είναι C^1 και

$$J_{T^{-1}}(T(u, v)) = \frac{1}{J_T(u, v)}$$

για κάθε $(u, v) \in U$.

Παρατήρηση 8.5.5. Εάν $J_T(u, v) \neq 0$ για κάθε $(u, v) \in U$, δεν έπεται ότι η T είναι 1-1. Για παράδειγμα, θεωρήστε την

$$T(u, v) = (e^u \cos v, e^u \sin v), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

8.5.2 Θεώρημα αντικατάστασης

Θεώρημα 8.5.6 (θεώρημα αντικατάστασης). Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $T : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ C^1 -μετασχηματισμός, ο οποίος είναι 1-1 με $J_T(u, v) \neq 0$ για κάθε $(u, v) \in U$. Έστω επιπλέον $A \subset U$, κλειστό, φραγμένο και Jordan μετρήσιμο. Τότε:

(α) Το $T(A)$ είναι κλειστό, φραγμένο και Jordan μετρήσιμο.

(β) Εάν η $f : T(A) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε

$$\iint_A f(T(u, v)) |J_T(u, v)| du dv = \iint_{T(A)} f(x, y) dx dy$$

όπου $T(u, v) = (x, y)$, $J_T(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ και $D = T(A)$.

Παρατήρηση 8.5.7. Εάν $T = [0, 2\pi] \times [0, \rho] \rightarrow \mathbb{R}^2$, όπου $\rho > 0$, ο μετασχηματισμός με $T(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$, τότε ο T δεν είναι 1-1 αφού $T(r, 0) = T(r, 2\pi)$, και το $[0, 2\pi] \times [0, \rho]$ δεν είναι ανοικτό. Ο $T|_U : U = (0, 2\pi) \times (0, \rho) \rightarrow \mathbb{R}^2$ είναι 1-1.

Θεωρούμε $0 < \delta < \rho/2$, $0 < \varepsilon < \pi$ και το χωρίο

$$A(\delta, \varepsilon) = [\delta, \rho - \delta] \times [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon] \subset U.$$

Μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα αντικατάστασης στο $A(\delta, \varepsilon)$ και παίρνουμε

$$\iint_{A(\delta, \varepsilon)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi = \iint_{T(A(\delta, \varepsilon))} f(x, y) dx dy.$$

Αφήνοντας τα $\delta, \varepsilon \rightarrow 0^+$ παίρνουμε

$$\iint_{[0, 2\pi] \times [0, \rho]} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi = \iint_{B(0, \rho)} f(x, y) dx dy.$$

Παράδειγμα 8.5.8. Έστω $D = \{(x, y) : x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$. Να υπολογιστεί το

$$I := \iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy.$$

Θέτουμε $u = x - y$ και $v = x + y$, οπότε $x = \frac{u+v}{2}$ και $y = \frac{v-u}{2}$. Θεωρούμε τον μετασχηματισμό $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με $T(u, v) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right)$. Ο T είναι C^1 -μετασχηματισμός, ο οποίος είναι 1-1 με

$$J_T(u, v) = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \neq 0$$

για κάθε $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Το F είναι κλειστό, φραγμένο και Jordan μετρήσιμο χωρίο. Θέτουμε $A = T^{-1}(D)$ και παρατηρούμε ότι οι $x + y \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ είναι ισοδύναμες με τις $0 \leq v \leq 1$ και $-v \leq u \leq v$. Δηλαδή,

$$A = \{(u, v) : 0 \leq v \leq 1, -v \leq u \leq v\}.$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} I &= \iint_A e^{u/v} \frac{1}{2} du dv = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_{-v}^v e^{u/v} du \right) dv \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(v e^{u/v} \Big|_{u=-v}^{u=v} \right) dv = \frac{1}{2} (e - e^{-1}) \int_0^1 v dv = \frac{1}{4} (e - e^{-1}). \end{aligned}$$

Παράδειγμα 8.5.9. Έστω $D = \{(x, y) : 1 \leq xy \leq 2, 2 \leq x^2 - y^2 \leq 3, x \geq 0, y \geq 0\}$. Να υπολογιστεί το

$$I := \iint_D (x^4 - y^4) e^{xy} dx dy.$$

Αρχικά παρατηρούμε ότι για κάθε $(x, y) \in D$ ισχύει ότι $x > 0$ και $y > 0$. Θέτουμε $u = xy$ και $v = x^2 - y^2$, δηλαδή θεωρούμε τον μετασχηματισμό $S : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ με $S(x, y) = (xy, x^2 - y^2)$. Ο S είναι προφανώς C^1 -μετασχηματισμός. Εύκολα ελέγχουμε ότι ο S είναι 1-1 και $S(D) = A := [1, 2] \times [2, 3]$.

Επίσης, για κάθε $(x, y) \in D$ έχουμε

$$J_S(x, y) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ 2x & -2y \end{vmatrix} = -2y^2 - 2x^2 \neq 0.$$

Αν $T = S^{-1} : A \rightarrow D$ είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός, τότε για κάθε $(u, v) = S(x, y) \in A$ έχουμε

$$|J_T(u, v)| = \frac{1}{|J_S(x, y)|} = \frac{1}{2(x^2 + y^2)},$$

δηλαδή $(x^2 + y^2)|J_T(u, v)| = 1/2$. Τώρα, χρησιμοποιώντας και την $x^4 - y^4 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)$, γράφουμε

$$\begin{aligned} I &= \iint_{T(A)} (x^2 - y^2)e^{xy}(x^2 + y^2) dx dy = \iint_A ue^v(x^2 + y^2)|J_T(u, v)| du dv \\ &= \frac{1}{2} \iint_A ue^v du dv = \frac{1}{2} \int_1^2 u du \cdot \int_2^3 e^v dv = \frac{e^3 - e^2}{4}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 8.5.10. Έστω $D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. Να υπολογιστεί το

$$I := \iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

Θέτουμε $x = r \cos \varphi$ και $y = r \sin \varphi$. Τότε, $(x, y) \in D$ αν και μόνο αν $1 \leq r \leq 2$ και $[0, 2\pi]$.

Αν λοιπόν θεωρήσουμε τον μετασχηματισμό $T(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$, τότε $T^{-1}(D) = A = [1, 2] \times [0, 2\pi]$ και $|J_T| = r$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} I &= \iint_A e^{-r^2} r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_1^2 re^{-r^2} dr \\ &= 2\pi \cdot \left(-\frac{1}{2} e^{-r^2} \Big|_1^2 \right) = \pi \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^4} \right). \end{aligned}$$

Παράδειγμα 8.5.11. Έστω $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2x\}$. Να υπολογιστεί το

$$I := \iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy.$$

Θέτουμε $x = r \cos \varphi$ και $y = r \sin \varphi$. Τότε, $(x, y) \in D$ αν και μόνο αν $0 \leq r \leq 2 \cos \varphi$. Παρατηρήστε ότι $x^2 + y^2 \leq 2x$ αν και μόνο αν $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$, δηλαδή το D είναι δίσκος με κέντρο το $M(1, 0)$ και ακτίνα 1, άρα το διάστημα στο οποίο κινείται το φ είναι το $[-\pi/2, \pi/2]$.

Αν λοιπόν θεωρήσουμε τον μετασχηματισμό $T(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$, τότε $T^{-1}(D) = A = \{(r, \varphi) : -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2, 0 \leq r \leq 2 \cos \varphi\}$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} I &= \iint_A \frac{1}{r} r dr d\varphi = \iint_A dr d\varphi \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{2 \cos \varphi} dr \right) d\varphi = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi = 4 \sin \varphi \Big|_0^{\pi/2} = 4. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 8.5.12. Έστω $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2x, x \geq 1, y \geq 0\}$. Να υπολογιστεί το

$$I := \iint_D \frac{x}{x^2 + y^2} dx dy.$$

Θέτουμε $x = r \cos \varphi$ και $y = r \sin \varphi$. Τότε, $(x, y) \in D$ αν και μόνο αν $\frac{1}{\cos \varphi} \leq r \leq 2 \cos \varphi$. Το διάστημα στο οποίο κινείται το φ είναι το $[0, \pi/4]$.

Αν λοιπόν θεωρήσουμε τον μετασχηματισμό $T(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$, τότε $T^{-1}(D) = A = \{(r, \varphi) : 0 \leq \varphi \leq \pi/4, \frac{1}{\cos \varphi} \leq r \leq 2 \cos \varphi\}$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} I &= \iint_A \frac{r \cos \varphi}{r^2} r dr d\varphi = \iint_A \cos \varphi \cdot r dr d\varphi \\ &= \int_0^{\pi/4} \cos \varphi \left(\int_{1/\cos \varphi}^{2 \cos \varphi} r dr \right) d\varphi = \int_0^{\pi/4} (2 \cos^2 \varphi - 1) d\varphi \\ &= \int_0^{\pi/4} \cos(2\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \sin(2\varphi) \Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 8.5.13. Έστω $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 1/2\}$. Να υπολογιστεί το

$$I := \iint_D \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx dy.$$

Θέτουμε $x = r \cos \varphi$ και $y = r \sin \varphi$. Τότε, $(x, y) \in D$ αν και μόνο αν $\frac{1}{2 \sin \varphi} \leq r \leq 1$. Το διάστημα στο οποίο κινείται το φ είναι το $[-\pi/3, \pi/3]$.

Αν λοιπόν θεωρήσουμε τον μετασχηματισμό $T(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$, τότε $T^{-1}(D) = A = \{(r, \varphi) : \pi/6 \leq \varphi \leq 5\pi/6, \frac{1}{2 \sin \varphi} \leq r \leq 1\}$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} I &= \iint_A \frac{r^3 \sin^3 \varphi}{(r^2)^{3/2}} r dr d\varphi = \iint_A r \cdot \sin^3 \varphi d\varphi \\ &= \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \sin^3 \varphi \left(\int_{\frac{1}{2 \sin \varphi}}^1 r dr \right) d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \sin^3 \varphi \left(1 - \frac{1}{4 \sin^2 \varphi} \right) d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \sin^3 \varphi d\varphi - \frac{1}{8} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \sin \varphi d\varphi. \end{aligned}$$

Τα δύο αυτά ολοκληρώματα υπολογίζονται με στοιχειώδη τρόπο.

Παράδειγμα 8.5.14. Έστω $D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2x\}$. Να υπολογιστεί το

$$I := \iint_D \arctan\left(\frac{y}{x}\right) dx dy.$$

Θέτουμε $x = r \cos \varphi$ και $y = r \sin \varphi$. Τότε, $(x, y) \in D$ αν και μόνο αν $1 \leq r^2 \leq 2r \cos \varphi$, δηλαδή $1 \leq r \leq 2 \cos \varphi$. Για να βρούμε το διάστημα στο οποίο κινείται το φ βρίσκουμε τα σημεία τομής $M(1/2, \sqrt{3}/2)$ και $M'(1/2, -\sqrt{3}/2)$ των καμπυλών $x^2 + y^2 = 1$ και $x^2 + y^2 = 2x$, απ' όπου έπεται ότι $\varphi \in [-\pi/3, \pi/3]$.

Αν λοιπόν θεωρήσουμε τον μετασχηματισμό $T(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$, τότε $T^{-1}(D) = A = \{(r, \varphi) : -\pi/3 \leq \varphi \leq \pi/3, 1 \leq r \leq 2 \cos \varphi\}$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} I &= \iint_A \arctan\left(\frac{r \sin \varphi}{r \cos \varphi}\right) r dr d\varphi = \iint_A \varphi \cdot r dr d\varphi \\ &= \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \varphi \left(\int_1^{2 \cos \varphi} r dr \right) d\varphi = \frac{1}{2} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \varphi (4 \cos^2 \varphi - 1) d\varphi = 0, \end{aligned}$$

διότι η $\varphi \mapsto \varphi(4 \cos^2 \varphi - 1)$ είναι περιττή.

Παράδειγμα 8.5.15. Έστω $D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2, x^2 + y^2/4 \leq 1\}$. Να υπολογιστεί το

$$I := \iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2} dx dy.$$

Θέτουμε $x = r \cos \varphi$ και $y = r \sin \varphi$. Τότε, $(x, y) \in D$ αν και μόνο αν $r \geq 1$ και $4r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi \leq 4$, ή ισοδύναμα,

$$1 \leq r \leq \frac{2}{\sqrt{1+3 \cos^2 \varphi}}.$$

Επομένως, μπορούμε να γράψουμε

$$I = \int_0^{2\pi} \left(\int_1^{\frac{2}{\sqrt{1+3 \cos^2 \varphi}}} \frac{r(\cos \varphi + \sin \varphi)}{r^2} r dr \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} g(\varphi) d\varphi,$$

όπου

$$g(\varphi) = (\cos \varphi + \sin \varphi) \left(\frac{2}{\sqrt{1+3 \cos^2 \varphi}} - 1 \right).$$

Παρατηρούμε ότι $g(\varphi + \pi) = -g(\varphi)$, οπότε

$$I = \int_0^{\pi} g(\varphi) d\varphi + \int_{\pi}^{2\pi} g(\varphi) d\varphi = \int_0^{\pi} (g(\varphi) + g(\varphi + \pi)) d\varphi = 0.$$

Παράδειγμα 8.5.16. Για κάθε $R > 0$ ορίζουμε $I_R := \int_0^R e^{-x^2} dx$. Ναδειχθεί ότι

$$I_R^2 = \iint_{T_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

όπου $T_R = [0, R] \times [0, R]$, και στη συνέχεια να υπολογιστεί το $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Fubini γράφουμε

$$\begin{aligned} I_R^2 &= \int_0^R e^{-x^2} dx \cdot \int_0^R e^{-y^2} dy = \int_0^R e^{-y^2} \left(\int_0^R e^{-x^2} dx \right) du \\ &= \iint_{[0,R] \times [0,R]} e^{-x^2} \cdot e^{-y^2} dx dy = \iint_{T_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy. \end{aligned}$$

Τώρα, παρατηρούμε ότι $B_R \subseteq T_R \subseteq B_{R\sqrt{2}}$, όπου $B_r = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq r^2, x \geq 0, y \geq 0\}$. Συνεπώς,

$$\iint_{B_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \iint_{T_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \iint_{B_{R\sqrt{2}}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

Για κάθε $r > 0$, ολοκληρώνοντας σε πολικές συντεταγμένες, έχουμε ότι

$$\iint_{B_r} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^r s e^{-s^2} ds \right) d\varphi = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-r^2}).$$

Από τα παραπάνω έπεται ότι

$$\frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2}) \leq I_R^2 \leq \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2R^2}).$$

Αφήνοντας το $R \rightarrow \infty$, από το κριτήριο παρεμβολής παίρνουμε $\lim_{R \rightarrow \infty} I_R = \sqrt{\pi}/2$, δηλαδή

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Παράδειγμα 8.5.17. Έστω $D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2, x^2 + y^2/4 \leq 1, y \geq 0\}$. Να υπολογιστεί το

$$I := \iint_D (x - 2y) dx dy.$$

Θέτουμε $D_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ και $D_2 = \{(x, y) : x^2 + y^2/4 \leq 1, y \geq 0\}$. Τότε, $D_2 = D \cup D_1$ και $D^\circ \cap D_1^\circ = \emptyset$. Αν λοιπόν $f(x, y) = x - 2y$, έχουμε ότι

$$\iint_{D_2} f = \iint_D f + \iint_{D_1} f \implies \iint_D f = \iint_{D_2} f - \iint_{D_1} f.$$

Για τον υπολογισμό του

$$I_2 := \iint_{D_2} (x - 2y) dx dy$$

θέτουμε $x = r \cos \varphi$ και $y = 2r \sin \varphi$. Ορίζουμε

$$A = \{(r, \varphi) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$$

και θεωρούμε τον μετασχηματισμό $T : A \rightarrow D$ με

$$T(r, \varphi) = (r \cos \varphi, 2r \sin \varphi).$$

Υπολογίζουμε την

$$J_T = \begin{vmatrix} x_r & x_\varphi \\ y_r & y_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ 2 \sin \varphi & 2r \cos \varphi \end{vmatrix} = 2r.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^\pi \left(\int_0^1 (r \cos \varphi - 4r \sin \varphi) r dr \right) d\varphi = \int_0^\pi (\cos \varphi - 4 \sin \varphi) d\varphi \cdot \int_0^1 r^2 dr \\ &= \left(\sin \varphi \Big|_0^\pi + 4 \cos \varphi \Big|_0^\pi \right) \cdot \frac{1}{3} = -\frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό του

$$I_1 := \iint_{D_1} (x - 2y) dx dy$$

χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες στο $D_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\pi \left(\int_0^1 (r \cos \varphi - 2r \sin \varphi) r dr \right) d\varphi = \int_0^\pi (\cos \varphi - 2 \sin \varphi) d\varphi \cdot \int_0^1 r^2 dr \\ &= \frac{1}{3} \left(\sin \varphi \Big|_0^\pi + 2 \cos \varphi \Big|_0^\pi \right) = \frac{1}{3}(-4) = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Τελικά,

$$I = T_2 - I_1 = -\frac{8}{3} + \frac{4}{3} = -\frac{4}{3}.$$

Παράδειγμα 8.5.18. Έστω $D = \{(x, y) : x^2 + 2y^2 - 2x - 8y + 5 \leq 0\}$. Να υπολογιστεί το

$$I := \iint_D (x + y) dx dy.$$

Παρατηρούμε ότι $(x, y) \in D$ αν και μόνο αν $(x - 1)^2 + 2(y - 2)^2 \leq 4$, ή ισοδύναμα,

$$\frac{(x - 1)^2}{2^2} + \frac{(y - 2)^2}{\sqrt{2}^2} \leq 1.$$

Θέτουμε $x = 1 + 2\rho \cos \varphi$ και $y = 2 + \sqrt{2}\rho \sin \varphi$. Έχουμε ότι $(x, y) \in D$ αν και μόνο αν $0 \leq \rho \leq 1$ και $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Ορίζουμε

$$A = \{(\rho, \varphi) : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$$

και θεωρούμε τον μετασχηματισμό $T : A \rightarrow D$ με

$$T(\rho, \varphi) = (1 + 2\rho \cos \varphi, 2 + \sqrt{2}\rho \sin \varphi).$$

Υπολογίζουμε την

$$J_T = \begin{vmatrix} x_\rho & x_\varphi \\ y_\rho & y_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \cos \varphi & -2\rho \sin \varphi \\ \sqrt{2} \sin \varphi & \sqrt{2}\rho \cos \varphi \end{vmatrix} = 2\sqrt{2}\rho.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \iint_D (x + y) dx dy &= \iint_A (3 + 2\rho \cos \varphi + \sqrt{2}\rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi \\ &= \iint_A 3\rho d\rho d\varphi + \iint_A \rho^2 (2 \cos \varphi + \sqrt{2} \sin \varphi) d\rho d\varphi \\ &= 2\pi \frac{3\rho^2}{2} \Big|_0^1 + \int_0^1 \rho^2 d\rho \cdot \int_0^{2\pi} (2 \cos \varphi + \sqrt{2} \sin \varphi) d\varphi = 3\pi. \end{aligned}$$

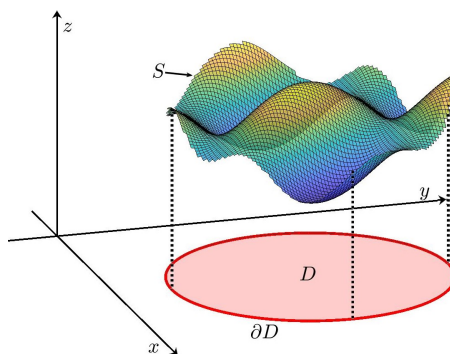
8.6 Εφαρμογές του διπλού ολοκληρώματος

8.6.1 Υπολογισμός όγκων

Έστω D κλειστό και φραγμένο χωρίο στον $\mathbb{R}^2$ και $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ μη αρνητική συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε $S = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D\} \subset \mathbb{R}^3$ και θεωρούμε το στερεό K που φράσσεται από τις επιφάνειες S, D

και τον ορθό κύλινδρο με γενέτειρες παράλληλες στον κατακόρυφο άξονα $z'z$ και οδηγό την καμπύλη ∂D . Τότε, ο όγκος του K ισούται με

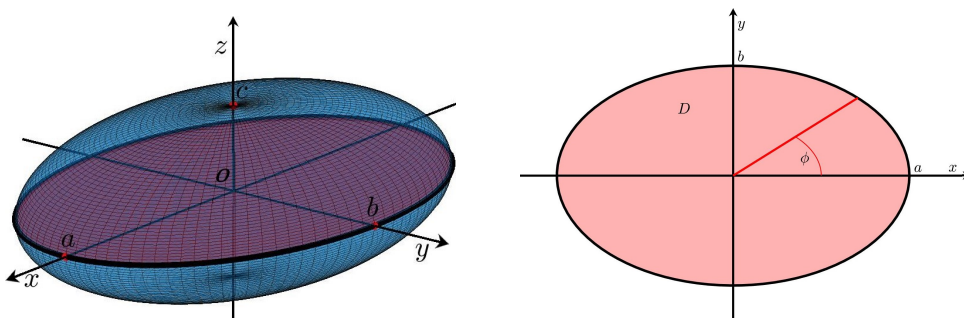
$$V(K) = \iint_D f(x, y) dx dy.$$



Παράδειγμα 8.6.1. Να υπολογιστεί ο όγκος του ελλειροειδούς

$$K = \left\{ (x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$$

όπου $a, b, c > 0$.



Λόγω συμμετρίας έχουμε $V(K) = 2V(K^+)$, όπου

$$K^+ = \left\{ (x, y, z) : 0 \leq z \leq c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

Συνεπώς,

$$V(K^+) = \iint_D c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy$$

όπου $D = \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$. Θέτουμε $x = ar \cos \varphi$ και $y = br \sin \varphi$. Τότε, $(x, y) \in D$ αν και μόνο αν $0 \leq r \leq 1$ και $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Υπολογίζουμε την

$$J = \begin{vmatrix} x_r & x_\varphi \\ y_r & y_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cos \varphi & -ar \sin \varphi \\ b \sin \varphi & br \cos \varphi \end{vmatrix} = abr.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} V(K^+) &= c \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1-r^2} ab r dr d\varphi = abc \cdot 2\pi \int_0^1 r \sqrt{1-r^2} dr \\ &= \pi abc \int_0^1 \sqrt{u} du = \frac{2\pi abc}{3}. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$V(K) = \frac{4\pi}{3} abc.$$

Ειδική περίπτωση είναι ο όγκος της μπάλας ακτίνας R . Έχουμε $a = b = c = R$, άρα ο όγκος της είναι ίσος με $\frac{4\pi}{3} R^3$.

Παράδειγμα 8.6.2. Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού

$$K = \{(x, y, z) : 0 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq 3 - y, 0 \leq z \leq x^2 + 2y^2\}.$$

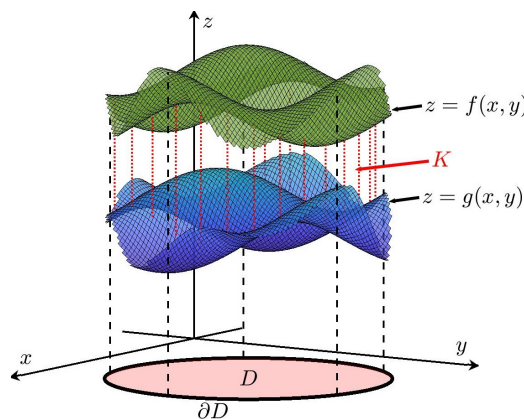
Αν $D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq 3 - y\}$, τότε

$$\begin{aligned} V(K) &= \iint_D (x^2 + 2y^2) dx dy = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^{3-y} (x^2 + y^2) dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{(3-y)^2 - (y^2)^3}{3} - 2y^2(3-y-y^2) \right) dy, \end{aligned}$$

το οποίο υπολογίζεται εύκολα.

Γενικότερα, έστω D κλειστό και φραγμένο χωρίο στον $\mathbb{R}^2$ και $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $g \leq f$ στο D . Θεωρούμε το στερεό K που φράσσεται από τις επιφάνειες $z = f(x, y)$, $z = g(x, y)$ και τον ορθό κύλινδρο με γενέτειρες παράλληλες στον κατακόρυφο άξονα $z'z$ και οδηγό την καμπύλη ∂D . Τότε, ο όγκος του K ισούται με

$$V(K) = \iint_D (f(x, y) - g(x, y)) dx dy.$$



Παράδειγμα 8.6.3. Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού

$$K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 - 1 \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}\}.$$

Αν $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$, τότε

$$\begin{aligned} V(K) &= \iint_D \left(\sqrt{4 - x^2 - y^2} - x^2 - y^2 + 1 \right) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\sqrt{4 - r^2} - r^2 + 1 \right) r dr d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^1 \left(\sqrt{4 - r^2} - r^2 + 1 \right) r dr, \end{aligned}$$

το οποίο υπολογίζεται εύκολα.

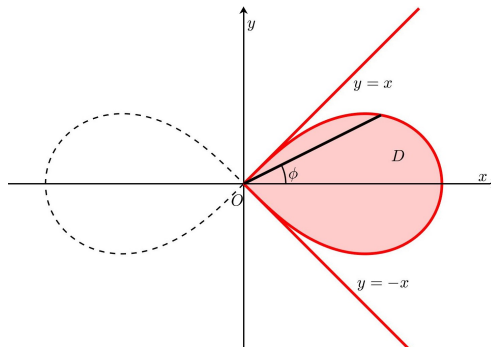
8.6.2 Υπολογισμός εμβαδών επίπεδων χωρίων

Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$ κλειστό, φραγμένο Jordan μετρήσιμο χωρίο. Από τον ορισμό, το εμβαδόν του D ισούται με

$$E(D) = \iint_D 1 dx dy.$$

Παράδειγμα 8.6.4. Έστω $D = \{(x, y) : (x^2 + y^2)^2 \leq x^2 - y^2\}$ (μυσός λημνίσκος Bernoulli). Τότε, αν θέσουμε $x = r \cos \varphi$ και $y = r \sin \varphi$ έχουμε $(x, y) \in D$ αν και μόνο αν $r^4 \leq r^2(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)$, δηλαδή $0 \leq r \leq \cos(2\varphi)$, όπου το φ πρέπει να ικανοποιεί την $\cos(2\varphi) \geq 0$, δηλαδή $-\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/4$. Συνεπώς,

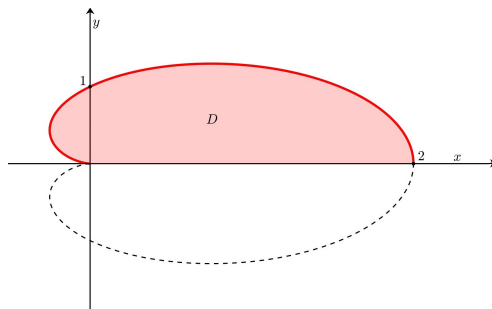
$$\begin{aligned} E(D) &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\int_0^{\cos(2\varphi)} r dr \right) d\varphi = \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos(2\varphi) d\varphi = \int_0^{\pi/4} \cos(2\varphi) d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \sin(2\varphi) \Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$



Παράδειγμα 8.6.5. Έστω $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq \sqrt{x^2 + y^2} + x, y \geq 0\}$. Τότε, αν θέσουμε $x = r \cos \varphi$ και $y = r \sin \varphi$ έχουμε $(x, y) \in D$ αν και μόνο αν $r^2 \leq r + r \cos \varphi$, δηλαδή $0 \leq r \leq 1 + \cos \varphi$, όπου λόγω του περιορισμού $y \geq 0$ το φ πρέπει να ικανοποιεί την $\sin \varphi \geq 0$, δηλαδή $0 \leq \varphi \leq \pi$. Συνεπώς,

$$E(D) = \int_0^\pi \left(\int_0^{1+\cos \varphi} r dr \right) d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi,$$

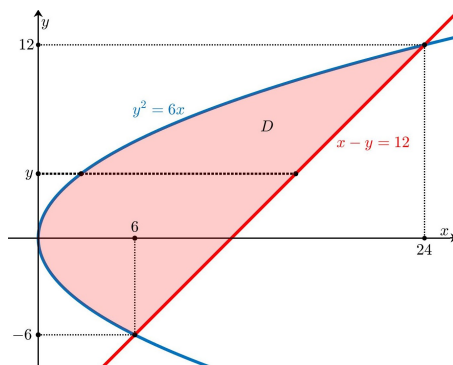
το οποίο υπολογίζεται εύκολα.



Παράδειγμα 8.6.6. Έστω D το χωρίο που φράσσεται από τις $y^2 = 6x$ και $x - y = 12$. Οι δύο αυτές καμπύλες τέμνονται στα σημεία $C(24, 12)$ και $C'(6, -6)$. Κάνοντας και ένα σχήμα βλέπουμε ότι

$$E(D) = \iint_D dx dy = \int_{-6}^{12} \left(\int_{y^2/6}^{y+12} dx \right) dy = \int_{-6}^{12} \left(y + 12 - \frac{y^2}{6} \right) dy,$$

το οποίο υπολογίζεται εύκολα.



8.6.3 Υπολογισμός μάζας και κέντρου μάζας

Επίπεδο σώμα ονομάζουμε ένα στερεό του οποίου μία από τις τρεις διαστάσεις είναι πολύ μικρή και θεωρείται αμελητέα. Ένα τέτοιο σώμα το ταυτίζουμε με ένα χωρίο $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Υποθέτουμε ότι το επίπεδο σώμα είναι μη ομογενές, με πυκνότητα τη συνεχή μη αρνητική συνάρτηση $\rho(x, y)$, όπου $(x, y) \in D$.

Η μάζα του D είναι η ποσότητα

$$m(D) = \iint_D \rho(x, y) dx dy$$

και το κέντρο μάζας του D είναι το σημείο (x^*, y^*) με συντεταγμένες

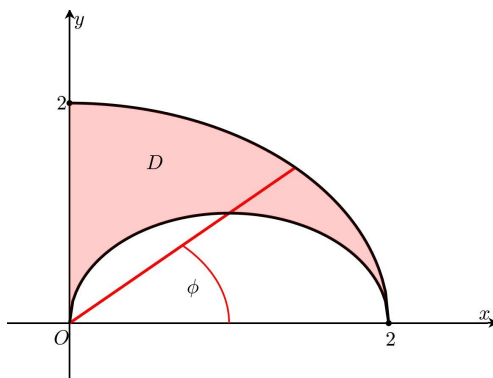
$$x^* = \frac{1}{m(D)} \iint_D x \rho(x, y) dx dy \quad \text{και} \quad y^* = \frac{1}{m(D)} \iint_D y \rho(x, y) dx dy.$$

Εάν το D είναι ομογενές, δηλαδή η πυκνότητα $\rho(x, y)$ είναι σταθερή και ίση με ρ , τότε $m(D) = \rho E(D)$ και

$$x^* = \frac{1}{E(D)} \iint_D x dx dy, \quad y^* = \frac{1}{E(D)} \iint_D y dx dy.$$

Παράδειγμα 8.6.7. Να βρεθεί το κέντρο μάζας του ομογενούς επίπεδου σώματος

$$D = \{(x, y) : 2x \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}.$$



Περνώντας σε πολικές συντεταγμένες βλέπουμε ότι $(x, y) \in D$ αν και μόνο αν $2r \cos \varphi \leq r^2 \leq 4$, δηλαδή $2 \cos \varphi \leq r \leq 2$. Επίσης, $(x, y) \in D$ αν και μόνο αν $(x-1)^2 + y^2 \geq 1$ και $x^2 + y^2 \leq 4$, δηλαδή αν το φ βρίσκεται στο διάστημα $[0, \pi/2]$.

Για το εμβαδόν του D , κάνοντας ένα σχήμα βλέπουμε ότι $E(D) = \frac{1}{4}E(D_1) - \frac{1}{2}E(D_2)$ όπου $D_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$ και $D_2 = \{(x, y) : (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$. Άρα,

$$E(D) = \frac{1}{4} \cdot 4\pi - \frac{1}{2}\pi = \frac{\pi}{2}.$$

Υπολογίζουμε το

$$\begin{aligned} \iint_D x \, dx \, dy &= \int_0^{\pi/2} \left(\int_{2 \cos \varphi}^2 r \cos \varphi \cdot r \, dr \right) d\varphi = \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \left(\int_{2 \cos \varphi}^2 r^2 \, dr \right) d\varphi \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \cdot \frac{8 - 8 \cos^3 \varphi}{3} d\varphi = \dots = \frac{8}{3} - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$x^* = \frac{1}{E(D)} \iint_D x \, dx \, dy = \frac{16}{3\pi} - 1.$$

Κατόπιν, υπολογίζουμε το

$$\begin{aligned} \iint_D y \, dx \, dy &= \int_0^{\pi/2} \left(\int_{2 \cos \varphi}^2 r \sin \varphi \cdot r \, dr \right) d\varphi = \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \left(\int_{2 \cos \varphi}^2 r^2 \, dr \right) d\varphi \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cdot \frac{8 - 8 \cos^3 \varphi}{3} d\varphi = \dots = 2. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$y^* = \frac{1}{E(D)} \iint_D y \, dx \, dy = \frac{4}{\pi}.$$

Τελικά, το κέντρο μάζας του D είναι το σημείο $\left(\frac{16}{3\pi} - 1, \frac{4}{\pi}\right)$.

8.6.4 Επίλυση προβλήματος αρχικών τιμών

Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} u''(x) = f(x), & x \geq 0 \\ u(0) = u'(0) = 0 \end{cases}$$

όπου $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Θα δείξουμε ότι η μοναδική λύση αυτού του προβλήματος είναι η

$$u(x) = \int_0^x (x-t)f(t) dt, \quad x \geq 0.$$

Παρατηρούμε ότι, για κάθε $s \geq 0$,

$$u'(s) = u'(s) - u'(0) = \int_0^s u''(t) dt = \int_0^s f(t) dt.$$

Ομοίως, για κάθε $x \geq 0$ έχουμε

$$u(x) = u(x) - u(0) = \int_0^x u'(s) ds$$

άρα

$$u(x) = \int_0^x \left[\int_0^s f(t) dt \right] ds, \quad x \geq 0.$$

Σταθεροποιούμε $x > 0$ και θεωρούμε το χωρίο

$$D = \{(s, t) : 0 \leq s \leq x, 0 \leq t \leq s\}.$$

Από το θεώρημα Fubini παίρνουμε

$$u(x) = \iint_D f(t) dt ds = \int_0^x \left(\int_t^x f(t) ds \right) dt = \int_0^x (x-t)f(t) dt.$$

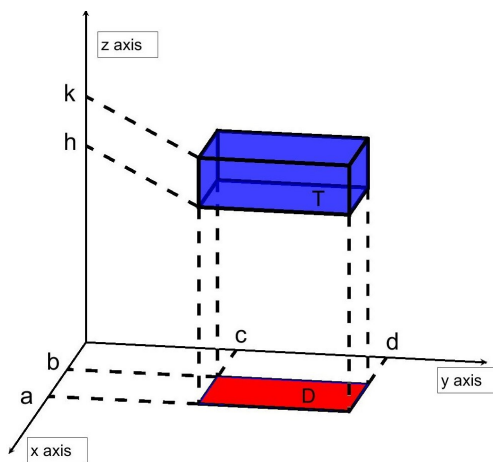
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

Τριπλό Ολοκλήρωμα

9.1 Τριπλό ολοκλήρωμα σε ορθογώνιο

Θεωρούμε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο $T \subset \mathbb{R}^3$ με πλευρές παράλληλες στους άξονες, δηλαδή το T είναι της μορφής

$$T = [a, b] \times [c, d] \times [h, k], \quad a < b, \quad c < d, \quad h < k.$$



Θεώρημα 9.1.1 (Θεώρημα Fubini για τριπλά ολοκληρώματα). Έστω $f(x, y, z)$ συνεχής στο T . Τότε:

$$\begin{aligned} \iiint_T f(x, y, z) dx dy dz &= \iint_D \left(\int_h^k f(x, y, z) dz \right) dx dy = \int_a^b \left[\int_c^d \left(\int_h^k f(x, y, z) dz \right) dy \right] dx \\ &= \int_h^k \left[\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y, z) dy \right) dx \right] dz \quad \text{κ.λ.π.} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 9.1.2. $T = [0, 1] \times [1, 2] \times [3, 4]$. Να υπολογιστεί το

$$J = \iiint_T (x^2 y + z) dx dy dz$$

Έχουμε

$$\int_0^1 (x^2y + z)dx = y/3 + z$$

και

$$\int_1^2 (y/3 + z)dy = \frac{1}{6}y^2 \Big|_1^2 + z = \frac{3}{6} + z = \frac{1}{2} + z,$$

άρα

$$J = \int_3^4 \left(\frac{1}{2} + z \right) dz = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z^2 \Big|_3^4 = \frac{1}{2} + \frac{7}{2} = 4.$$

9.2 Ολοκλήρωση σε xy -απλά χωρία

Έστω $D \subset \mathbb{R}^n$ κλειστό, φραγμένο, Jordan μετρήσιμο και

$$\varphi, g : D \rightarrow \mathbb{R} \text{ συνεχείς με } \varphi \leq g.$$

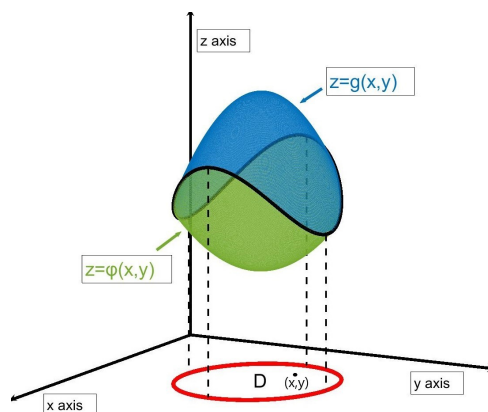
Θεωρούμε το χωρίο (στερεό) $K \subset \mathbb{R}^3$ με

$$K = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, \varphi(x, y) \leq z \leq g(x, y)\}.$$

Χωρία στον $\mathbb{R}^3$ της παραπάνω μορφής λέγονται xy -απλά.

Εάν $f(x, y, z)$ συνεχής στο K , τότε

$$\iiint_K f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left[\int_{\varphi(x, y)}^{g(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy.$$



- «Συγκόλληση» των επιφανειών $z = \varphi(x, y)$, $z = g(x, y)$ κατά μήκος του $z'z$.
- $C = n$ τομή τους.
- $D = n$ προβολή του K στο xy -επίπεδο.

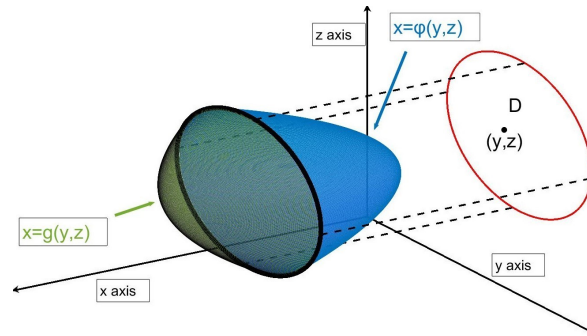
9.3 Ολοκλήρωση σε yz -απλά χωρία

Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$, $\varphi, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς με $\varphi \leq g$. Θεωρούμε το στερεό χωρίο

$$K = \{(x, y, z) : (y, z) \in D, \quad \varphi(y, z) \leq x \leq g(y, z)\}.$$

Εάν $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής, τότε

$$\iiint_K f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left[\int_{\varphi(y, z)}^{g(y, z)} f(x, y, z) dx \right] dy dz.$$



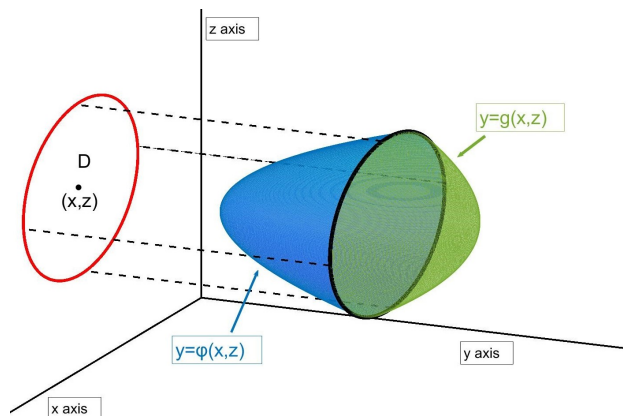
9.4 Ολοκλήρωση σε xz -απλά χωρία

Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$, $\varphi, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς με $\varphi \leq g$.

$$K = \{(x, y, z) : (x, z) \in D, \quad \varphi(x, z) \leq y \leq g(x, z)\}.$$

Εάν $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής, τότε

$$\iiint_K f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left[\int_{\varphi(x, z)}^{g(x, z)} f(x, y, z) dy \right] dx dz.$$



9.5 Παραδείγματα

(1) Να βρεθεί το $\iiint_T (x + y + z) dx dy dz$, $T = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.

Απόδειξη. Υπολογίζουμε διαδοχικά τα

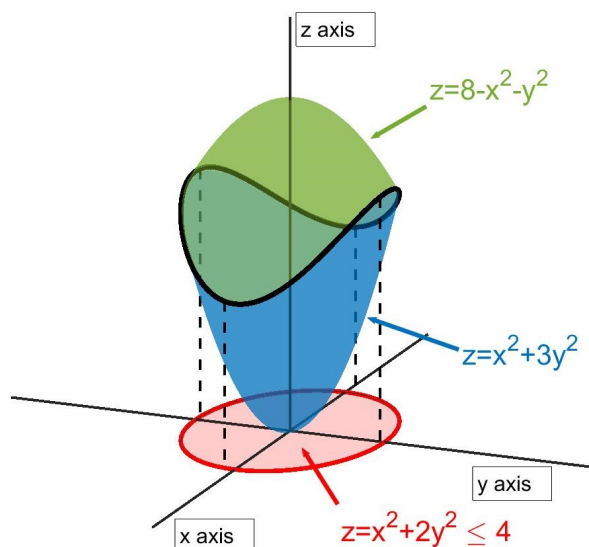
$$\begin{aligned}\int_0^1 (x+y+z)dx &= \frac{1}{2} + y + z \\ \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + y + z\right)dy &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + z = 1 + z \\ \int_0^1 (1+z)dz &= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι το ολοκλήρωμα είναι ίσο με $3/2$. □

(2) Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που φράσσεται από τις επιφάνειες

$$z = x^2 + 3y^2, \quad z = 8 - x^2 - y^2.$$

Απόδειξη.

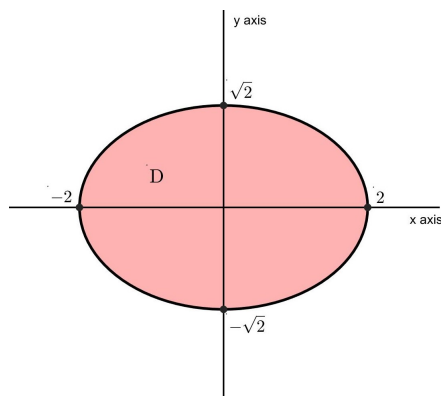


Το (x, y, z) ανήκει στην τομή των επιφανειών αν

$$\left. \begin{aligned} z &= x^2 + 3y^2 \\ z &= 8 - x^2 - y^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x^2 + 2y^2 = 4.$$

Η προβολή της παραπάνω καμπύλης στο xy -επίπεδο είναι η έλλειψη $x^2 + 2y^2 = 4$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}V &= \iiint_K 1 dx dy dz = \iint_D \left(\int_{8-x^2-y^2}^{x^2+3y^2} dz \right) dx dy = \iint_D (8 - x^2 - y^2 - x^2 - 3y^2) dx dy \\ &= \iint_D (8 - 2x^2 - 4y^2) dx dy = 2 \iint_D (4 - x^2 - 2y^2) dx dy.\end{aligned}$$



Το D περιγράφεται από την

$$x^2 + 2y^2 \leq 4 \iff \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} \leq 1.$$

Χρησιμοποιώντας την αλλαγή μεταβλητής

$$\left. \begin{array}{l} x = 2r \cos \varphi \\ y = \sqrt{2}r \sin \varphi \end{array} \right\} \begin{array}{l} (x,y) \in D \\ \implies 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad J = 2\sqrt{2}r \end{array}$$

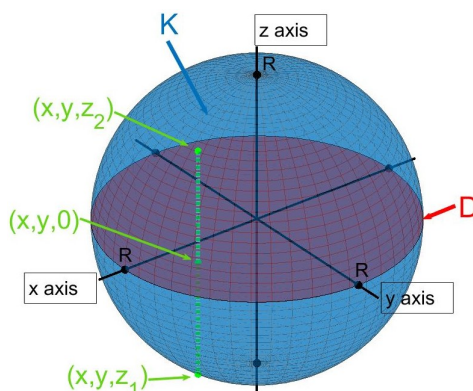
παίρνουμε

$$\begin{aligned} V &= 2 \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 (4 - 4r^2) 2\sqrt{2}r \right] d\varphi = 16\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 (1 - r^2) r dr \right] d\varphi \\ &= 32\pi\sqrt{2} \int_0^1 (r - r^3) dr = 32\pi\sqrt{2} (1/2 - 1/4) = 8\pi\sqrt{2}. \end{aligned}$$

□

(3) Να υπολογιστεί το $\iiint_K z^2 dx dy dz$ όπου $K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$.

Απόδειξη.



Η προβολή του K στο xy -επίπεδο ($z = 0$) είναι το

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

Για σταθερό $(x, y) \in D$, η κατακόρυφη από το (x, y) τέμνει τη σφαίρα στα σημεία (x, y, z_1) , (x, y, z_2) με

$$z_1 = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \quad z_2 = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \iiint_K z^2 dx dy dz &= \iint_D \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} z^2 dz \right) dx dy = 2 \iint_D \left(\int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} z^2 dz \right) dx dy \\ &= \frac{2}{3} \iint_D (R^2 - x^2 - y^2)^{3/2} dx dy. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό

$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{array} \right\} \begin{array}{l} (x,y) \in D \\ \implies 0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array}$$

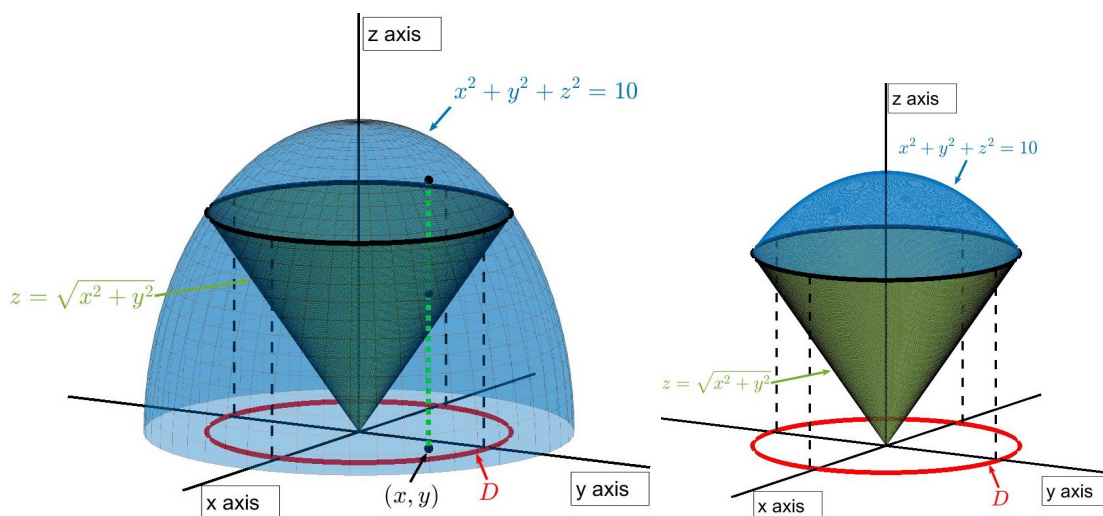
παίρνουμε

$$\begin{aligned} \iiint_K z^2 dx dy dz &= \frac{2}{3} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^R (R^2 - r^2)^{3/2} r dr \right] d\varphi = \frac{4\pi}{3} \int_0^R (R^2 - r^2)^{3/2} r dr \\ &\stackrel{u=R^2-r^2}{=} -\frac{2\pi}{3} \int_{R^2}^0 u^{3/2} du = \frac{2\pi}{3} \int_0^{R^2} u^{3/2} du \\ &= \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{2}{5} u^{5/2} \Big|_0^{R^2} = \frac{4\pi}{15} R^5. \end{aligned}$$

□

(4) Να υπολογιστεί το $\iiint_K z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, όπου K το στερεό που φράσσεται από πάνω από τη σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 10$ και από κάτω από τον κώνο $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Απόδειξη.



Βρίσκουμε πρώτα την τομή των επιφανειών:

$$\left. \begin{aligned} z &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 10 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x^2 + y^2 = 5, \quad D: x^2 + y^2 \leq 5.$$

Για σταθερό $(x, y) \in D$, η κατακόρυφη από το (x, y) τέμνει τις επιφάνειες

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 10$$

στα σημεία (x, y, z_1) , (x, y, z_2) με

$$z_1 = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z_2 = \sqrt{10 - x^2 - y^2}.$$

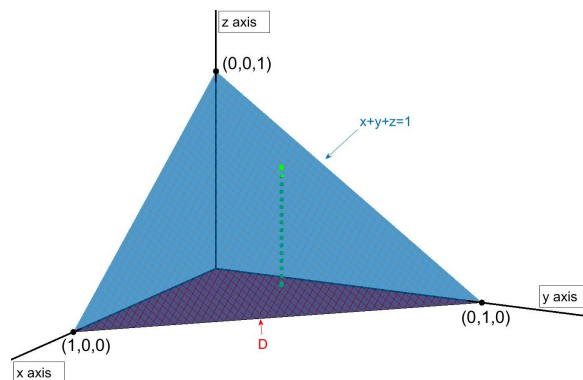
Συνεπώς, το ολοκλήρωμα είναι ίσο με

$$\begin{aligned} \iint_D \left(\int_{z_1}^{z_2} z \sqrt{x^2 + y^2} dz \right) dx dy &= \frac{1}{2} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} (z_2^2 - z_1^2) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} (10 - x^2 - y^2 - x^2 - y^2) dx dy \\ &= \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} (5 - x^2 - y^2) dx dy \\ &\stackrel{\substack{x=r \cos \varphi \\ y=r \sin \varphi}}{=} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\sqrt{5}} r^2 (5 - r^2) dr \right] d\varphi \\ &= 2\pi \left(5 \int_0^{\sqrt{5}} r^2 dr - \int_0^{\sqrt{5}} r^4 dr \right) \\ &= 2\pi \left(\frac{5}{3} r^3 \Big|_0^{\sqrt{5}} - \frac{r^5}{5} \Big|_0^{\sqrt{5}} \right) \\ &= 2\pi \left(\frac{5}{3} 5\sqrt{5} - \frac{25\sqrt{5}}{5} \right) = 2\pi \sqrt{5} \left(\frac{25}{3} - 5 \right) \\ &= 2\pi \sqrt{5} \frac{10}{3} = \frac{20\pi \sqrt{5}}{3}. \end{aligned}$$

□

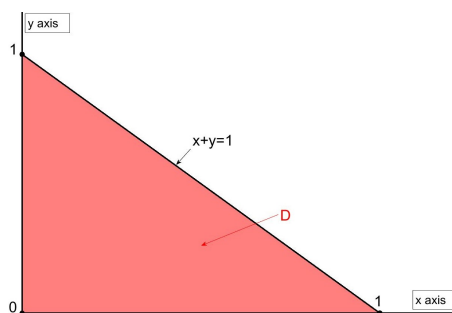
(5) Να υπολογιστεί το $\iiint_K xy dx dy dz$, όπου K είναι το στερεό τετράεδρο που βρίσκεται στο 1ο ογδομήριο και φράσσεται από τις επιφάνειες $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

Απόδειξη.



Η προβολή του K στο xy -επίπεδο είναι το $D = \{(x, y) \mid x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ και έχουμε ότι

$$K = \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, 0 \leq z \leq 1 - x - y\}.$$



Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \iiint_K xy dx dy dz &= \iint_D \left(\int_0^{1-x-y} xy dz \right) dx dy = \iint_D xy(1-x-y) dx dy \\ &= \int_0^1 \left[\underbrace{\int_0^{1-y} xy(1-x-y) dx}_{I_y} \right] dy, \end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned} I_y &= \int_0^{1-y} xy(1-x-y) dx = y \left[\int_0^{1-y} x(1-y) dx - \int_0^{1-y} x^2 dx \right] = y \left[(1-y) \frac{x^2}{2} \Big|_0^{1-y} - \frac{x^3}{3} \Big|_0^{1-y} \right] \\ &= y \left[\frac{(1-y)^3}{2} - \frac{(1-y)^3}{3} \right] = \frac{y(1-y)^3}{6}. \end{aligned}$$

Τότε, το αρχικό ολοκλήρωμα γράφεται

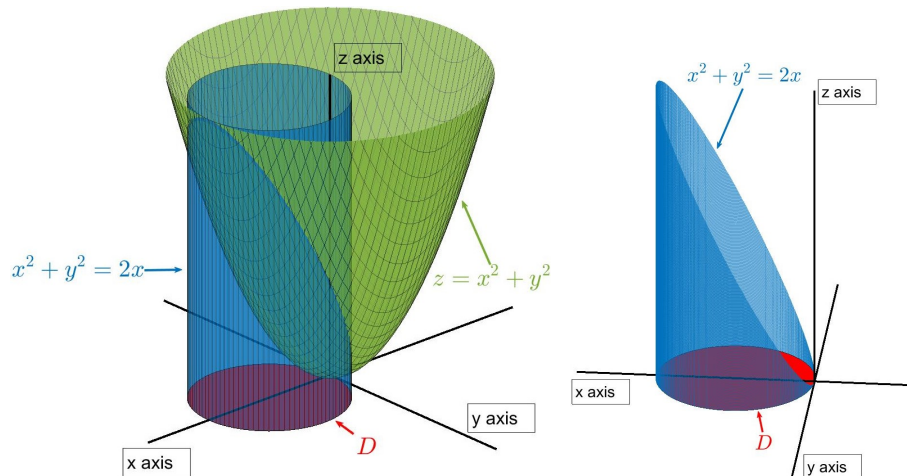
$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \int_0^1 y(1-y)^3 dy &\stackrel{(u=1-y)}{=} -\frac{1}{6} \int_1^0 (1-u)u^3 du = \frac{1}{6} \int_0^1 (u^3 - u^4) du \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{120}. \end{aligned}$$

□

(6) Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που φράσσεται από τις επιφάνειες

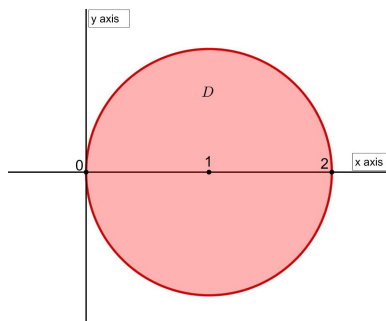
$$z = x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 = 2x, \quad z = 0.$$

Απόδειξη. Η $x^2 + y^2 = 2x$ γράφεται στη μορφή $(x-1)^2 + y^2 = 1$.



Θεωρώντας το $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2x\}$, έχουμε

$$V = \iiint_K dx dy dz = \iint_D \left(\int_0^{x^2+y^2} dz \right) dx dy = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy.$$



Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό

$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{array} \right\} \begin{array}{l} (x,y) \in D \\ \Rightarrow r^2 \leq 2r \cos \varphi \Rightarrow 0 \leq r \leq 2 \cos \varphi \quad \text{και} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{array}$$

παίρνουμε

$$V = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{2 \cos \varphi} r^2 dr \right) d\varphi = \frac{16}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 \varphi d\varphi = 8 \int_0^{\pi/2} \cos^4 \varphi d\varphi.$$

Όμως,

$$\begin{aligned} \cos^4 \varphi &= \cos^4 \varphi - \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi = \frac{1 + \cos(2\varphi)}{2} - \frac{1}{4} \sin^4(2\varphi) = \frac{1 + \cos(2\varphi)}{2} - \frac{1 - \cos(4\varphi)}{8} \\ &= \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos(2\varphi) + \frac{1}{8} \cos(4\varphi) \end{aligned}$$

άρα

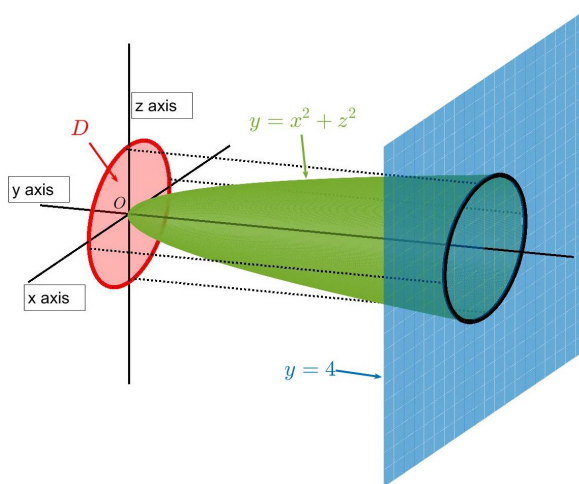
$$V = 3\pi/2, \quad \text{διότι} \quad \int_0^{\pi/2} \cos(2\varphi) d\varphi = \int_0^{\pi/2} \sin(2\varphi) d\varphi = 0.$$

□

(7) Να υπολογιστεί το $\iiint_K \sqrt{x^2 + z^2} dx dy dz$, όπου K είναι το στερεό που φράσσεται από τις επιφάνειες

$$y = x^2 + z^2, \quad y = 4.$$

Απόδειξη.



Θεωρούμε το $D = \{(x, z) : x^2 + z^2 \leq 4\}$. Για σταθερό $(x, z) \in D$ έχουμε $x^2 + z^2 \leq y \leq 4$. Συνεπώς,

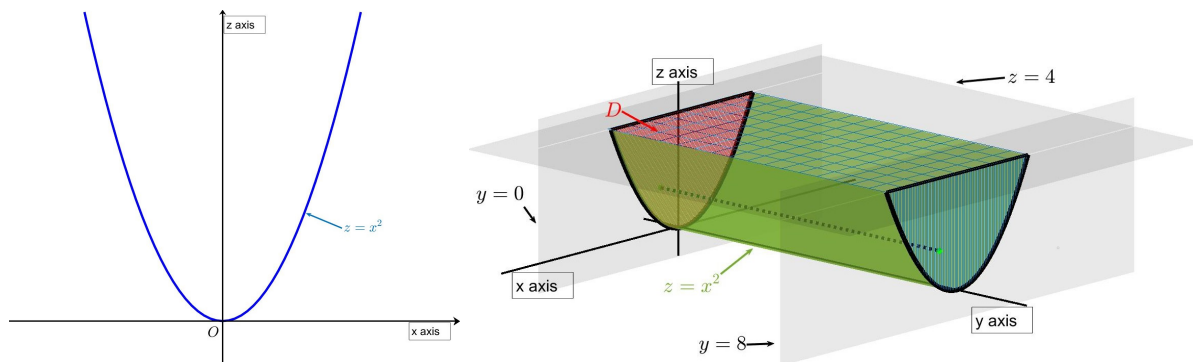
$$\begin{aligned} \iiint_K \sqrt{x^2 + z^2} dx dy dz &= \iint_D \left(\int_{x^2+z^2}^4 \sqrt{x^2 + z^2} dy \right) dx dz = \iint_D (4 - x^2 - z^2) \sqrt{x^2 + z^2} dx dz \\ &\stackrel{x=r\cos\varphi}{z=r\sin\varphi} = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^2 (4 - r^2) r dr \right] d\varphi \\ &= 2\pi \left(\int_0^2 4r^2 dr - \int_0^2 r^4 dr \right) = 2\pi \left(4 \frac{2^3}{3} - \frac{2^5}{5} \right) \\ &= 2\pi 2^5 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = 64\pi \frac{2}{15} = \frac{128}{15}\pi. \end{aligned}$$

□

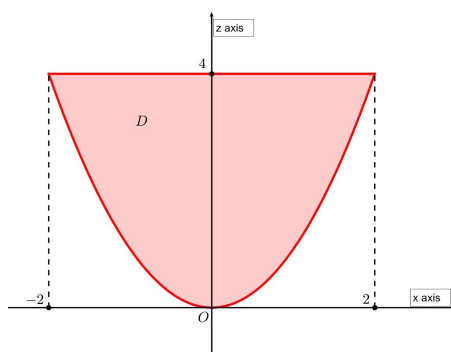
(8) Να υπολογιστεί το $\iiint_K xy dx dy dz$ όπου K είναι το στερεό που φράσσεται από τις επιφάνειες

$$y = 0, \quad y = 8, \quad z = x^2, \quad z = 4.$$

Απόδειξη.



Θεωρούμε το $D = \{(x, z) : x^2 \leq z \leq 4\}$. Για σταθερό $(x, z) \in D$, έχουμε $y \in [0, 8]$.



Συνεπώς,

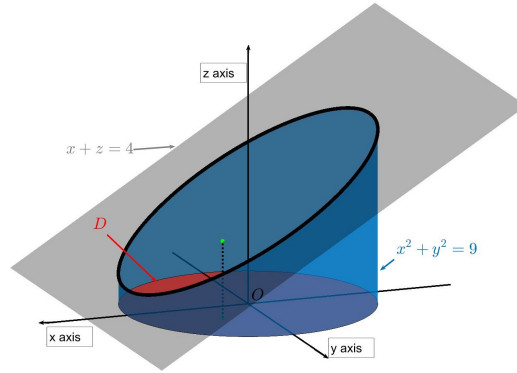
$$\begin{aligned}
 \iiint_K (x + y + z) dx dy dz &= \iint_D \left(\int_0^8 (x + y + z) dy \right) dx dz = \iint_D \left[8(x + z) + \frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=8} \right] dx dz \\
 &= \iint_D (8x + 8z + 32) dx dz = 8 \iint_D (x + z + 4) dx dz = 8 \int_{-2}^2 \left[\int_{x^2}^4 (x + z + 4) dz \right] dx \\
 &= 8 \int_{-2}^2 \left[(4 - x^2)(x + 4) + \frac{z^2}{2} \Big|_{z=x^2}^4 \right] dx \\
 &= 8 \left[\int_{-2}^2 (4 - x^2) x dx + 4 \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx + \int_{-2}^2 \frac{16 - x^4}{2} dx \right] \\
 &= 8 \left[8 \int_0^2 (4 - x^2) dx + \int_0^2 (16 - x^4) dx \right] = \dots
 \end{aligned}$$

□

(9) Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που φράσσεται από τις επιφάνειες

$$z = 0, \quad x + z = 4, \quad x^2 + y^2 = 9.$$

Απόδειξη.



Θεωρούμε το $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 9\}$. Για σταθερό $(x, y) \in D$, έχουμε $z \in [0, 4 - x]$. Συνεπώς,

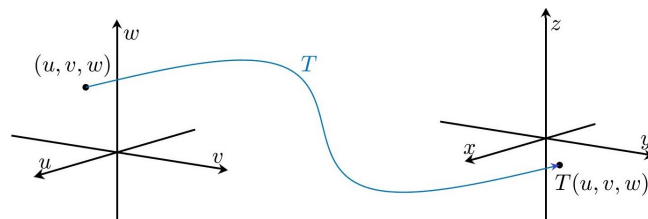
$$\begin{aligned} V &= \iint_D \left(\int_0^{4-x} dz \right) dx dy = \iint_D (4 - x) dx dy \stackrel{\substack{x=r \cos \varphi \\ z=r \sin \varphi}}{=} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^3 (4 - r \cos \varphi) r dr \right] d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^3 4r dr - \int_0^3 r^2 \cos \varphi dr \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(2r^2 \Big|_{r=0}^{r=3} - \cos \varphi \frac{r^3}{3} \Big|_{r=0}^{r=3} \right) d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} (18 - 9 \cos \varphi) d\varphi = 36\pi. \end{aligned}$$

□

9.6 Αλλαγή μεταβλητών στο τριπλό ολοκλήρωμα

Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^3$ ανοικτό και $T : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ μετασχηματισμός:

$$U \ni (u, v, w) \mapsto T(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$$



Εάν οι $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$, $z(u, v, w)$ είναι κλάσης C^1 , τότε ο T λέγεται C^1 -μετασχηματισμός. Για κάθε $P_0(u_0, v_0, w_0)$, ορίζεται η Ιακωβιανή ορίζουσα του T στο P_0 :

$$J_T(P_0) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} x_u(P_0) & x_v(P_0) & x_w(P_0) \\ y_u(P_0) & y_v(P_0) & y_w(P_0) \\ z_u(P_0) & z_v(P_0) & z_w(P_0) \end{vmatrix}$$

9.6.1 Θεώρημα αντικατάστασης

Θεώρημα 9.6.1 (Θεώρημα Αντικατάστασης). Έστω $T : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ C^1 -μετασχηματισμός, όπου U ανοικτό, και έστω ότι:

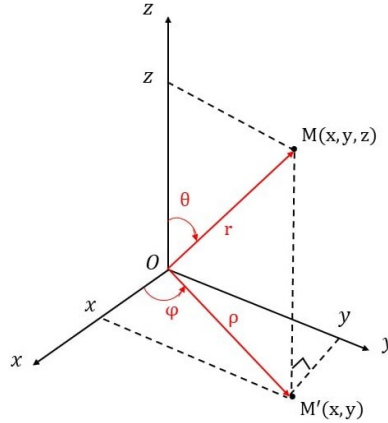
- ο T είναι 1-1.

- για κάθε $(u, v, w) \in U$ ισχύει ότι $J_T(u, v, w) \neq 0$.

Έστω A Jordan μετρήσιμο, φραγμένο με $\bar{A} \subset U$ και $f : T(A) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε,

$$\iiint_{T(A)} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_A f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J_T(u, v, w)| du dv dw .$$

9.6.2 Μετασχηματισμός σφαιρικών συντεταγμένων



Έστω $M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ που δεν ανήκει στον $z'z$ και $M'(x, y)$ η προβολή του M στο xy -επίπεδο. Έστω $(\rho, \varphi) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi]$ οι πολικές συντεταγμένες του M' , δηλαδή

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases} .$$

Επιπλέον, έστω $\vartheta \in [0, \pi]$ η γωνία των $\overrightarrow{OM}$, Oz .

(Υπενθυμίζεται ότι σε αντίθεση με το επίπεδο, η γωνία δύο διανυσμάτων στον χώρο είναι η κυρτή γωνία των φορέων τους και δεν έχει προσανατολισμό).

Τότε, στο ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle OM'M$ ($\widehat{OM'M} = 90^\circ$), έχουμε

$$\begin{cases} (MM') = (OM) \cos \vartheta \Leftrightarrow z = r \cos \vartheta, & \text{όπου } r = (OM), \\ (OM') = (OM) \sin \vartheta \Leftrightarrow \rho = r \sin \vartheta. \end{cases}$$

Τελικά,

$$\left. \begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi \Rightarrow x = r \cos \varphi \sin \vartheta \\ y = \rho \sin \varphi \Rightarrow y = r \sin \varphi \sin \vartheta \\ \text{και} \quad z = r \cos \vartheta \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{Σφαιρικές συντεταγμένες} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \vartheta \leq \pi \\ r \geq 0 \end{array}$$

Ο μετασχηματισμός $T : (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi) = U \rightarrow \mathbb{R}^3$ με

$$T(r, \varphi, \vartheta) = (r \cos \varphi \sin \vartheta, r \sin \varphi \sin \vartheta, r \cos \vartheta)$$

είναι C^1 και $1-1$ στο ανοικτό σύνολο U . Επιπλέον, για κάθε $(r, \varphi, \vartheta) \in U$,

$$\begin{aligned}x_r &= \cos \varphi \sin \vartheta = x/r, & x_\varphi &= -r \sin \varphi \sin \vartheta = -y, & x_\vartheta &= r \cos \varphi \cos \vartheta = z \cos \varphi, \\y_r &= \sin \varphi \sin \vartheta = y/r, & y_\varphi &= r \cos \varphi \sin \vartheta = x, & y_\vartheta &= r \sin \varphi \cos \vartheta = z \sin \varphi, \\z_r &= \cos \vartheta = z/r, & z_\varphi &= 0, & z_\vartheta &= -r \sin \vartheta.\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}J_T(r, \varphi, \vartheta) &= \begin{vmatrix} x/r & -y & z \cos \varphi \\ y/r & x & z \sin \varphi \\ z/r & 0 & -r \sin \vartheta \end{vmatrix} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} x & -y & z \cos \varphi \\ y & x & z \sin \varphi \\ z & 0 & -r \sin \vartheta \end{vmatrix} \quad (\text{3η γραμμή}) \quad \frac{1}{r} \left[z \begin{vmatrix} -y & z \cos \varphi \\ x & z \sin \varphi \end{vmatrix} - r \sin \vartheta \begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix} \right] \\&= \frac{1}{r} \left[-z^2 (y \sin \varphi + x \cos \varphi) - r \sin \vartheta (x^2 + y^2) \right].\end{aligned}$$

Αλλά, $x \cos \varphi + y \sin \varphi = r \sin \vartheta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r \sin \vartheta$. Επομένως,

$$J_T(r, \varphi, \vartheta) = \frac{1}{r} (-r \sin \vartheta) (x^2 + y^2 + z^2) = -r^2 \sin \vartheta < 0$$

για κάθε $(r, \varphi, \vartheta) \in U = (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi)$.

Εάν A είναι φραγμένο Jordan μετρήσιμο σύνολο με $\bar{A} \subset U$ και $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής, τότε

$$\iiint_{T(A)} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_A f(r \cos \varphi \sin \vartheta, r \sin \varphi \sin \vartheta, r \cos \vartheta) r^2 \sin \vartheta dr d\varphi d\vartheta.$$

Παραδείγματα 9.6.2. (1) Να βρεθεί ο όγκος του στερεού K που φράσσεται από τις επιφάνειες

$$x^2 + y^2 = 2y, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 0$$

και βρίσκεται στο α' ογδομήριο.

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned}K &= \left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 2y, \quad 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0 \right\} \\&\quad \left. \begin{matrix} x = r \cos \varphi \sin \vartheta \\ y = r \sin \varphi \sin \vartheta \\ z = r \cos \vartheta \end{matrix} \right\} \xrightarrow{(x,y,z) \in K} \begin{cases} r^2 \sin^2 \vartheta \leq 2r \sin \varphi \sin \vartheta \\ 0 \leq r \cos \vartheta \leq r \sin \vartheta \end{cases}\end{aligned}$$

άρα $r \geq 0, \varphi \in [0, 2\pi], \vartheta \in [0, \pi]$. Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \frac{\sin \varphi}{\sin \vartheta} \\ 0 \leq \cos \vartheta \leq \sin \vartheta \end{cases} &\implies \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \frac{\sin \varphi}{\sin \vartheta} \\ \vartheta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \end{cases} \implies \begin{cases} x \geq 0 \implies r \cos \varphi \sin \vartheta \geq 0 \implies \cos \varphi \geq 0 \\ y \geq 0 \implies r \sin \varphi \sin \vartheta \geq 0 \implies \sin \varphi \geq 0 \end{cases} \\&\implies \varphi \in [0, \pi/2].\end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} V &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\frac{\sin \varphi}{\sin \vartheta}} r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi d\vartheta = \frac{8}{3} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 \varphi}{\sin^3 \vartheta} \sin \vartheta d\varphi d\vartheta \\ &= \frac{8}{3} \underbrace{\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{d\vartheta}{\sin^2 \vartheta}}_{I_1} \cdot \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin^3 \varphi d\varphi}_{I_2} \end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned} I_1 &= -\cot \vartheta \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = -(0 - 1) = 1 \\ I_2 &= - \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 \varphi) d(\cos \varphi) \stackrel{u=\cos \varphi}{=} - \int_1^0 (1 - u^2) du = \int_0^1 (1 - u^2) du = 2/3. \end{aligned}$$

Τελικά,

$$V = \frac{8}{3} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{9}.$$

□

(2) Να υπολογίσετε τον όγκο του ελλειψοειδούς

$$K : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, \quad a, b, c > 0.$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό

$$\left. \begin{aligned} x &= ar \cos \varphi \sin \vartheta \\ y &= br \sin \varphi \sin \vartheta \\ z &= cr \cos \vartheta \end{aligned} \right\} \stackrel{(x,y,z) \in K}{\Rightarrow} \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ \varphi \in [0, 2\pi] \\ \vartheta \in [0, \pi] \end{cases}$$

και υπολογίζουμε την $J = -abcr^2 \sin \vartheta$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} V &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 abcr^2 \sin \vartheta dr d\varphi d\vartheta \\ &= abc \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^1 r^2 dr = \dots = \frac{4\pi}{3} abc. \end{aligned}$$

□

(3) Να υπολογίσετε το $\iiint_K \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$, όπου K το στερεό που φράσσεται από τις σφαίρες

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 = b^2 \quad (0 < a < b).$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$K = \left\{ (x, y, z) : a \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq b \right\}.$$

Περνώντας σε σφαιρικές συντεταγμένες r, φ, ϑ , παίρνουμε ότι για $(x, y, z) \in K$,

$$a \leq r \leq b, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad \vartheta \in [0, \pi]$$

και

$$\begin{aligned} \iiint_K \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{r^2 \sin \vartheta}{r^3} dr d\varphi d\vartheta = 2\pi \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \cdot \int_a^b \frac{dr}{r} \\ &= 4\pi(\ln b - \ln a) = 4\pi \ln \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

□

(4) Να υπολογιστεί το $\iiint_K \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-2)^2}}$, όπου $K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

Απόδειξη. Περνώντας σε σφαιρικές συντεταγμένες r, φ, ϑ παίρνουμε, για κάθε $(x, y, z) \in K$,

$$0 \leq r \leq 1, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad \vartheta \in [0, \pi] \quad \text{και} \quad x^2 + y^2 + (z-2)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 4z + 4 = r^2 - 4r \cos \vartheta + 4.$$

Το ολοκλήρωμα γράφεται

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{r^2 \sin \vartheta}{\sqrt{r^2 - 4r \cos \vartheta + 4}} dr d\varphi d\vartheta = 2\pi \int_0^\pi \underbrace{\left(\int_0^1 \frac{r^2 \sin \vartheta}{\sqrt{r^2 - 4r \cos \vartheta + 4}} dr \right)}_{I_r} d\vartheta.$$

Για σταθερό r , θέτουμε $g(\vartheta) = \sqrt{r^2 - 4r \cos \vartheta + 4} \Rightarrow g'(\vartheta) = \frac{4r \sin \vartheta}{2g}$, οπότε

$$\begin{aligned} I_r &= \frac{r}{2} \int_0^\pi g'(\vartheta) d\vartheta = \frac{r}{2} [g(\pi) - g(0)] = \frac{r}{2} (\sqrt{r^2 + 4r + 4} - \sqrt{r^2 - 4r + 4}) \\ &= \frac{r}{2} (|r+2| - |r-2|) \stackrel{0 \leq r \leq 1}{=} \frac{r}{2} (r+2 + r-2) = r^2, \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι το αρχικό ολοκλήρωμα ισούται με $2\pi \int_0^1 r^2 dr = 2\pi/3$.

□

(5) Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που βρίσκεται πάνω από τον κώνο $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ και μέσα στη σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$.

Απόδειξη. Έχουμε

$$K = \left\{ (x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z \right\},$$

άρα

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \varphi \sin \vartheta \\ y &= r \sin \varphi \sin \vartheta \\ z &= r \cos \vartheta \end{aligned} \right\} \xRightarrow{(x,y,z) \in K} \left\{ \begin{aligned} r \sin \vartheta &\leq r \cos \vartheta \\ r^2 &\leq 2r \cos \vartheta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \vartheta &\in [0, \pi/4] \\ \varphi &\in [0, 2\pi] \end{aligned} \right\} \quad \text{και} \quad 0 \leq r \leq 2 \cos \vartheta.$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_K dx dy dz = \int_0^{\pi/4} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\cos\vartheta} r^2 \sin\vartheta dr d\varphi d\vartheta = 2\pi \int_0^{\pi/4} \sin\vartheta \frac{8}{3} \cos^3\vartheta d\vartheta \\
 &= \frac{16\pi}{3} \int_0^{\pi/4} \cos^3\vartheta \sin\vartheta d\vartheta = -\frac{16\pi}{3} \frac{1}{4} \cos^4\vartheta \Big|_0^{\pi/4} = -\frac{4\pi}{3} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^4 - 1 \right] \\
 &= -\frac{4\pi}{3} \left(\frac{1}{4} - 1 \right) = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{3}{4} = \pi.
 \end{aligned}$$

□

(6) Να υπολογίσετε το $\iiint_K z dx dy dz$, όπου K το στερεό που φράσσεται από πάνω από τη σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ και από κάτω από τον κώνο $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$.

Απόδειξη. Έχουμε

$$K = \left\{ (x, y, z) : \sqrt{3(x^2 + y^2)} \leq z, \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 16 \right\}.$$

άρα

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos\varphi \sin\vartheta \\ y &= r \sin\varphi \sin\vartheta \\ z &= r \cos\vartheta \end{aligned} \right\} \xRightarrow{(x,y,z) \in K} \begin{cases} \sqrt{3}r \sin\vartheta \leq r \cos\vartheta \\ r^2 \leq 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tan\vartheta \leq \sqrt{3}/3 \\ 0 \leq r \leq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \vartheta \leq \pi/6 \\ 0 \leq r \leq 4 \end{cases}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
 \iiint_K z dx dy dz &= \int_0^{\pi/6} \int_0^{2\pi} \int_0^4 r \cos\vartheta r^2 \sin\vartheta dr d\varphi d\vartheta = 2\pi \int_0^{\pi/6} \cos\vartheta \sin\vartheta \left(\int_0^4 r^3 dr \right) d\vartheta \\
 &= 2\pi \cdot \frac{4^4}{4} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} \sin(2\vartheta) d\vartheta = 4^3 \pi \left(-\frac{1}{2} \right) \cos(2\vartheta) \Big|_0^{\pi/6} \\
 &= -32\pi \left(\cos \frac{\pi}{3} - 1 \right) = 32\pi \left(1 - \frac{1}{2} \right) = 16\pi.
 \end{aligned}$$

□

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

10.1 Καμπύλες στο επίπεδο

Υπενθυμίζουμε ότι καμπύλη στον $\mathbb{R}^2$ είναι μια συνεχής συνάρτηση $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Στην περίπτωση αυτή ορίζονται συνεχείς συναρτήσεις $x, y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in [a, b].$$

Το σύνολο

$$\gamma^* = \gamma([a, b]) = \{\gamma(t) : t \in [a, b]\}$$

ονομάζεται ίχνος της γ .

Παρατήρηση 10.1.1. Ενδέχεται δύο καμπύλες γ_1, γ_2 να έχουν το ίδιο ίχνος. Για παράδειγμα, αν $\gamma_1(t) = (t, t^2)$, $\gamma_2(t) = (t^3, t^6)$, $t \in [-1, 1]$, τότε

$$\gamma_1^* = \gamma_2^* = \{(t, t^2) : t \in [-1, 1]\}.$$

- Το $\gamma(a)$ καλείται αρχή και το $\gamma(b)$ πέρας του γ^* .
- Στα σημεία του γ^* ορίζεται μία φυσιολογική διάταξη: το σημείο $\gamma(t_1)$ προηγείται του σημείου $\gamma(t_2)$ αν $t_1 < t_2$. Με αυτόν τον τρόπο καθορίζεται η φορά διαγραφής του γ^* .

Παράδειγμα 10.1.2. Έστω $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ με $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$. Τότε το γ^* είναι ο μοναδιαίος κύκλος κέντρου $(0, 0)$ με φορά διαγραφής θετική, δηλαδή αντίθετη με τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού. Πράγματι $0 < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$ οπότε το

- το $\gamma(0) = (1, 0)$ προηγείται του $\gamma(\frac{\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
- το $\gamma(\frac{\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ προηγείται του $\gamma(\frac{\pi}{2}) = (0, 1)$.

Παραδείγματα 10.1.3. (α) Έστω $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ και $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ με $\gamma(t) = (1-t)\mathbf{u} + t\mathbf{v}$. Το γ^* είναι το προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ με αρχή το $\mathbf{u}$ και πέρας το $\mathbf{v}$.

(β) Έστω $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ και $R > 0$ και $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ με

$$\gamma(t) = (x_0 + R \cos t, y_0 + R \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Εδώ το γ^* είναι ο κύκλος κέντρου (x_0, y_0) και ακτίνας R με θετική φορά διαγραφής.

(γ) Έστω $R > 0$ και $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ με

$$\gamma(t) = \begin{cases} (R \cos t, R \sin t), & t \in [0, \pi] \\ \frac{R}{\pi}(2t - 3\pi, 0), & t \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

Εδώ το γ^* είναι το άνω ημικύκλιο του κύκλου κέντρου $(0, 0)$ και ακτίνας R μαζί με το ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το $(-R, 0)$ και πέρας το $(R, 0)$, με θετική φορά διαγραφής.

Ορισμός 10.1.4. Έστω $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ καμπύλη. Η γ λέγεται:

- κλειστή αν $\gamma(a) = \gamma(b)$.
- απλή αν η γ είναι «1-1» στο $[a, b]$ (δηλαδή το γ^* δεν τέμνει τον εαυτό του).

Παραδείγματα 10.1.5. (α) Η $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ είναι απλή κλειστή.

(β) Η $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 4\pi]$ είναι κλειστή αλλά όχι απλή. Για παράδειγμα $\gamma(0) = \gamma(2\pi) = (1, 0)$.

Το γ^* είναι ο μοναδιαίος κύκλος κέντρου $(0, 0)$ που διαγράφεται 2 φορές κατά τη θετική φορά.

(γ) $\gamma : [-\frac{\pi}{2}, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ με

$$\gamma(t) = \begin{cases} (\cos t, \sin t), & t \in [-\frac{\pi}{2}, \pi] \\ (\frac{4t}{\pi} - 5, 0), & t \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

Παρατηρήστε ότι $\gamma(-\frac{\pi}{2}) = (0, -1)$, $\gamma(0) = \gamma(\frac{3\pi}{2}) = (1, 0)$, $\gamma(2\pi) = (3, 0)$, και συνεπώς η γ δεν είναι ούτε απλή ούτε κλειστή.

Ορισμός 10.1.6. Έστω $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ καμπύλη. Η αντίθετη της γ είναι η καμπύλη $(-\gamma) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ με $(-\gamma)(t) = \gamma(a + b - t)$, $t \in [a, b]$. Τα ίχνη των $\gamma, (-\gamma)$ έχουν αντίθετες φορές διαγραφής.

Ορισμός 10.1.7. Έστω $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ διαδοχικές καμπύλες, δηλαδή $\gamma_1(b) = \gamma_2(a)$. Άθροισμα των γ_1, γ_2 είναι η καμπύλη $(\gamma_1 + \gamma_2) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ με

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t - a), & t \in [a, \frac{a+b}{2}] \\ \gamma_2(2t - b), & t \in [\frac{a+b}{2}, b] \end{cases}$$

Ισχύει ότι $(\gamma_1 + \gamma_2)^* = \gamma_1^* \cup \gamma_2^*$.

Παρατήρηση 10.1.8. Το κίνητρο για τον ορισμό της $\gamma_1 + \gamma_2$ είναι το εξής: θέλουμε να βρούμε μια καμπύλη με ίχνος την $\gamma_1^* \cup \gamma_2^*$, οπότε είναι λογικό να αναζητήσουμε μια συνεχή συνάρτηση

$$\delta(t) = \begin{cases} \delta_1(t), & t \in [a, \frac{a+b}{2}] \\ \delta_2(t), & t \in [\frac{a+b}{2}, b] \end{cases}$$

ώστε $\delta_1^* = \gamma_1^*$, $\delta_2^* = \gamma_2^*$, δηλαδή

$$\delta_1\left(\left[a, \frac{a+b}{2}\right]\right) = \gamma_1([a, b]) \text{ και } \delta_2\left(\left[\frac{a+b}{2}, b\right]\right) = \gamma_2([a, b]).$$

Οπότε, αρκεί να βρούμε $\varphi_1 : [a, \frac{a+b}{2}] \rightarrow [a, b]$ και $\varphi_2 : [\frac{a+b}{2}, b] \rightarrow [a, b]$ συνεχείς «1-1» και επί συναρτήσεις. Επιλέγουμε $\varphi_1(t) = 2t - a$ και $\varphi_2(t) = 2t - b$ και έχουμε το ζητούμενο θέτοντας $\delta_1 = \gamma_1 \circ \varphi_1$ και $\delta_2 = \gamma_2 \circ \varphi_2$.

Θεώρημα 10.1.9 (Jordan). Έστω γ απλή, κλειστή καμπύλη. Τότε το $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma^*$ χωρίζεται σε δύο ξένα πεδία (πεδίο = ανοικτό και συνεκτικό σύνολο):

- ένα φραγμένο πεδίο που λέγεται εσωτερικό της γ και συμβολίζεται με $\text{int}(\gamma^*)$
- ένα μη φραγμένο πεδίο που λέγεται εξωτερικό της γ και συμβολίζεται με $\text{ext}(\gamma^*)$.

Υπενθύμιση: Ένα ανοικτό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ λέγεται συνεκτικό αν για κάθε $u_0, u_1 \in \Omega$, υπάρχει τεθλασμένη γραμμή Γ που συνδέει τα u_0, u_1 και $\Gamma \subseteq \Omega$.

Ορισμός 10.1.10. Μια απλή κλειστή καμπύλη γ λέγεται θετικά προσανατολισμένη εάν ένας παρατηρητής που κινείται πάνω στο γ^* αφήνει στα αριστερά του το $\text{int}(\gamma^*)$. Η γ λέγεται αρνητικά προσανατολισμένη αν δεν είναι θετικά προσανατολισμένη.

Ορισμός 10.1.11. Έστω $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ καμπύλη με $\gamma(t) = (x(t), y(t)), t \in [a, b]$. Η γ λέγεται:

- διαφορίσιμη αν οι $x(\cdot), y(\cdot)$ είναι διαφορίσιμες. Σε αυτήν την περίπτωση γράφουμε

$$\gamma'(t) = (x'(t), y'(t)), \quad t \in [a, b].$$

- Κλάσης C^1 αν είναι διαφορίσιμη και οι x', y' είναι συνεχείς.
- Λεία αν είναι κλάσης C^1 και $\gamma'(t) \neq (0, 0)$, για κάθε $t \in [a, b]$.

Παρατήρηση 10.1.12. Η συνθήκη $\gamma'(t) \neq (0, 0)$, για κάθε $t \in [a, b]$ εξασφαλίζει ότι σε κάθε σημείο του γ^* , το διάνυσμα της ταχύτητας είναι μη μηδενικό και άρα ορίζεται η εφαπτομένη.

Ενδέχεται όμως να ισχύει ότι $\gamma'(t_0) = (0, 0)$ σε κάποιο σημείο $t_0 \in (a, b)$ και να ορίζεται εφαπτομένη στο $\gamma(t_0)$ (βλ. Παράδειγμα (β) παρακάτω).

Παραδείγματα 10.1.13. (α) $\gamma_R(t) = (x_0 + R \cos t, y_0 + R \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ ($x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, $R > 0$). Η γ_R είναι λεία.

(β) Η καμπύλη

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t^2, t^2), & t \in [0, 1] \\ (t^2, -t^2), & t \in [-1, 0] \end{cases}$$

είναι C^1 αλλά όχι λεία αφού $\gamma'(0) = (0, 0)$. Παρατηρούμε ότι στο $(0, 0)$ σχηματίζεται γωνία (δεν ορίζεται εφαπτομένη).

(γ) $\gamma(t) = (t^3, t^6)$, $t \in [-1, 1]$. Η γ_R είναι C^1 αλλά όχι λεία αφού $\gamma'(0) = (0, 0)$. Παρ' όλα αυτά, το ίχνος

$$\gamma^* = \{(x, x^2) : x \in [-1, 1]\}$$

είναι το γράφημα της $y = x^2$ στο $[-1, 1]$ και συνεπώς η γ^* έχει εφαπτομένη στο $(0, 0)$ τον άξονα $x'x$.

(δ) $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Η γ_R είναι C^1 αλλά όχι λεία αφού $\gamma'(t) = (0, 0)$ για κάθε $t \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$. Στα σημεία $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$ υπάρχουν ακίδες (χειρότερα από γωνίες!)

Ορισμός 10.1.14. Μια καμπύλη λέγεται τμηματικά λεία αν είναι το άθροισμα διαδοχικών λείων καμπυλών. Οι καμπύλες των παραδειγμάτων (β), (γ) (βλ. παραπάνω), είναι τμηματικά λείες.

Ορισμός 10.1.15. Έστω $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ λεία καμπύλη. Μήκος της γ είναι ο αριθμός

$$\|\gamma\| = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

δηλαδή αν $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$, τότε

$$\|\gamma\| = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

Παρατήρηση 10.1.16. Ο τυπικός ορισμός του $\|\gamma\|$ είναι ο εξής

$$\|\gamma\| = \sup \{L(\Sigma) : \Sigma \text{ τεθλασμένη γραμμή με κορυφές πάνω στο } \gamma^* \text{ με αρχή το } \gamma(a) \text{ και πέρας το } \gamma(b)\}.$$

Εάν η γ είναι λεία, αποδεικνύεται ότι $\|\gamma\| < \infty$ και

$$\|\gamma\| = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Παραδείγματα 10.1.17. (α) $\gamma_R(t) = (x_0 + R \cos t, y_0 + R \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ ($x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, $R > 0$).

$$\|\gamma\| = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} dt = 2\pi R \text{ (όπως αναμενόταν!)}.$$

(β) $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$ (κυκλοειδής). Τότε $\gamma'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$, $\|\gamma'(t)\|^2 = 2(1 - \cos t) = 4 \sin^2(\frac{t}{2})$ και συνεπώς

$$\|\gamma\| = \int_0^{2\pi} 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = 4 \int_0^\pi \sin t dt = 8.$$

Ορισμός 10.1.18. Εάν γ τμηματικά λεία καμπύλη με $\gamma = \sum_{k=1}^n \gamma_k$, όπου $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ διαδοχικές λείες καμπύλες, τότε

$$\|\gamma\| = \sum_{k=1}^n \|\gamma_k\|.$$

Ορισμός 10.1.19. Έστω $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ καμπύλη. Μια καμπύλη $\delta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$ λέγεται αναπαράμετρηση της γ αν υπάρχει $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ συνεχής, αύξουσα και επί ώστε

$$\delta = \gamma \circ \varphi.$$

Τότε

$$(α) \delta(c) = \gamma(\varphi(c)) = \gamma(a), \delta(d) = \gamma(\varphi(d)) = \gamma(b).$$

$$(β) \delta^* = \delta([c, d]) = \gamma(\varphi([c, d])) = \gamma([a, b]) = \gamma^*.$$

$$(γ) \text{ Εάν οι } \gamma, \varphi \text{ είναι } C^1 \text{ τότε και η } \delta = \gamma \circ \varphi \text{ είναι } C^1 \text{ και } \delta'(s) = \gamma'(\varphi(s))\varphi'(s), \text{ για κάθε } s \in [c, d].$$

$$(δ) \text{ Οι } \delta, \gamma \text{ έχουν την ίδια φορά διαγραφής (διότι η } \varphi \text{ είναι αύξουσα!)}.$$

Πρόταση 10.1.20. Έστω $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ λεία καμπύλη, $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ C^1 , επί με $\varphi' > 0$ και $\delta = \gamma \circ \varphi$. Τότε η δ είναι λεία και $\|\delta\| = \|\gamma\|$.

Απόδειξη. Για κάθε $s \in [c, d]$, $\delta'(s) = \gamma'(\varphi(s))\varphi'(s) \neq (0, 0)$ και συνεπώς η δ είναι λεία. Επιπλέον χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\varphi' > 0$ και την αλλαγή μεταβλητής $t = \varphi(s)$ έχουμε

$$\|\delta\| = \int_c^d \|\delta'(s)\| ds = \int_c^d \|\gamma'(\varphi(s))\varphi'(s)\| ds = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \|\gamma\|.$$

□

Παρατήρηση 10.1.21. Η Πρόταση 10.1.20 μας εξασφαλίζει κάτι αναμενόμενο, δηλαδή ότι το μήκος μιας λείας καμπύλης δεν εξαρτάται από την οποιαδήποτε λεία αναπαραμέτρηση της. Αποδεικνύεται ότι η Πρόταση 10.1.20 ισχύει και για τμηματικά λείες καμπύλες.

10.2 Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στο επίπεδο

10.2.1 Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα α' είδους

Ορισμός 10.2.1. Έστω $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ καμπύλη κλάσης C^1 και έστω f συνεχής πραγματική συνάρτηση τέτοια ώστε να ορίζεται η σύνθεση $f(\gamma(t))$, $t \in [a, b]$ (ισοδύναμα το ίχνος της γ περιέχεται στο πεδίο ορισμού της f). Ορίζουμε ως επικαμπύλιο ολοκλήρωμα α' είδους της f κατά μήκος της καμπύλης γ τον αριθμό

$$\int_{\gamma} f = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2} dt.$$

Για να έχει νόημα ο ορισμός, θα πρέπει η τιμή του ολοκληρώματος να είναι ανεξάρτητη από την επιλεγείσα παραμέτρηση της γ . Πράγματι, έστω $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ καμπύλη κλάσης C^1 και έστω $\delta = \gamma \circ \varphi$ (όπου $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$) μια αναπαραμέτρηση της γ . Τότε,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f &= \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt = \int_c^d f(\gamma(\varphi(u))) \|\gamma'(\varphi(u))\| \cdot \varphi'(u) du \\ &= \int_c^d f(\delta(u)) \|\gamma'(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u)\| du = \int_c^d f(\delta(u)) \|(\gamma \circ \varphi)'(u)\| du \\ &= \int_c^d f(\delta(u)) \|\delta'(u)\| du = \int_{\delta} f. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 10.2.2. Θεωρούμε την $f(x, y) = xy$ και την $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Έχουμε $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$ και

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f &= \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} (\cos t)(\sin t) \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin(2t) \sqrt{2} dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{2\pi} \sin(2t) dt = 0. \end{aligned}$$

10.2.2 Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β' είδους

Το έργο W που παράγεται κατά την ευθύγραμμη μετακίνηση υλικού σημείου από το σημείο A στο B υπό την επίδραση σταθερής δύναμης $\vec{F}$ που σχηματίζει γωνία φ με το διάνυσμα $\vec{AB}$ ισούται με

$$W = \|\vec{F}\| \|\vec{AB}\| \cos \varphi = \vec{F} \cdot \vec{AB}.$$

Θεωρούμε λεία καμπύλη $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ και συνεχή διανυσματική συνάρτηση $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ την οποία εκλαμβάνουμε ως δύναμη μεταβαλλόμενη ως προς το μέτρο και την κατεύθυνση.

Υποθέτουμε ότι υλικό σημείο κινείται πάνω στο γ^* υπό την επίδραση της $\vec{F}$ ξεκινώντας από το σημείο $\gamma(a)$ και στη χρονική στιγμή t φθάνει στο σημείο $\gamma(t)$. Το έργο που παράγεται κατά τη μετακίνηση το συμβολίζουμε με $W(t)$.

Για πολύ μικρό h , θεωρώντας ότι $t + h \cong t$ λόγω της συνέχειας της γ έχουμε $\gamma(t + h) \cong \gamma(t)$. Οπότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι το τόξο της καμπύλης από το $\gamma(t)$ στο $\gamma(t + h)$ είναι ίσο περίπου με το διάνυσμα που ορίζουν, δηλαδή με το $\gamma(t + h) - \gamma(t)$.

Επιπλέον, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η δύναμη $\vec{F}$ είναι σταθερή κατά τη μετακίνηση από το $\gamma(t)$ στο $\gamma(t + h)$.

Το έργο που παράγεται κατά την μετακίνηση από το $\gamma(t)$ στο $\gamma(t+h)$, ισούται με τη διαφορά

$$W(t+h) - W(t)$$

και ταυτοχρόνα ισούται περίπου με

$$\vec{F}(\gamma(t)) \cdot [\gamma(t+h) - \gamma(t)].$$

Άρα

$$\vec{F}(\gamma(t)) \cdot [\gamma(t+h) - \gamma(t)] \cong W(t+h) - W(t).$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη με h και περνώντας στο όριο καθώς $h \rightarrow 0$, παίρνουμε

$$\vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \cong W'(t), \text{ για όλα τα } t \in [a, b].$$

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη από a έως b και με βάση το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού παίρνουμε

$$\int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \cong W(b) - W(a) = W(b) \text{ (σημειώνουμε ότι } W(a) = 0)$$

και $W(b)$ είναι το συνολικό έργο που παράγεται κατά τη μετακίνηση από το $\gamma(a)$ στο $\gamma(b)$.

Με κίνητρο τα παραπάνω δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 10.2.3 (επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β' είδους). Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό σύνολο, $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ συνεχής διανυσματική συνάρτηση και $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ λεία καμπύλη. Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $\vec{F}$ πάνω στην γ ισούται με

$$\int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

Συμβολισμός: $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\gamma$ ή πιο απλά $\int_\gamma \vec{F}$.

Εάν $\vec{F} = (P, Q)$ και $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$, τότε με βάση τον ορισμό έχουμε

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\gamma = \int_a^b (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t))dt = \int_\gamma P dx + Q dy.$$

Για να έχει νόημα ο Ορισμός 10.2.3, θα πρέπει η τιμή του ολοκληρώματος να είναι ανεξάρτητη από την επιλεγείσα παραμέτρηση της γ .

Πράγματι, ισχύει το παρακάτω.

Πρόταση 10.2.4. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό σύνολο, $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ συνεχής διανυσματική συνάρτηση, $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ λεία καμπύλη και $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ C^1 συνάρτηση επί με $\varphi' > 0$. Θεωρούμε την καμπύλη $\delta = \gamma \circ \varphi$. Τότε

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\gamma = \int_\delta \vec{F} \cdot d\delta.$$

Απόδειξη. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_{\delta} \vec{F} \cdot d\delta &= \int_c^d \vec{F}(\delta(s)) \cdot \delta'(s) ds = \int_c^d \varphi'(s) \vec{F}(\gamma(\varphi(s))) \cdot \gamma'(\varphi(s)) ds \\ &= \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\gamma,\end{aligned}$$

όπου στο δεύτερο ολοκλήρωμα κάναμε την αντικατάσταση $t = \varphi(s)$. □

Ορισμός 10.2.5. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό σύνολο, $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ συνεχής διανυσματική συνάρτηση και $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ τμηματικά λεία καμπύλη με $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$, όπου $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ λείες καμπύλες. Τότε

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\gamma = \sum_{k=1}^n \int_{\delta} \vec{F} \cdot d\gamma_k.$$

Παραδείγματα 10.2.6. (i) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_{\gamma} y^2 dx - x^2 dy$, όπου γ είναι

(α) το $\vec{AB}$, $A(2, 1)$, $B(0, 1)$.

(β) το θετικά προσανατολισμένο ημικύκλιο C κέντρου $(1, 1)$ και ακτίνας 1 που βρίσκεται στο άνω ημιεπίπεδο.

(α) Μία παραμέτρηση του $\vec{AB}$ είναι

$$\gamma(t) = (1-t)(2, 1) + t(0, 1) = (2-2t, 1), \quad t \in [0, 1].$$

Θέτοντας $x(t) = 2-2t$, $y(t) = 1$ έχουμε

$$\int_{\gamma} y^2 dx - x^2 dy = \int_0^1 [1^2 x'(t) - (2-2t)^2 y'(t)] dt = \int_0^1 [-2 - (2-2t)^2 0] dt = -2.$$

(β) Μία παραμέτρηση του ημικυκλίου είναι

$$x(t) = 1 + \cos t, \quad y(t) = 1 + \sin t, \quad t \in [0, \pi].$$

Οπότε

$$\int_{\gamma} y^2 dx - x^2 dy = \int_0^{\pi} [(1 + \sin t)^2 (-\sin t) - (1 + \cos t)^2 \cos t] dt.$$

Κάνοντας τις πράξεις έχουμε

$$(1 + \sin t)^2 (-\sin t) - (1 + \cos t)^2 \cos t = -\sin t - \sin^3 t - \cos t - \cos^3 t - 2.$$

Έχουμε $\int_0^{\pi} \sin t dt = 2$, $\int_0^{\pi} \cos t dt = 0$. Επίσης,

$$\int_0^{\pi} \cos^3 t dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \left(\frac{\pi}{2} + s \right) ds = - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(s) ds = 0,$$

και

$$\int_0^{\pi} \sin^3 t dt = - \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 t) d(\cos t) = \int_{-1}^1 (1 - u^2) du = 2 \int_0^1 (1 - u^2) du = \frac{4}{3}.$$

Συνεπώς τελικά

$$\int_{\gamma} y^2 dx - x^2 dy = -\frac{10}{3} - 2\pi.$$

Σχόλιο: Εάν $\vec{F} = (y^2, -x^2)$, τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $\vec{F}$ πάνω στις C και $\vec{AB}$ έχει διαφορετικές τιμές, δηλαδή η τιμή του ολοκληρώματος εξαρτάται από το μονοπάτι που συνδέει τα A, B .

(ii) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_{\gamma_R} \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$, όπου γ_R είναι ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος κέντρου $(0, 0)$ και ακτίνας $R > 0$. Μία παραμέτρηση είναι

$$x(t) = R \cos t, \quad y(t) = R \sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Το ολοκλήρωμα επομένως είναι ίσο με

$$\int_0^{2\pi} \left[\frac{-R \sin t}{R^2} (-R \sin t) + \frac{R \cos t}{R^2} (R \cos t) \right] dt = 2\pi.$$

(iii) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_{\gamma} xy dx + y^2 dy$, όπου $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, με $\gamma_1(t) = (t, t^2)$, $t \in [-1, 1]$ και $\gamma_2(t) = (1 + 2t, 1 - t)$, $t \in [0, 1]$. Οι γ_1, γ_2 είναι λείες οπότε η γ είναι τμηματικά λεία. Έχουμε

$$\int_{\gamma_1} xy dx + y^2 dy = \int_{-1}^1 (t^3 + 2t^5) dt = 0,$$

αφού η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση είναι περιττή και

$$\int_{\gamma_2} xy dx + y^2 dy = \int_0^1 (1 + 4t - 5t^2) dt = \frac{7}{6}.$$

Τελικά

$$\int_{\gamma} xy dx + y^2 dy = \frac{7}{6}.$$

(iv) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_{\gamma} y^2 dx - 2 dy$, όπου $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$, με $\gamma_1(t) = \left(\pi t - \frac{\pi}{2}, 2t - 1\right)$, $t \in [0, 1]$ και $\gamma_2(t) = (t, \sin t)$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Έχουμε

$$\int_{\gamma_1} y^2 dx - 2 dy = \int_0^1 [(2t - 1)^2 \pi - 4] dt = \frac{\pi}{3} - 4$$

και

$$\int_{\gamma_2} y^2 dx - 2 dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t - 2 \cos t) dt = -\frac{\pi}{2} - 4.$$

Τελικά

$$\int_{\gamma} y^2 dx - 2 dy = -\frac{\pi}{6}.$$

Ιδιότητες: Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $\vec{F}, \vec{G} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ συνεχείς και $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow \Omega$ τμηματικά λείες καμπύλες, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε:

$$(\alpha) \quad \int_{\gamma_1} (\lambda \vec{F} + \mu \vec{G}) = \lambda \int_{\gamma_1} \vec{F} + \mu \int_{\gamma_1} \vec{G}.$$

(β) Αν οι γ_1, γ_2 είναι διαδοχικές, τότε

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2} \vec{F} = \int_{\gamma_1} \vec{F} + \int_{\gamma_2} \vec{F}.$$

$$(\gamma) \int_{-\gamma_1} \vec{F} = - \int_{\gamma_1} \vec{F}.$$

10.2.3 Ανεξαρτησία του ολοκληρώματος από τον δρόμο

Για το ορισμένο ολοκλήρωμα συναρτήσεων μιας μεταβλητής γνωρίζουμε ότι αν $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ κλάσης C^1 (δηλαδή συνεχώς παραγωγίσιμη), τότε

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a).$$

Η ιδιότητα αυτή επεκτείνεται στα επικαμπύλια ολοκληρώματα.

Πρόταση 10.2.7. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ κλάσης C^1 και $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ τμηματικά λεία καμπύλη. Τότε

$$\int_{\gamma} \nabla f = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά ότι η γ είναι λεία. Τότε

$$\int_{\gamma} \nabla f = \int_a^b \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} [f(\gamma(t))] dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Έστω γ τμηματικά λεία με $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$, όπου $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ διαδοχικές λείες καμπύλες. Τότε $\gamma_k(b) = \gamma_{k+1}(a)$, $1 \leq k \leq n-1$ και

$$\int_{\gamma} \nabla f = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} \nabla f = \sum_{k=1}^n [f(\gamma_k(b)) - f(\gamma_k(a))] = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

□

Πόρισμα 10.2.8. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ κλάσης C^1 και γ κλειστή, τμηματικά λεία καμπύλη με $\gamma^* \subseteq \Omega$. Τότε $\int_{\gamma} \nabla f = 0$.

Παρατήρηση 10.2.9. Εάν $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ C^1 διανυσματική συνάρτηση και γ κλειστή, τμηματικά λεία καμπύλη με $\gamma^* \subseteq \Omega$, δεν έπεται γενικά ότι $\int_{\gamma} \vec{F} = 0$.

Παράδειγμα 10.2.10. $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$,

$$\vec{F}(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right),$$

όπου $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Έχουμε δείξει ότι $\int_{\gamma} \vec{F} \neq 0$. Αυτό συνεπάγεται ότι δεν υπάρχει $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ C^1 συνάρτηση με $\vec{F} = \nabla f$.

Ορισμός 10.2.11. Μια διανυσματική συνάρτηση $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ ονομάζεται διανυσματικό πεδίο. Εάν $\vec{F} = \nabla f$, για κάποια $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ κλάσης C^1 , το $\vec{F}$ λέγεται συντηρητικό και η f λέγεται συνάρτηση δυναμικού. Συνεπώς αν $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ συντηρητικό πεδίο και γ κλειστή, τμηματικά λεία καμπύλη με $\gamma^* \subseteq \Omega$, τότε $\int_{\gamma} \vec{F} = 0$.

Πόρισμα 10.2.12 (ανεξαρτησία από τον δρόμο). Εάν $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ συντηρητικό πεδίο και $\gamma, \tilde{\gamma}$ τμηματικά λείες καμπύλες με κοινά άκρα (αρχή και πέρας) ώστε $\gamma^*, \tilde{\gamma}^* \subseteq \Omega$, τότε

$$\int_{\gamma} \vec{F} = \int_{\tilde{\gamma}} \vec{F}.$$

Απόδειξη. Αφού το $\vec{F}$ είναι συντηρητικό, υπάρχει $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ κλάσης C^1 με $\vec{F} = \nabla f$. Υποθέτουμε ότι $\gamma, \tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow \Omega$ με $\gamma(a) = \tilde{\gamma}(a)$, $\gamma(b) = \tilde{\gamma}(b)$. Έχουμε

$$\int_{\gamma} \vec{F} = \int_{\gamma} \nabla f = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = f(\tilde{\gamma}(b)) - f(\tilde{\gamma}(a)) = \int_{\tilde{\gamma}} \nabla f = \int_{\tilde{\gamma}} \vec{F}.$$

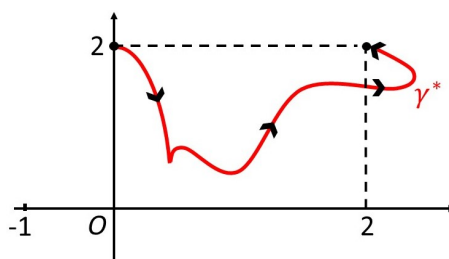
□

Παράδειγμα 10.2.13. Θέτουμε $\Omega = \{(x, y) : y > 0\}$,

$$\vec{F}(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

(α) Να προσδιορίσετε $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ κλάσης C^1 με $\vec{F} = \nabla f$ στο Ω .

(β) Να υπολογίσετε το $\int_{\gamma} \vec{F}$ όπου γ η καμπύλη του σχήματος:



(α) Έστω f με τις επιθυμητές ιδιότητες. Σταθεροποιούμε $y > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Τότε για κάθε $t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$f_x(t, y) = -\frac{y}{t^2 + y^2} \implies \int_0^x f_x(t, y) dt = -y \int_0^x \frac{dt}{t^2 + y^2}$$

και επομένως

$$f(x, y) - f(0, y) = -\frac{1}{y} \int_0^x \frac{dt}{1 + (\frac{t}{y})^2}.$$

Αν θέσουμε $w = \frac{t}{y}$ παίρνουμε ότι

$$f(x, y) - f(0, y) = -\int_0^{\frac{x}{y}} \frac{dw}{1 + w^2} = -\arctan \frac{x}{y}.$$

Αρα,

$$f(x, y) = -\arctan \frac{x}{y} + c(y),$$

όπου $c(y) = f(0, y)$. Η σχέση αυτή ισχύει για κάθε $(x, y) \in \Omega$, οπότε

$$f_y(x, y) = -\frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \left(-\frac{x}{y^2} \right) + c'(y) = \frac{x}{x^2 + y^2} + c'(y).$$

Αυτό όμως από την υπόθεση συνεπάγεται ότι $c'(y) = 0$, για κάθε $y > 0$ και συνεπώς $c(y) = c_1 \in \mathbb{R}$. Αντικαθιστώντας παίρνουμε ότι

$$f(x, y) = -\arctan \frac{x}{y} + c_1, \quad \text{για κάθε } (x, y) \in \Omega.$$

Για $c_1 = 0$ η $f(x, y) = -\arctan \frac{x}{y}$, $(x, y) \in \Omega$ είναι μια συνάρτηση με $\vec{F} = \nabla f$ στο Ω .

(β) Λόγω της Πρότασης 10.2.7, επειδή $\gamma^* \subseteq \Omega$ και η γ είναι τμηματικά λεία, έχουμε ότι

$$\int_{\gamma} \vec{F} = \int_{\gamma} \nabla f = f(2, 2) - f(0, 2) = -\arctan 1 = -\frac{\pi}{4}.$$

Σημειώνουμε ότι το πεδίο $\vec{F}$ δεν είναι συντηρητικό στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Αποδεικνύεται ότι για Ω ανοικτό και συνεκτικό, ισχύει και το αντίστροφο του Πορισματος 10.2.12.

Θεώρημα 10.2.14. Εάν $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό συνεκτικό και $\vec{F} = (P, Q) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ συνεχές πεδίο τέτοιο ώστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $\vec{F}$ είναι ανεξάρτητο του δρόμου, δηλαδή αν $u_0, u_1 \in \Omega$ και $\gamma, \tilde{\gamma}$ τμηματικά λείες καμπύλες με $\gamma^*, \tilde{\gamma}^* \subseteq \Omega$ και κοινά άκρα u_0, u_1 , τότε

$$\int_{\gamma} \vec{F} = \int_{\tilde{\gamma}} \vec{F}.$$

Τότε το $\vec{F}$ είναι συντηρητικό.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $(0, 0) \in \Omega$. Για κάθε $(x, y) \in \Omega$ επιλέγουμε τμηματικά λεία καμπύλη γ που συνδέει τα $(0, 0)$, (x, y) με $\gamma^* \subseteq \Omega$ και θέτουμε

$$f(x, y) = \int_{\gamma} \vec{F}.$$

Η f είναι καλώς ορισμένη διότι το $\int_{\gamma} \vec{F}$ είναι ανεξάρτητο της καμπύλης γ που συνδέει τα $(0, 0)$, (x, y) . Θα δείξουμε ότι $f_x = P$ και $f_y = Q$ στο Ω .

Έστω $(x_0, y_0) \in \Omega$. Αφού το Ω είναι ανοικτό, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $B_{\delta}(x_0, y_0) \subseteq \Omega$. Επιλέγουμε $h \in \mathbb{R}$ με $|h| < \delta$.

Έστω γ τμηματικά λεία καμπύλη με άκρα $(0, 0)$, (x_0, y_0) ώστε $\gamma^* \subseteq \Omega$, και η το ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το (x_0, y_0) και πέρας το $(x_0 + h, y_0)$. Τότε $\eta^* \subseteq B_{\delta}(x_0, y_0) \subseteq \Omega$. Θέτουμε $\Gamma = \gamma + \eta$ οπότε $\Gamma^* = \gamma^* \cup \eta^*$ και η Γ συνδέει τα $(0, 0)$, $(x_0 + h, y_0)$.

Από τον ορισμό της f έχουμε

$$f(x_0 + h, y_0) = \int_{\Gamma} \vec{F} = \int_{\gamma} \vec{F} + \int_{\eta} \vec{F} = f(x_0, y_0) + \int_{\eta} \vec{F},$$

δηλαδή

$$f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) = \int_{\eta} (P dx + Q dy) = \int_{x_0}^{x_0+h} P(x, y_0) dx$$

(σημειώνουμε ότι για $(x, y) \in \eta^*$ έχουμε ότι $x_0 \leq x \leq x_0 + h$, $y = y_0$) και συνεπώς

$$\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} P(x, y_0) dx \rightarrow P(x_0, y_0),$$

καθώς $h \rightarrow 0$ (γιατί;). Συνεπώς,

$$f_x(x_0, y_0) = P(x_0, y_0).$$

Όμοια βρίσκουμε ότι

$$f_y(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0).$$

Αρα $\vec{F} = \nabla f$ στο Ω .

Στη γενική περίπτωση επιλέγουμε $(x_1, y_1) \in \Omega$ και εφαρμόζουμε το παραπάνω για το

$$\Omega' = \{(x - x_1, y - y_1) : (x, y) \in \Omega\}$$

και το πεδίο $\vec{G} : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}^2$ με

$$\vec{G}(t, s) = \vec{F}(t + x_1, s + y_1), \quad \text{για κάθε } (t, s) \in \Omega'.$$

□

Πόρισμα 10.2.15. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, συνεκτικό, $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ συντηρητικό πεδίο και $(x_1, y_1) \in \Omega$. Για κάθε $(x, y) \in \Omega$, θέτουμε

$$f(x, y) = \int_{\gamma} \vec{F},$$

όπου γ τυχούσα τμηματικά λεία καμπύλη του Ω με άκρα $(x_1, y_1), (x, y)$. Τότε, $\vec{F} = \nabla f$ στο Ω .

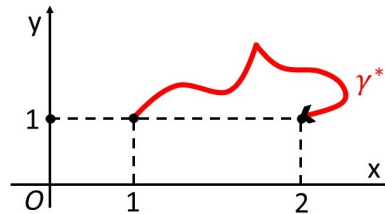
Παράδειγμα 10.2.16. Δίνεται το χωρίο $\Omega = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$ και το διανυσματικό πεδίο $\vec{F} = (P, Q) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ με

$$P(x, y) = \frac{1}{xy} + x^2 + y^2, \quad Q(x, y) = -\frac{\ln x}{y^2} + 2xy + y^2.$$

Δίνεται ότι το $\vec{F}$ είναι συντηρητικό.

(α) Να βρείτε $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ κλάσης C^1 με $\vec{F} = \nabla f$ στο Ω .

(β) Να βρείτε το $\int_{\gamma} \vec{F}$, όπου γ η καμπύλη του σχήματος.



(α) Έστω $(x_0, y_0) \in \Omega$, $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, όπου γ_1 το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $(1, 1), (x_0, 1)$ και γ_2 το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $(x_0, 1), (x_0, y_0)$.

Έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} &= \int_{\gamma_1} \vec{F} + \int_{\gamma_2} \vec{F} = \int_1^{x_0} P(x, 1) dx + \int_1^{y_0} Q(x_0, y) dy \\ &= \int_1^{x_0} \left(\frac{1}{x} + x^2 + 1 \right) dx + \int_1^{y_0} \left(-\frac{\ln x_0}{y^2} + 2x_0 y + y^2 \right) dy \\ &= \frac{\ln x_0}{y_0} + \frac{x_0^3 + y_0^3}{3} + x_0 y_0^2 - \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Θέτουμε

$$f(x, y) = \frac{\ln x}{y} + \frac{x^3 + y^3}{3} + xy^2$$

και τότε $\vec{F} = \nabla f$ στο Ω .

(β) Έχουμε ότι

$$\int_{\gamma} \vec{F} = \int_{\gamma} \nabla f = f(2, 1) - f(1, 1) = \ln 2 + \frac{10}{3}.$$

Στη συνέχεια θα χαρακτηρίσουμε τα C^1 συντηρητικά πεδία $\vec{F} = (P, Q) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, για κατάλληλα χωρία $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.

Έστω $\vec{F} = (P, Q) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ συντηρητικό πεδίο ($\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό) κλάσης C^1 . Εάν $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ με $\vec{F} = \nabla f$, τότε $f_x = P$, $f_y = Q$ στο Ω . Αλλά P, Q κλάσης C^1 , οπότε f κλάσης C^2 και $f_{xy} = f_{yx}$. Συνεπώς $P_y = Q_x$, στο Ω .

Προκύπτει έτσι το ερώτημα αν η συνθήκη $P_y = Q_x$ είναι αρκετή ώστε το $\vec{F}$ να είναι συντηρητικό. Η απάντηση είναι θετική για συγκεκριμένη κλάση χωρίων Ω .

Ορισμός 10.2.17. Ένα σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ονομάζεται αστρόμορφο αν και μόνο αν υπάρχει $u_0 \in \Omega$ τέτοιο ώστε για κάθε $u \in \Omega$ ισχύει ότι $[u_0, u] \subseteq \Omega$.

Παραδείγματα 10.2.18. (α) Κάθε κυρτό σύνολο είναι αστρόμορφο.

(β) Ένα αστρόμορφο μη κυρτό σύνολο είναι αυτό στο Παράδειγμα 10.4.2.

Θεώρημα 10.2.19. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και αστρόμορφο και $\vec{F} = (P, Q) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ C^1 διανυσματικό πεδίο. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(α) το $\vec{F}$ είναι συντηρητικό

(β) $P_y = Q_x$ στο Ω .

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε την παρακάτω ενδιαφέρουσα εφαρμογή του θεωρήματος Fubini για το διπλό ολοκλήρωμα.

Θεώρημα 10.2.20 (εναλλαγή παραγώγου-ολοκληρώματος). Έστω $\varphi : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής, ώστε η $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ υπάρχει στο $[a, b] \times [c, d]$ και είναι συνεχής. Θέτουμε

$$F(x) = \int_c^d \varphi(x, t) dt \quad x \in [a, b].$$

Τότε, υπάρχει η F' στο $[a, b]$ και

$$F'(x) = \int_c^d \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) dt, \quad \text{για κάθε } x \in [a, b].$$

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή η $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ είναι συνεχής στο $T = [a, b] \times [c, d]$, είναι ομοιόμορφα συνεχής, οπότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $(x_1, t_1), (x_2, t_2) \in T$, αν $|x_1 - x_2| < \delta$, $|t_1 - t_2| < \delta$, τότε

$$(10.2.1) \quad \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_1, t_1) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_2, t_2) \right| < \frac{\varepsilon}{d - c}.$$

Έστω $x_0 \in (a, b)$ και $h \in \mathbb{R}$ με

$$0 < |h| < \min \{ \delta, x_0 - a, b - x_0 \}.$$

Τότε

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_c^d [\varphi(x_0 + h, t) - \varphi(x_0, t)] dt = \int_c^d \left(\int_{x_0}^{x_0+h} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(s, t) ds \right) dt.$$

Οπότε,

$$F(x_0 + h) - F(x_0) - h \int_c^d \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, t) dt = \int_c^d \left(\int_{x_0}^{x_0+h} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(s, t) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, t) \right] ds \right) dt$$

και συνεπώς από το Θεώρημα Fubini

$$F(x_0 + h) - F(x_0) - h \int_c^d \left(\int_{x_0}^{x_0+h} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, t) ds \right) dt = \int_{x_0}^{x_0+h} \left(\int_c^d \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(s, t) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, t) \right] dt \right) ds.$$

Εάν το s είναι μεταξύ των x_0 και $x_0 + h$, έχουμε $|s - x_0| \leq |h| < \delta$, οπότε λόγω της (10.2.1)

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(s, t) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, t) \right| < \frac{\varepsilon}{d - c}, \quad \text{για κάθε } t \in [c, d]$$

και επομένως

$$\left| \int_c^d \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(s, t) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, t) \right] dt \right| \leq (d - c) \frac{\varepsilon}{d - c} = \varepsilon,$$

για κάθε s μεταξύ x_0 , $x_0 + h$. Από αυτό παίρνουμε ότι

$$\left| F(x_0 + h) - F(x_0) - h \int_c^d \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, t) dt \right| \leq |x_0 + h - x_0| \varepsilon = \varepsilon |h|$$

το οποίο συνεπάγεται ότι

$$\left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - \int_c^d \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, t) dt \right| \leq \varepsilon$$

για όλα τα h με $0 < |h| < \min \{\delta, x_0 - a, b - x_0, \delta\}$. Οπότε από τον ορισμό του ορίου έχουμε ότι η F είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με

$$F'(x_0) = \int_c^d \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, t) dt.$$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι η τελευταία ισχύει και για $x_0 = a$ ή b . □

Απόδειξη του Θεωρήματος 10.2.19. (α) $\implies$ (β): Έστω $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ με $\vec{F} = \nabla f$ κλάσης C^2 με $\vec{F} = \nabla f$ στο Ω . Τότε $f_x = P$, $f_y = Q$ και συνεπώς $P_y = f_{xy} = f_{yx} = Q_x$.

(β) $\implies$ (α): Επειδή το Ω είναι αστρώμορφο, υπάρχει $u_0 \in \Omega$ τέτοιο ώστε για κάθε $u \in \Omega$ ισχύει ότι $[u_0, u] \subseteq \Omega$.

Υποθέτουμε αρχικά ότι $u_0 = (0, 0)$. Τότε για κάθε $(x, y) \in \Omega$ και $t \in [0, 1]$ έχουμε ότι

$$(1 - t)(0, 0) + t(x, y) \in \Omega$$

δηλαδή $(tx, ty) \in \Omega$ για κάθε $(x, y) \in \Omega$ και $t \in [0, 1]$.

Σταθεροποιούμε $(x, y) \in \Omega$, θεωρούμε την $\gamma(t) = (tx, ty)$, $t \in [0, 1]$, και ορίζουμε

$$f(x, y) = \int_{\gamma} \vec{F} = \int_0^1 [P(tx, ty), Q(tx, ty)] \cdot \gamma'(t) dt$$

οπότε

$$f(x, y) = \int_{\gamma} \vec{F} = \int_0^1 [P(tx, ty)x + Q(tx, ty)y] dt, \quad \text{για κάθε } (x, y) \in \Omega.$$

Σταθεροποιούμε $t \in [0, 1]$ και θέτουμε

$$\varphi(x, y) = P(tx, ty)x + Q(tx, ty)y, \quad \text{για κάθε } (x, y) \in \Omega.$$

Τότε

$$\varphi_x = P(tx, ty) + xtP_x(tx, ty) + ytQ_x(tx, ty) = P(tx, ty) + xtP_x(tx, ty) + ytP_y(tx, ty)$$

και συνεπώς

$$\varphi_x = P(tx, ty) + t \frac{d}{dt}[P(tx, ty)].$$

Οπότε χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 10.2.20

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \int_0^1 (P(tx, ty) + t \frac{d}{dt}[P(tx, ty)]) dt \\ &= \int_0^1 P(tx, ty) dt + tP(tx, ty) \Big|_0^1 - \int_0^1 P(tx, ty) dt = P(x, y), \end{aligned}$$

και συνεπώς $f_x = P$.

Όμοια δείχνουμε ότι $f_y = Q$ και συνεπώς $\vec{F} = \nabla f$.

Στη γενική περίπτωση που $u_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$ με $[u_0, u] \subseteq \Omega$, για κάθε $u \in \Omega$, εφαρμόζουμε το προηγούμενο για το ανοικτό σύνολο

$$\Omega' = \{(x - x_0, y - y_0) : (x, y) \in \Omega\}$$

και το πεδίο

$$\vec{G}(s, t) = \vec{F}(s + x_0, t + y_0), \quad (s, t) \in \Omega'.$$

□

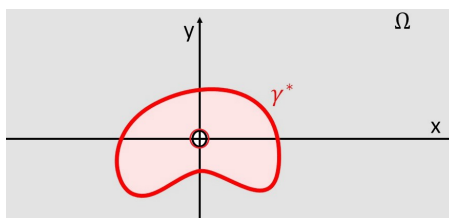
Το Θεώρημα 10.2.19 επεκτείνεται για Ω απλά συνεκτικό.

Ορισμός 10.2.21. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και συνεκτικό. Το Ω λέγεται απλά συνεκτικό αν για κάθε απλή, κλειστή καμπύλη γ με $\gamma^* \subseteq \Omega$, ισχύει ότι $\text{int}(\gamma^*) \subseteq \Omega$. (το Ω είναι πεδίο χωρίς οπές).

Παραδείγματα 10.2.22. (α) Κάθε ανοικτός δίσκος είναι απλά συνεκτικό σύνολο.

(β) Το $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}$ είναι απλά συνεκτικό.

(γ) Το $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ δεν είναι απλά συνεκτικό. Στο σχήμα $\gamma^* \subseteq \Omega$ αλλά $\text{int}(\gamma^*) \not\subseteq \Omega$ αφού $(0, 0) \in \text{int}(\gamma^*)$.



(δ) Κάθε ανοικτό και κυρτό ή γενικότερα αστρώμορφο σύνολο είναι απλά συνεκτικό.

Θεώρημα 10.2.23 (γενίκευση του Θεωρήματος 10.2.19). Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ απλά συνεκτικό και $\vec{F} = (P, Q) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ C^1 διανυσματικό πεδίο. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(i) το $\vec{F}$ είναι συντηρητικό

(ii) $P_y = Q_x$ στο Ω .

Σημαντικό σχόλιο: Η υπόθεση ότι το Ω είναι απλά συνεκτικό δεν μπορεί γενικά να παραλειφθεί.

Παράδειγμα 10.2.24.

$$P = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad Q = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} = \Omega.$$

Παρόλο που $P_y = Q_x$ στο Ω το $\vec{F} = (P, Q)$ δεν είναι συντηρητικό. Φυσικά το Ω δεν είναι απλά συνεκτικό. (Δείξτε ότι το πεδίο $\vec{G} = (Q, -P)$ είναι συντηρητικό στο Ω .)

Το παρακάτω θεώρημα δίνει πλήρη χαρακτηρισμό των C^1 συντηρητικών πεδίων για απλά συνεκτικά χωρία.

Θεώρημα 10.2.25 (γενίκευση του Θεωρήματος 10.2.19). Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ απλά συνεκτικό και $\vec{F} = (P, Q) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ C^1 διανυσματικό πεδίο. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

- (α) Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του $\vec{F}$ είναι ανεξάρτητο του δρόμου.
- (β) $\int_\gamma \vec{F} = 0$, για κάθε κλειστή, τμηματικά λεία καμπύλη γ με $\gamma^* \subseteq \Omega$.
- (γ) $P_y = Q_x$ στο Ω .
- (δ) Το $\vec{F}$ είναι συντηρητικό.

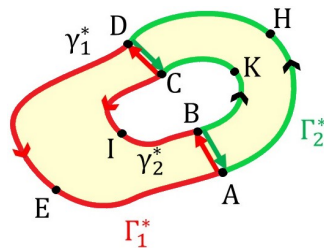
Επιπλέον, αποδεικνύεται η παρακάτω ισχυροποίηση του Θεωρήματος 10.2.25

Θεώρημα 10.2.26 (γενίκευση του Θεωρήματος 10.2.19). Έστω γ απλή κλειστή, τμηματικά λεία καμπύλη με απλά συνεκτικό εσωτερικό $\Omega = \text{int}(\gamma^*)$ και $\vec{F} = (P, Q) : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$ κλάσης C^1 διανυσματικό πεδίο. Εάν $P_y = Q_x$ στο Ω , τότε $\int_\gamma \vec{F} = 0$.

Θεώρημα 10.2.27 (αρχή παραμόρφωσης). Έστω γ_1, γ_2 απλές κλειστές, θετικά προσανατολισμένες, τμηματικά λείες καμπύλες με $\gamma_2^* \subseteq \text{int}(\gamma_1^*)$ και $\vec{F} = (P, Q)$ διανυσματικό πεδίο κλάσης C^1 στο χωρίο Ω μεταξύ των γ_1^*, γ_2^* και συνεχές στο $\gamma_1^* \cup \gamma_2^*$. Αν $P_y = Q_x$ στο Ω , τότε

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} = \int_{\gamma_2} \vec{F}.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τις καμπύλες Γ_1, Γ_2 όπως φαίνονται στο σχήμα.



Οι Γ_1, Γ_2 είναι απλές κλειστές τμηματικά λείες με απλά συνεκτικά εσωτερικά

$$\Omega_1 = \text{int}(\Gamma_1^*), \quad \Omega_2 = \text{int}(\Gamma_2^*).$$

Επειδή $P_y = Q_x$ στα Ω_1, Ω_2 , το $\vec{F}$ είναι συντηρητικό στα Ω_1, Ω_2 οπότε από το Θεώρημα 10.2.26 έχουμε ότι $\int_{\Gamma_1} \vec{F} = \int_{\Gamma_2} \vec{F}$ και συνεπώς

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} = \int_{\gamma_2} \vec{F}.$$

□

Παράδειγμα 10.2.28. Να υπολογιστεί το

$$\int_{\gamma} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy,$$

όπου γ η θετικά προσανατολισμένη έλλειψη

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0.$$

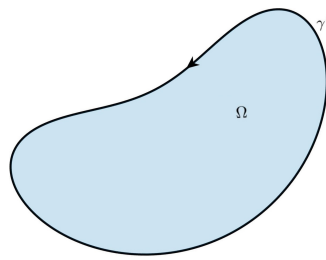
Θεωρούμε θετικά προσανατολισμένο κύκλο γ_R κέντρου $(0, 0)$ και ακτίνας $R > 0$ με $\gamma_R^* \subseteq \gamma^*$. Επειδή $P_y = Q_x$ στο χωρίο μεταξύ των γ_R^* και γ^* το Θεώρημα 10.2.27 δίνει

$$\int_{\gamma} \vec{F} = \int_{\gamma_R} \vec{F} = 2\pi.$$

10.3 Θεώρημα Green

Θεώρημα 10.3.1. Έστω γ απλή, κλειστή, θετικά προσανατολισμένη τμηματικά λεία καμπύλη με απλά συνεκτικό εσωτερικό $\Omega = \text{int}(\gamma^*)$ και $P, Q : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις, οι οποίες είναι κλάσης C^1 στο Ω . Τότε,

$$\int_{\gamma} (P dx + Q dy) = \iint_{\Omega} (Q_x - P_y) dx dy.$$

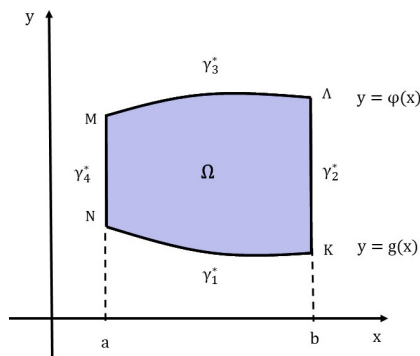


Θα δώσουμε την απόδειξη για την περίπτωση που το Ω είναι x -απλό και y -απλό ταυτόχρονα.

Λήμμα 10.3.2. Έστω γ, Ω, P όπως στο Θεώρημα 10.3.1. Υποθέτουμε ότι το Ω είναι x -απλό. Τότε,

$$\int_{\gamma} P dx = - \iint_{\Omega} P_y dx dy.$$

Απόδειξη. Έχουμε ότι $\Omega = \{(x, y) \mid a < x < b, g(x) \leq y \leq \varphi(x)\}$, όπου $\varphi, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς με $g \leq \varphi$.



Γράφουμε $\partial\Omega = \gamma = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 + \gamma_4$, όπου:

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= (t, g(t)), & \gamma_3(t) &= (t, \varphi(t)), & t &\in [a, b] \\ \gamma_2 &= \overrightarrow{K\Lambda}, & \gamma_4 &= \overrightarrow{MN}.\end{aligned}$$

Επειδή για κάθε $(x, y) \in \gamma_2^* \cup \gamma_4^*$ το x είναι σταθερό, έχουμε

$$\int_{\gamma_2} P dx = \int_{\gamma_4} P dx = 0,$$

άρα

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} P dx &= \int_{\gamma_1} P dx + \int_{\gamma_2} P dx - \int_{\gamma_3} P dx + \int_{\gamma_4} P dx = \int_a^b P(t, g(t)) dt - \int_a^b P(t, \varphi(t)) dt \\ &= \int_a^b [P(t, g(t)) - P(t, \varphi(t))] dt.\end{aligned}$$

Ταυτόχρονα,

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} P_y dx dy &= \int_a^b \left[\int_{g(t)}^{\varphi(t)} P_y(t, y) dy \right] dt = \int_a^b [P(t, \varphi(t)) - P(t, g(t))] dt \\ &= - \int_{\gamma} P dx,\end{aligned}$$

και έπεται το λήμμα. □

Λήμμα 10.3.3. Έστω γ , Ω , Q όπως στο Θεώρημα 10.3.1. Υποθέτουμε ότι το Ω είναι y -απλό. Τότε,

$$\int_{\gamma} Q dy = \iint_{\Omega} Q_x dx dy.$$

Η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτήν του Λήμματος 10.3.2.

Απόδειξη του Θεωρήματος 10.3.1 για Ω x -απλό και y -απλό. Χρησιμοποιώντας τα λήμματα γράφουμε

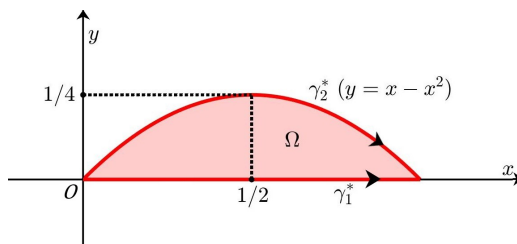
$$\begin{aligned}\int_{\gamma} (P dx + Q dy) &= \int_{\gamma} P dx + \int_{\gamma} Q dy = - \iint_{\Omega} P_y dx dy + \iint_{\Omega} Q_x dx dy \\ &= \iint_{\Omega} (Q_x - P_y) dx dy.\end{aligned}$$

□

Παραδείγματα 10.3.4. (1α) Να επαληθεύσετε το θεώρημα Green για το διανυσματικό πεδίο $\vec{F} = (-y, x)$ και το χωρίο Ω που φράσσεται από τις

$$y = x - x^2, \quad y = 0.$$

Απόδειξη. Έχουμε $y = x - x^2 = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ (παραβολή με κορυφή $(1/2, 1/4)$).



Θέτουμε $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$, όπου

$$\gamma_1(t) = (t, 0), \quad t \in [0, 1]$$

$$\gamma_2(t) = (t, t - t^2), \quad t \in [0, 1]$$

Τότε,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \vec{F} &= \int_{\gamma_1} -y dx = \int_0^1 0 dx = 0, \\ \int_{\gamma_2} \vec{F} &= \int_{\gamma_2} (-y dx + x dy) = \int_0^1 [(t^2 - t) \cdot 1 + t(1 - 2t)] dt = \dots = -1/3 \\ \int_{\partial\Omega=\gamma} \vec{F} &= 0 - (-1/3) = 1/3. \end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά,

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} (Q_x - P_y) dx dy &= \iint_{\Omega} (1 + 1) dx dy = 2 \iint_{\Omega} dx dy = 2 \int_0^1 \left(\int_0^{x-x^2} dy \right) dx \\ &= 2 \int_0^1 (x - x^2) dx = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = 1/3. \end{aligned}$$

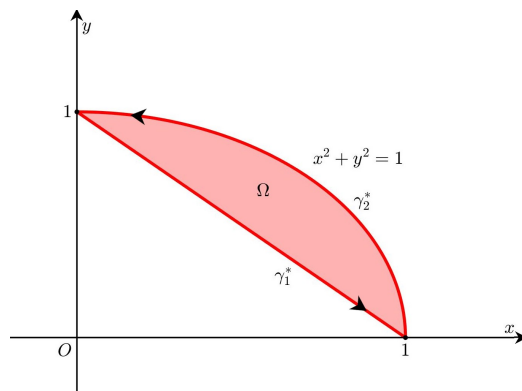
□

(1β) Να επαληθεύσετε το θεώρημα Green για το διανυσματικό πεδίο $\vec{F} = (-y, x)$ και το χωρίο Ω που φράσσεται από τις

$$x + y = 1, \quad x^2 + y^2 = 1$$

και βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο.

Απόδειξη.



Έχουμε

$$\gamma_1(t) = (t, 1-t) \ , \quad t \in [0, 1]$$

$$\gamma_2(t) = (\cos t, \sin t) \ , \quad t \in [0, \pi/2]$$

$$\partial\Omega = \gamma = \gamma_1 + \gamma_2$$

άρα

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} = \int_{\gamma_1} (-y dx + x dy) = \int_0^1 [-(1-t) \cdot 1 + t \cdot (-1)] dt = \int_0^1 (-1) dt = -1 \ ,$$

$$\int_{\gamma_2} \vec{F} = \int_{\gamma_2} (-y dx + x dy) = \int_0^{\pi/2} [-\sin t(-\sin t) + \cos t \cos t] = \pi/2$$

$$\int_{\gamma} \vec{F} = \int_{\gamma_1} \vec{F} + \int_{\gamma_2} \vec{F} = \frac{\pi}{2} - 1 \ .$$

Από την άλλη πλευρά,

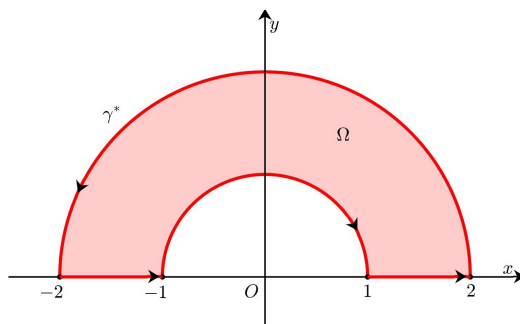
$$\iint_{\Omega} (Q_x - P_y) dx dy = 2 \iint_{\Omega} dx dy = 2 \text{ Ευβ}(\Omega) = 2 \left(\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 1^2 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \right) = 2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{2} - 1 \ .$$

□

(2) Να υπολογίσετε το $\int_{\gamma} (y^2 dx + 3xy dy)$, όπου γ το θετικά προσανατολισμένο σύνορο του χωρίου

$$\Omega = \{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 < 4, \ y > 0\} \ .$$

Απόδειξη.



Έχουμε ότι

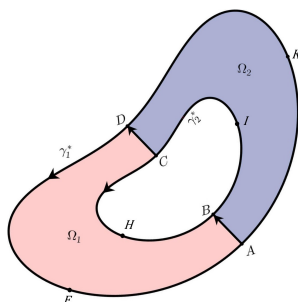
$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} (Pdx + Qdy) &= \iint_{\Omega} (Q_x - P_y) dx dy = \iint_{\Omega} (3y - 2y) dx dy \\
 &= \iint_{\Omega} y dx dy \quad \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \varphi \leq \pi \end{array} = \int_0^{\pi} \left(\int_1^2 r \sin \varphi r dr \right) d\varphi \\
 &= \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \cdot \int_1^2 r^2 dr = -\cos \varphi \Big|_0^{\pi} \cdot \frac{r^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{2}{3}(8 - 1) = 14/3 .
 \end{aligned}$$

□

Θεώρημα 10.3.5 (γενίκευση θεωρήματος Green). Έστω γ_1, γ_2 απλές, κλειστές, θετικά προσανατολισμένες τμηματικά λείες καμπύλες με $\gamma_2^* \subset \text{int}(\gamma_1^*)$. Υποθέτουμε ότι οι P, Q είναι συνεχείς στο $\gamma_1^* \cup \gamma_2^*$ και κλάσης C^1 στο χωρίο Ω μεταξύ των γ_1^*, γ_2^* . Τότε,

$$\iint_{\Omega} (Q_x - P_y) dx dy = \int_{\gamma_1} (Pdx + Qdy) - \int_{\gamma_2} (Pdx + Qdy) .$$

Απόδειξη.



Θέτουμε

$$\begin{aligned}
 \Gamma_1 &= \left(D \xrightarrow{\gamma_1} E \right) + \left(E \xrightarrow{\gamma_1} A \right) + A\vec{B} + \left(B \xrightarrow{-\gamma_2} H \right) + \left(H \xrightarrow{-\gamma_2} C \right) + C\vec{D} , \\
 \text{int}(\Gamma_1^*) &= \Omega_1
 \end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα Green στο Ω_1 :

$$(I) \quad \iint_{\Omega_1} (Q_x - P_y) dx dy = \int_{\Gamma_1} (Pdx + Qdy) .$$

Τώρα θέτουμε

$$\begin{aligned}
 \Gamma_2 &= \left(A \xrightarrow{\gamma_1} K \right) + \left(K \xrightarrow{\gamma_1} D \right) + D\vec{C} + \left(C \xrightarrow{-\gamma_2} I \right) + \left(I \xrightarrow{-\gamma_2} B \right) + B\vec{A} \\
 \text{int}(\Gamma_2^*) &= \Omega_2
 \end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα Green στο Ω_2 :

$$(II) \quad \iint_{\Omega_2} (Q_x - P_y) dx dy = \int_{\Gamma_2} (P dx + Q dy) .$$

Έπεται ότι

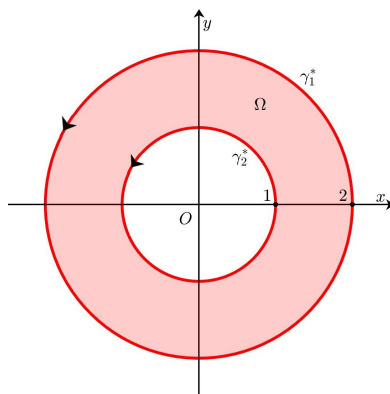
$$\iint_{\Omega} (Q_x - P_y) dx dy = \dots = \int_{\gamma_1} (P dx + Q dy) - \int_{\gamma_2} (P dx + Q dy) .$$

□

Παράδειγμα 10.3.6. Να επαληθεύσετε το γενικευμένο θεώρημα Green για το διανυσματικό πεδίο $\vec{F} = (y^3, -x^3)$ και το χωρίο

$$\Omega = \{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 < 4\} .$$

Απόδειξη.



Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} (Q_x - P_y) dx dy &= \iint_{\Omega} (-3x^2 - 3y^2) dx dy \\ &= -3 \iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy \quad \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} = -3 \int_0^{2\pi} \int_1^2 r^2 r dr d\varphi \\ &= -6\pi \frac{r^4}{4} \Big|_1^2 = -\frac{3\pi}{2} \cdot 15 = -45\pi/2 . \end{aligned}$$

Εάν $\gamma_R(t) = R(\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, τότε

$$\begin{aligned} I_R &= \int_{\gamma_R} (y^3 dx - x^3 dy) = \int_0^{2\pi} [R^3 \sin^3 t (-R \sin t) - R^3 \cos^3 t R \cos t] dt = -R^4 \int_0^{2\pi} (\sin^4 t + \cos^4 t) dt \\ &= -R^4 \int_0^{2\pi} (1 - 2 \sin^2 t \cos^2 t) dt \end{aligned}$$

Όμως,

$$\int_0^{2\pi} 2 \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2(2t) dt = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} [1 - \cos(4t)] dt = \pi/2$$

άρα

$$I_R = -R^4(2\pi - \pi/2) = -\frac{3}{2}\pi R^4.$$

Έπεται ότι

$$\int_{\gamma_1} (Pdx + Qdy) - \int_{\gamma_2} (Pdx + Qdy) = -\frac{3\pi}{2} (2^4 - 1^4) = -\frac{45\pi}{2}.$$

□

10.4 Υπολογισμός εμβαδού με επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

Πρόταση 10.4.1. Έστω γ απλή, κλειστή, θετικά προσανατολισμένη τμηματικά λεία καμπύλη με απλά συνεκτικό εσωτερικό Ω . Τότε,

$$\text{Εμβ}(\Omega) = \frac{1}{2} \int_{\gamma} (-ydx + xdy) = - \int_{\gamma} ydx = \int_{\gamma} xdy.$$

Απόδειξη. Για $P = -y$, $Q = x$, από το θεώρημα Green παίρνουμε

$$\int_{\gamma} (-ydx + xdy) = \int_{\gamma} (Pdx + Qdy) = \iint_{\Omega} (Q_x - P_y) dxdy = \iint_{\Omega} (1 + 1) dxdy = 2 \text{ Εμβ}(\Omega).$$

Για $P = -y$, $Q = 0$, το θεώρημα Green μας δίνει

$$\int_{\gamma} -ydx = \iint_{\Omega} 1 dxdy = \text{Εμβ}(\Omega).$$

Για $Q = x$, $P = 0$, το θεώρημα Green μας δίνει

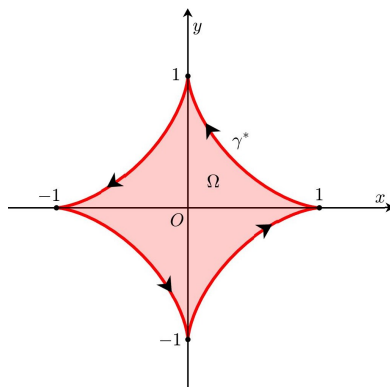
$$\int_{\gamma} xdy = \iint_{\Omega} 1 dxdy = \text{Εμβ}(\Omega).$$

□

Παράδειγμα 10.4.2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που φράσσεται από το αστεροειδές

$$\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Απόδειξη.



Η γ είναι θετικά προσανατολισμένη αφού $0 < \pi/2 < \pi$

$\implies (1, 0) = \gamma(0)$ προηγείται του $\gamma(\pi/2) = (0, 1)$, $(0, 1) = \gamma(\pi/2)$ προηγείται του $\gamma(\pi) = (-1, 0)$.

Επομένως,

$$\begin{aligned} 2 \cdot \text{Εμβ}(\Omega) &= \int_{\gamma} (-y dx + x dy) = \int_0^{2\pi} [(-\sin^3 t)(-3 \cos^2 t \sin t) + \cos^3 t(3 \sin^2 t \cos t)] dt \\ &= 3 \int_0^{2\pi} (\sin^4 t \cos^2 t + \sin^2 t \cos^4 t) dt = 3 \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t (\sin^2 t + \cos^2 t) dt \\ &= \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2(2t) dt = \frac{3}{8} \int_0^{2\pi} [1 - \cos(4t)] dt = \frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

άρα $\text{Εμβ}(\Omega) = 3\pi/8$. □

10.5 Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στον χώρο

10.5.1 Βασικοί ορισμοί

Οι βασικοί ορισμοί που δώσαμε για τις καμπύλες στο επίπεδο γενικεύονται άμεσα στον χώρο.

Ορισμός 10.5.1. Καμπύλη στον $\mathbb{R}^3$ είναι μια συνεχής απεικόνιση $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$. Γράφουμε $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$ και λέμε ότι οι $x, y, z : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι οι συνιστώσες της γ . Το σύνολο $\gamma^* = \gamma([a, b])$ είναι το ίχνος της γ .

Παραδείγματα καμπυλών στον χώρο είναι τα ακόλουθα:

(α) $\gamma(t) = ((t-1)^2, t \sin(\pi t), \cos(\pi t))$, $t \in [0, 5]$.

(β) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$ (κυκλική έλικα).

Ορισμός 10.5.2. Μια καμπύλη $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ λέγεται κλειστή αν $\gamma(a) = \gamma(b)$, και απλή αν είναι «1-1» στο $[a, b]$, δηλαδή αν το γ^* δεν τέμνει τον εαυτό του.

Ορισμός 10.5.3. Αναπαραμέτρηση της γ είναι κάθε απεικόνιση της μορφής $\gamma \circ \varphi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$, όπου η φ είναι συνεχής, γνησίως αύξουσα και επί. Οι γ και $\gamma \circ \varphi$ έχουν την ίδια φορά διαγραφής και το ίδιο ίχνος.

Ορισμός 10.5.4. Λέμε ότι η $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$ είναι κλάσης C^1 αν οι $x, y, z : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι κλάσης C^1 . Η γ λέγεται λεία αν είναι κλάσης C^1 και $\gamma'(t) \neq (0, 0, 0)$ για κάθε $t \in [a, b]$. Παρατηρήστε ότι αν η $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι λεία καμπύλη και $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ είναι συνάρτηση κλάσης C^1 , επί, με $\varphi' > 0$ στο $[c, d]$, τότε η $\gamma \circ \varphi$ είναι λεία και

$$(\gamma \circ \varphi)'(t) = \varphi'(t)\gamma'(\varphi(t))$$

για κάθε $t \in [c, d]$.

Ορίζουμε το άθροισμα διαδοχικών καμπυλών και την αντίθετη καμπύλης ακριβώς όπως στην περίπτωση των επίπεδων καμπυλών, και λέμε ότι μια καμπύλη είναι τμηματικά λεία αν είναι το άθροισμα διαδοχικών λείων καμπυλών.

Ορισμός 10.5.5. Αν $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι μια λεία καμπύλη, τότε ορίζουμε το μήκος της γ ως εξής:

$$\|\gamma\| = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Εάν η γ είναι τμηματικά λεία και $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$, όπου γ_i διαδοχικές λείες καμπύλες, τότε το μήκος της γ ορίζεται να είναι το

$$\|\gamma\| = \sum_{i=1}^n \|\gamma_i\|.$$

Μπορούμε, όπως στην περίπτωση των επίπεδων καμπυλών, να ελέγξουμε ότι αν η $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι λεία και η $\gamma \circ \varphi$ είναι αναπαραμέτρηση της γ , τότε

$$\|\gamma \circ \varphi\| = \|\gamma\|.$$

Μια σημαντική διαφορά που εντοπίζουμε όταν μελετάμε καμπύλες στον $\mathbb{R}^3$, σε σχέση με τους ορισμούς που δώσαμε για καμπύλες στον $\mathbb{R}^2$, είναι ότι αν $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι μια μη επίπεδη απλή κλειστή καμπύλη στον $\mathbb{R}^3$, δεν ορίζεται γενικά η έννοια του εσωτερικού της γ και η έννοια της θετικά προσανατολισμένης καμπύλης.

10.5.2 Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στον χώρο

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα α' είδους στον χώρο ορίζεται όπως και στο επίπεδο. Έστω $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ καμπύλη κλάσης C^1 και έστω f συνεχής πραγματική συνάρτηση τέτοια ώστε να ορίζεται η σύνθεση $f(\gamma(t))$, $t \in [a, b]$ (ισοδύναμα το ίχνος της γ περιέχεται στο πεδίο ορισμού της f). Ορίζουμε ως επικαμπύλιο ολοκλήρωμα α' είδους της f κατά μήκος της καμπύλης γ τον αριθμό

$$\int_{\gamma} f = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2 + |z'(t)|^2} dt.$$

Δίνουμε τώρα τον ορισμό του επικαμπύλιου ολοκληρώματος (β' είδους) μιας διανυσματικής συνάρτησης πάνω σε μια καμπύλη.

Ορισμός 10.5.6. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ανοικτό, $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ λεία καμπύλη και $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ συνεχής

διανυσματική συνάρτηση. Ορίζουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $\vec{F}$ πάνω στην γ ως εξής:

$$\int_{\gamma} \vec{F} := \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

Εάν $\vec{F} = (P, Q, R)$, όπου $P, Q, R : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς, και $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$ τότε

$$\int_{\gamma} \vec{F} = \int_{\gamma} (P dx + Q dy + R dz),$$

όπου

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} P dx &= \int_a^b P(\gamma(t)) x'(t) dt \\ \int_{\gamma} Q dy &= \int_a^b Q(\gamma(t)) y'(t) dt \\ \int_{\gamma} R dz &= \int_a^b R(\gamma(t)) z'(t) dt. \end{aligned}$$

Τέλος, εάν γ είναι μια τμηματικά λεία καμπύλη με $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$ όπου οι γ_i είναι διαδοχικές λείες καμπύλες, τότε ορίζουμε

$$\int_{\gamma} \vec{F} = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} \vec{F}.$$

Παράδειγμα 10.5.7. Έστω ότι $\vec{F}(x, y, z) = (-y, x, z)$ και $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Έχουμε $\vec{F}(\gamma(t)) = (-\sin t, \cos t, t)$ και $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$, άρα

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t, t) \cdot (-\sin t, \cos t, 1) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t + t) dt = \int_0^{2\pi} (1 + t) dt = \int_0^{2\pi} dt + \int_0^{2\pi} t dt \\ &= 2\pi + \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{2\pi} = 2\pi + 2\pi^2 = 2\pi(1 + \pi). \end{aligned}$$

Παρατήρηση 10.5.8. Αν η καμπύλη $\gamma(t)$, $t \in [a, b]$ είναι απλή και λεία, τότε ορίζεται το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της γ

$$\vec{T}(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}.$$

Έχουμε

$$\int_{\gamma} \vec{F} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \vec{T}(t) \|\gamma'(t)\| dt.$$

Θέτοντας

$$f(t) = \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \vec{T}(t)$$

(δηλαδή $f(t)$ είναι η προβολή του πεδίου $\vec{F}$ στο μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα $\vec{T}(t)$) παίρνουμε

$$\int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \vec{T}(t) \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b f(t) \|\gamma'(t)\| dt = \int_{\gamma} f.$$

Συνεπώς,

$$\int_{\gamma} \vec{F} = \int_{\gamma} f$$

δηλαδή το ολοκλήρωμα β' είδους γράφεται ως ολοκλήρωμα α' είδους.

Παράδειγμα 10.5.9 (έργο και κινητική ενέργεια). Για ένα υλικό σημείο μάζας m που κινείται σε μια τροχιά $\gamma = \gamma(t)$, $t \in [a, b]$ υπό την επίδραση του πεδίου δυνάμεων $\vec{F}(x, y, z)$ ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα λέει ότι

$$\vec{F}(x, y, z) = m\gamma''(t).$$

Αν με

$$K(t) = \frac{1}{2}m\|\gamma'(t)\|^2 = \frac{1}{2}m\gamma'(t) \cdot \gamma'(t)$$

συμβολίσουμε την «κινητική ενέργεια», τότε το έργο που παράγεται ή καταναλώνεται στο χρονικό διάστημα $[a, b]$ είναι

$$\begin{aligned} W &= \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\gamma = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b m\gamma''(t) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b \left(\frac{1}{2}m\gamma'(t) \cdot \gamma'(t) \right)' dt = \int_a^b K'(t) dt \\ &= K(b) - K(a), \end{aligned}$$

δηλαδή το έργο που παράγεται ή καταναλώνεται κατά την μετακίνηση του υλικού σημείου στην καμπύλη από το σημείο $A(\gamma(a))$ στο σημείο $B(\gamma(b))$ είναι ίσο με τη διαφορά των κινητικών ενεργειών που έχει στις δύο αυτές θέσεις.

10.5.3 Ανεξαρτησία του ολοκληρώματος από τον δρόμο

Ορισμός 10.5.10. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ανοικτό. Ένα διανυσματικό πεδίο $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ λέγεται συντηρητικό αν υπάρχει $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ κλάσης C^1 τέτοια ώστε $\vec{F} = \nabla f$. Η f λέγεται συνάρτηση δυναμικού του $\vec{F}$.

Πρόταση 10.5.11. Έστω $\vec{F} = \nabla f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ συντηρητικό διανυσματικό πεδίο και $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ τμηματικά λεία καμπύλη. Τότε,

$$\int_{\gamma} \vec{F} = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = \int_{\gamma} \nabla f.$$

Πόρισμα 10.5.12. Έστω $\vec{F} = \nabla f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ συντηρητικό διανυσματικό πεδίο. Τότε, για κάθε κλειστή, τμηματικά λεία καμπύλη $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ ισχύει ότι

$$\int_{\gamma} \vec{F} = 0.$$

Πόρισμα 10.5.13. Έστω $\vec{F} = \nabla f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ συντηρητικό διανυσματικό πεδίο και $\gamma, \tilde{\gamma}$ τμηματικά λείες καμπύλες του Ω με κοινά άκρα. Τότε,

$$\int_{\gamma} \vec{F} = \int_{\tilde{\gamma}} \vec{F}.$$

Ορισμός 10.5.14. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ανοικτό συνεκτικό. Το Ω λέγεται απλά συνεκτικό αν κάθε απλή κλειστή τμηματικά λεία καμπύλη του Ω μπορεί να «συρρικνωθεί» με «συνεχή» τρόπο σε σημείο παραμένοντας εντός του Ω (είναι ομοτοπική με σημείο).

Πρόταση 10.5.15 (ανεξαρτησία από τον δρόμο). Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ απλά συνεκτικό σύνολο και $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ συνεχές διανυσματικό πεδίο. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (α) Το $\vec{F}$ είναι συντηρητικό.
- (β) Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $\vec{F}$ είναι ανεξάρτητο του δρόμου.

Επιπλέον, αν ισχύει μία από τις παραπάνω συνθήκες, και αν $(x_1, y_1, z_1) \in \Omega$, τότε μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση δυναμικού

$$f(x, y, z) = \int_{\gamma(x, y, z)} \vec{F}, \quad (x, y, z) \in \Omega$$

όπου $\gamma(x, y, z)$ είναι οποιαδήποτε καμπύλη του Ω που συνδέει το (x_1, y_1, z_1) με το (x, y, z) .

Ορισμός 10.5.16. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ανοικτό και $\vec{F} = (P, Q, R) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ διανυσματικό πεδίο κλάσης C^1 . Ο στροβιλισμός του $\vec{F}$ είναι η συνάρτηση $\text{rot } \vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ με

$$\text{rot } \vec{F}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (R_y - Q_z)\vec{i} + (P_z - R_x)\vec{j} + (Q_x - P_y)\vec{k}.$$

Το $\vec{F}$ λέγεται αστρόβιλο στο Ω αν $\text{rot } \vec{F} \equiv \vec{0}$ στο Ω .

Πρόταση 10.5.17. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ανοικτό και $\vec{F} = (P, Q, R) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ διανυσματικό πεδίο κλάσης C^1 . Αν το $\vec{F}$ είναι συντηρητικό, τότε το $\vec{F}$ είναι αστρόβιλο.

Απόδειξη. Επειδή το $\vec{F}$ είναι συντηρητικό, υπάρχει $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ κλάσης C^1 ώστε $\vec{F} = \nabla f$. Δηλαδή,

$$P = f_x, \quad Q = f_y, \quad R = f_z.$$

Ειδικότερα, η f είναι κλάσης C^2 . Τότε, από τις

$$R_y - Q_z = f_{zy} - f_{yz} = 0$$

$$P_z - R_x = f_{xz} - f_{zx} = 0$$

$$Q_x - P_y = f_{yx} - f_{xy} = 0$$

βλέπουμε ότι $\text{rot } \vec{F} \equiv \vec{0}$ στο Ω . □

Το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει. Δηλαδή, αν $\text{rot } \vec{F} \equiv \vec{0}$, δεν έπεται ότι το $\vec{F}$ είναι συντηρητικό. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε το $\vec{F} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$ στο $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$, μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι $Q_x = P_y$, $R_y = Q_z = 0$ και $P_z = R_x = 0$, άρα το $\vec{F}$ είναι αστρόβιλο στο Ω . Αν όμως θεωρήσουμε την κλειστή λεία καμπύλη $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$ στο Ω , τότε $\int_{\gamma} \vec{F} = 2\pi \neq 0$, και από το Πρόγραμμα 10.5.12 έπεται ότι το $\vec{F}$ δεν είναι συντηρητικό.

Παραδείγματα 10.5.18. (α) Το $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ είναι απλά συνεκτικό. Αν θεωρήσουμε τον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$ στο xy -επίπεδο, μπορούμε να τον στρέψουμε κατά 90° ώστε να γίνει παράλληλος στο xz -επίπεδο, χωρίς να τον παραμορφώσουμε. Ο νέος κύκλος μπορεί να συρρικνωθεί σε σημείο.

(β) Κάθε ανοικτό κυρτό σύνολο είναι απλά συνεκτικό.

(γ) Αν εξαιρέσουμε μια ευθεία από τον $\mathbb{R}^3$ τότε το χωρίο που προκύπτει δεν είναι απλά συνεκτικό.

(δ) Ο τόρος (σαμπρέλα) δεν είναι απλά συνεκτικό σύνολο.

Θεώρημα 10.5.19. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ απλά συνεκτικό σύνολο και $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ διανυσματικό πεδίο κλάσης C^1 . Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Το $\vec{F}$ είναι συντηρητικό.

(β) Το $\vec{F}$ είναι αστρόβιλο, δηλαδή $\text{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$.

(γ) Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $\vec{F}$ είναι ανεξάρτητο του δρόμου.

Για την συνεπαγωγή (α) $\implies$ (β) αρκεί να υποθέσουμε ότι το Ω είναι ανοικτό, και η συνεπαγωγή (α) $\implies$ (γ) ισχύει ακόμη και αν το Ω δεν είναι απλά συνεκτικό, αρκεί δηλαδή να είναι ανοικτό και συνεκτικό. Η υπόθεση της απλής συνεκτικότητας χρειάζεται μόνο για την συνεπαγωγή (β) $\implies$ (α).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11

Επιφανειακό ολοκλήρωμα

11.1 Επιφάνειες στον χώρο

11.1.1 Επιφάνειες

Ορισμός 11.1.1. Επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ είναι μια απεικόνιση $S : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$, όπου $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ κλειστό ορθογώνιο ή κλειστός δίσκος, τέτοια ώστε:

- (α) Η S είναι συνεχής.
- (β) Η S είναι C^1 στο $\Delta \setminus E$, όπου $E \subset \mathbb{R}^2$ σύνολο μέτρου 0.

Η εικόνα $S^* = S(\Delta)$ της S ονομάζεται **ίχνος** της S .

Εάν γράψουμε $S(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $(u, v) \in \Delta$, τότε οι $x, y, z : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχείς και C^1 στο $\Delta \setminus E$. Η S λέγεται **λεία** αν

$$\frac{\partial S}{\partial u} \times \frac{\partial S}{\partial v} \neq \vec{0}$$

για κάθε $(u, v) \in \Delta \setminus E$.

Εάν $\Phi(x, y, z) = 0$ είναι η καρτεσιανή εξίσωση της S^* , τότε παραγωγίζοντας ως προς u, v την $\Phi(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = 0$, όπου $(u, v) \in \Delta \setminus E$, παίρνουμε

$$\Phi_x x_u + \Phi_y y_u + \Phi_z z_u = 0$$

$$\Phi_x x_v + \Phi_y y_v + \Phi_z z_v = 0.$$

Ισοδύναμα,

$$\nabla \Phi \cdot \frac{\partial S}{\partial u} = \nabla \Phi \cdot \frac{\partial S}{\partial v} = 0,$$

δηλαδή το $\frac{\partial S}{\partial u} \times \frac{\partial S}{\partial v}$ είναι παράλληλο στο $\nabla \Phi$. Άρα, το $\frac{\partial S}{\partial u} \times \frac{\partial S}{\partial v}$ είναι κάθετο στην S^* στο σημείο $S(u, v)$, για κάθε $(u, v) \in \Delta \setminus E$.

Γράφουμε $S_u = \frac{\partial S}{\partial u}$ και $S_v = \frac{\partial S}{\partial v}$, οπότε

$$\frac{\partial S}{\partial u} \times \frac{\partial S}{\partial v} = S_u \times S_v.$$

Παράδειγμα 11.1.2. Έστω $R > 0$. Θεωρούμε την $S : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$, όπου $\Delta = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$, με

$$S(\vartheta, \varphi) = R(\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta).$$

Τότε,

$$S_{\vartheta} = R(\cos \vartheta \cos \varphi, \cos \vartheta \sin \varphi, -\sin \vartheta)$$

και

$$S_{\varphi} = R(-\sin \vartheta \sin \varphi, \sin \vartheta \cos \varphi, 0) = R \sin \vartheta (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0).$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} S_{\vartheta} \times S_{\varphi} &= R^2 \sin \vartheta \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos \vartheta \cos \varphi & \cos \vartheta \sin \varphi & -\sin \vartheta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} \\ &= R^2 \sin \vartheta (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta) = R \sin \vartheta S(\vartheta, \varphi). \end{aligned}$$

Έχουμε $\|S(\vartheta, \varphi)\| = R > 0$, άρα $\|S_{\vartheta} \times S_{\varphi}\| = R^2 \sin \vartheta > 0$ για κάθε $(\vartheta, \varphi) \in (0, \pi) \times [0, 2\pi] =: \Delta \setminus E$, όπου το $E = \{(0, \varphi) : \varphi \in [0, 2\pi]\} \cup \{(\pi, \varphi) : \varphi \in [0, 2\pi]\}$ έχει μέτρο 0. Συνεπώς, το S είναι λεία επιφάνεια με ίχνος

$$S^* = S(\Delta) = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$$

τη σφαίρα με κέντρο 0 και ακτίνα R .

Για κάθε $(\vartheta, \varphi) \in \Delta \setminus E$ το $S_{\vartheta} \times S_{\varphi}$ είναι κάθετο στην S^* . Είναι ομόρροπο με το διάνυσμα θέσης $S(\vartheta, \varphi)$ και «δείχνει» προς το εξωτερικό της σφαίρας εάν σχεδιαστεί με αρχή το σημείο $S(\vartheta, \varphi)$. Στα σημεία $S(0, \varphi) = (0, 0, R)$ και $S(\pi, \varphi) = (0, 0, -R)$ (τον «βόρειο» και τον «νότιο» πόλο αντίστοιχα) τα διανύσματα $(0, 0, R)$ και $(0, 0, -R)$ είναι επίσης κάθετα στη σφαίρα.

Παράδειγμα 11.1.3. Έστω $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ κλειστό ορθογώνιο ή κλειστός δίσκος και $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Υποθέτουμε ότι η $f|_{\Delta^\circ}$ είναι στην κλάση C^1 , όπου Δ° είναι το εσωτερικό του Δ .

Θεωρούμε την επιφάνεια $S : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $S(u, v) = (u, v, f(u, v))$. Τότε, η S είναι C^1 στο $\Delta^\circ = \Delta \setminus \partial\Delta$ και το $\partial\Delta$ έχει μέτρο 0. Για κάθε $(u, v) \in \Delta^\circ$ έχουμε

$$S_u \times S_v = (1, 0, f_u) \times (0, 1, f_v) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f_u \\ 0 & 1 & f_v \end{vmatrix} = (-f_u, -f_v, 1) \neq (0, 0, 0),$$

άρα η S είναι λεία. Η S^* είναι το γράφημα της f και το $(-f_u, -f_v, 1)$ είναι κάθετο στην S^* στο σημείο $S(u, v)$, για κάθε $(u, v) \in \Delta^\circ$.

Παράδειγμα 11.1.4. Έστω $R > 0$ και $\Delta = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq R^2\}$. Θεωρούμε την $S : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $S(u, v) = (u, v, \sqrt{R^2 - u^2 - v^2})$. Είναι ειδική περίπτωση του προηγούμενου παραδείγματος, με $f(u, v) = \sqrt{R^2 - u^2 - v^2}$. Η S είναι C^1 στο $\Delta^\circ = \{(u, v) : u^2 + v^2 < R^2\}$ και για κάθε $(u, v) \in \Delta^\circ$ το

$$S_u \times S_v = (-f_u, -f_v, 1) = \left(\frac{u}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}, \frac{v}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}, 1 \right) = \frac{1}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} S(u, v)$$

είναι κάθετο στην S^* και ομόρροπο με το διάνυσμα θέσης $S(u, v)$. Άρα, το $S_u \times S_v$ «δείχνει» στο «εξωτερικό» της επιφάνειας εάν σχεδιαστεί με αρχή το σημείο $S(u, v)$.

Έχουμε ότι $S^* = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$, το άνω ημισφαίριο με κέντρο το 0 και ακτίνα R . Εάν $u_1^2 + v_1^2 = R^2$ τότε το $(u_1, v_1, 0)$ είναι κάθετο στην S^* στο σημείο $(u_1, v_1, 0)$.

Παράδειγμα 11.1.5. Έστω $\Delta = [0, 2\pi] \times [a, b]$, όπου $a < b$. Θεωρούμε την $S : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $S(\varphi, z) = (\cos \varphi, \sin \varphi, z)$. Η $S^* = S([0, 2\pi] \times [a, b]) = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, a \leq z \leq b\}$ είναι κύλινδρος.

Για κάθε $(\varphi, z) \in \Delta$ έχουμε

$$S_\varphi \times S_z = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) \times (0, 0, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0) \neq (0, 0, 0),$$

άρα η S είναι λεία επιφάνεια. Παρατηρούμε ότι $(S_\varphi \times S_z) \cdot S(\varphi, z) = 1 > 0$, άρα η γωνία των δύο διανυσμάτων είναι οξεία, δηλαδή το διάνυσμα $S_\varphi \times S_z$ «δείχνει» στο «εξωτερικό» της S^* εάν σχεδιαστεί με αρχή το σημείο $S(\varphi, z)$.

Παράδειγμα 11.1.6. Έστω $R > 0$ και $b > 0$. Θεωρούμε το $\Delta = [0, 2\pi] \times [0, b]$ και την $S : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $S(\varphi, z) = \left(\frac{z}{R} \cos \varphi, \frac{z}{R} \sin \varphi, z\right)$. Εάν $x = \frac{z}{R} \cos \varphi$, $y = \frac{z}{R} \sin \varphi$, όπου $0 \leq z \leq b$, τότε $x^2 + y^2 = z^2/R^2$ και αφού $z \geq 0$ έχουμε $z = R\sqrt{x^2 + y^2}$. Επομένως, η $S^* = \{(x, y, z) : z = R\sqrt{x^2 + y^2}\}$ είναι κώνος.

Για κάθε $(\varphi, z) \in \Delta$ υπολογίζουμε το

$$\begin{aligned} S_\varphi \times S_z &= \left(-\frac{z}{R} \sin \varphi, \frac{z}{R} \cos \varphi, 0\right) \times \left(\frac{\cos \varphi}{R}, \frac{\sin \varphi}{R}, 1\right) \\ &= \frac{z}{R^2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ \cos \varphi & \sin \varphi & R \end{vmatrix} = \frac{z}{R^2} (R \cos \varphi, R \sin \varphi, -1) \neq (0, 0, 0) \end{aligned}$$

εάν $0 < z \leq b$, και το $E = \{(\varphi, 0) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ έχει μέτρο 0. Άρα, η S είναι λεία.

Θεωρούμε σαν αρχή του $S_\varphi \times S_z$ το $S(\varphi, z)$, οπότε το πέρασ του $S_\varphi \times S_z$ έχει διάνυσμα θέσης το

$$S(\varphi, z) + S_\varphi \times S_z = \frac{z}{R}(\cos \varphi, \sin \varphi, R) + \frac{z}{R}(\cos \varphi, \sin \varphi, -1/R) = \left(\frac{2z}{R} \cos \varphi, \frac{2z}{R} \sin \varphi, z\left(1 - \frac{1}{R^2}\right)\right) =: (A, B, \Gamma).$$

Εάν $R < 1$ τότε $\Gamma < 0$, άρα το (A, B, Γ) είναι εκτός του κώνου, ενώ εάν $R \geq 1$ έχουμε

$$\begin{aligned} R^2(A^2 + B^2) - \Gamma^2 &= 4z^2 - z^2\left(1 - \frac{1}{R^2}\right)^2 = z^2\left(4 - \left(1 - \frac{1}{R^2}\right)^2\right) \\ &= z^2 \frac{4R^4 - (R^2 - 1)^2}{R^4} = \frac{z^2}{R^4}(3R^4 + 2R^2 - 1) > 0 \end{aligned}$$

διότι $R \geq 1$, οπότε $0 \leq \Gamma < R\sqrt{A^2 + B^2}$ και το (A, B, Γ) είναι εκτός του κώνου. Συμπεραίνουμε έτσι ότι το $S_\varphi \times S_z$ «δείχνει» πάντα στο εξωτερικό του κώνου.

Παράδειγμα 11.1.7. Έστω $b > 0$ και $\Delta = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq b\}$. Θεωρούμε την $S : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $S(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$. Αν $f(u, v) = u^2 + v^2$ τότε

$$S_u \times S_v = (-f_u, -f_v, 1) = (-2u, -2v, 1) \neq (0, 0, 0)$$

για κάθε $(u, v) \in \Delta$, άρα η S είναι λεία. Παρατηρούμε ότι

$$(S_u \times S_v) \cdot S(u, v) = -(u^2 + v^2) \leq 0$$

για κάθε $(u, v) \in \Delta$, άρα το $S_u \times S_v$ «δείχνει» στο εσωτερικό της S^* αν σχεδιαστεί με αρχή το $S(u, v)$.

Ορισμός 11.1.8. Έστω $S : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$ λεία επιφάνεια. **Αναπαραμέτρηση** της S είναι μια απεικόνιση $\bar{S} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ της μορφής $\bar{S} = S \circ T$, όπου $D \subset \mathbb{R}^2$ κλειστό ορθογώνιο ή κλειστός δίσκος και $T : D \rightarrow \Delta$ 1-1 και επί C^1 συνάρτηση με $J_T(a, b) > 0$ για κάθε $(a, b) \in D$.

Πρόταση 11.1.9. Έστω $\Delta, D, S, T, \bar{S}$ όπως παραπάνω. Τότε, η $\bar{S}$ είναι λεία και

$$\bar{S}_a \times \bar{S}_b = J_T(a, b)(S_u \times S_v).$$

Ειδικότερα, τα $\bar{S}_a \times \bar{S}_b$ και $S_u \times S_v$ είναι ομόρροπα.

Απόδειξη. Έστω $T(a, b) = (u(a, b), v(a, b))$, $(a, b) \in D$. Αν $S(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $(u, v) \in \Delta$, έχουμε ότι

$$\bar{S}(a, b) = (x(T(a, b)), y(T(a, b)), z(T(a, b))).$$

Υπολογίζουμε τα

$$\begin{aligned} \bar{S}_a &= (x_u u_a + x_v v_a, y_u u_a + y_v v_a, z_u u_a + z_v v_a), \\ \bar{S}_b &= (x_u u_b + x_v v_b, y_u u_b + y_v v_b, z_u u_b + z_v v_b), \end{aligned}$$

οπότε

$$\bar{S}_a \times \bar{S}_b = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u u_a + x_v v_a & y_u u_a + y_v v_a & z_u u_a + z_v v_a \\ x_u u_b + x_v v_b & y_u u_b + y_v v_b & z_u u_b + z_v v_b \end{vmatrix}.$$

Η ελάσσων ορίζουσα τάξης 1×1 είναι η

$$\begin{vmatrix} y_u u_a + y_v v_a & z_u u_a + z_v v_a \\ y_u u_b + y_v v_b & z_u u_b + z_v v_b \end{vmatrix} = \det \left(\begin{bmatrix} u_a & v_a \\ u_b & v_b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{bmatrix} \right) = J_T \cdot \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}.$$

Η ελάσσων ορίζουσα τάξης 1×2 είναι η

$$\begin{vmatrix} x_u u_a + x_v v_a & z_u u_a + z_v v_a \\ x_u u_b + x_v v_b & z_u u_b + z_v v_b \end{vmatrix} = \det \left(\begin{bmatrix} u_a & v_a \\ u_b & v_b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{bmatrix} \right) = J_T \cdot \begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix}.$$

Η ελάσσων ορίζουσα τάξης 1×3 είναι η

$$\begin{vmatrix} x_u u_a + x_v v_a & y_u u_a + y_v v_a \\ x_u u_b + x_v v_b & y_u u_b + y_v v_b \end{vmatrix} = \det \left(\begin{bmatrix} u_a & v_a \\ u_b & v_b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{bmatrix} \right) = J_T \cdot \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}.$$

Άρα,

$$\begin{aligned}\overline{S}_a \times \overline{S}_b &= \left(J_T \cdot \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, -J_T \cdot \begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix}, J_T \cdot \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \right) \\ &= J_T \cdot \left(\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \right) \\ &= J_T \cdot (S_u \times S_v).\end{aligned}$$

□

11.1.2 Απλές κανονικές επιφάνειες

Θέτουμε

$$\begin{aligned}B &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}, \\ B^\circ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}, \\ T &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.\end{aligned}$$

Ορισμός 11.1.10. Μια λεία επιφάνεια S στον $\mathbb{R}^3$ λέγεται **απλή κανονική κλειστή επιφάνεια** αν υπάρχει $\varphi : B \rightarrow \mathbb{R}^3$ 1-1 και συνεχής, ώστε

$$\varphi(T) = S^*.$$

Το σύνολο $\varphi(B^\circ)$ λέγεται εσωτερικό της S^* και συμβολίζεται με $\text{int}(S^*)$.

Διαισθητικά, μια επιφάνεια είναι κλειστή αν είναι το σύνορο ενός φραγμένου στερεού. Εναλλακτικά, μια επιφάνεια είναι κλειστή αν για να μπορέσουμε να μεταβούμε από την «εξωτερική όψη» της στην «εσωτερική» πρέπει να «τρυπήσουμε» την επιφάνεια.

Θέτουμε

$$\begin{aligned}B_+ &= \{(x, y, z) \in B : z \geq 0\}, \\ B_+^\circ &= \{(x, y, z) \in B : z > 0\}, \\ T_+ &= \{(x, y, z) \in T : z \geq 0\}, \text{ («άνω ημισφαίριο»)} \\ C &= \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\} \text{ («ισομερινός»)}.\end{aligned}$$

Ορισμός 11.1.11. Μια λεία επιφάνεια S στον $\mathbb{R}^3$ λέγεται **απλή κανονική ανοικτή επιφάνεια** αν υπάρχει $\varphi : B_+ \rightarrow \mathbb{R}^3$ 1-1 και συνεχής, ώστε

$$\varphi(T_+) = S^*.$$

Το σύνολο $\varphi(B_+^\circ)$ λέγεται εσωτερικό της S^* και συμβολίζεται με $\text{int}(S^*)$.

Το σύνολο $\mathbb{R}^3 \setminus (S^* \cup \text{int}(S^*)) = \text{ext}(S^*)$ λέγεται εξωτερικό της S^* . Το σύνολο $\varphi(C)$ λέγεται χείλος ή σύνορο της S^* . Διαισθητικά, μια επιφάνεια S είναι ανοικτή αν μπορούμε να μεταβούμε από την «εξωτερική» της όψη στην «εσωτερική» χωρίς να «τρυπήσουμε» την επιφάνεια, και αυτό μπορεί να γίνει μόνο μέσω του χείλους της S^* .

Παραδείγματα 11.1.12. (α) Θεωρούμε την $S : [0, \pi/2] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ με

$$S(\vartheta, \varphi) = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta).$$

Η S^* είναι το άνω ημισφαίριο. Το χείλος της S^* είναι το $S(E)$ όπου $E = \{\pi/2\} \times [0, 2\pi]$ (ο ισημερινός).

(β) Θεωρούμε το $\Delta = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq b\}$, όπου $b > 0$, και την $S : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $S(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$. Η S^* είναι παραβολοειδές. Το χείλος της S^* είναι το $S(E)$ όπου $E = \{(u, v) : u^2 + v^2 = b\}$.

(γ) Θεωρούμε το $\Delta = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq b^2\}$, όπου $b > 0$, και την $S : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $S(u, v) = (u, v, \sqrt{u^2 + v^2})$. Η S^* είναι κώνος. Το χείλος της S^* είναι το $S(E)$ όπου $E = \{(u, v) : u^2 + v^2 = b^2\}$.

Κάθε απλή κλειστή κανονική επιφάνεια προκύπτει με «συγκόλληση» δύο ανοικτών επιφανειών με κοινό χείλος. Για παράδειγμα, μια σφαίρα προκύπτει από τη «συγκόλληση» δύο ημισφαιρίων.

Θεώρημα 11.1.13 (θεώρημα προσανατολισμού). Έστω $S : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$ απλή κανονική επιφάνεια, ανοικτή ή κλειστή, η οποία είναι C^1 στο $\Delta \setminus E$, όπου $E \subset \Delta$ σύνολο μέτρου 0. Τότε, ισχύει ακριβώς ένα από τα παρακάτω:

(α) Για κάθε $(u, v) \in \Delta \setminus E$ το διάνυσμα $S_u \times S_v$ σχεδιασμένο με αρχή το $S(u, v)$ «δείχνει» προς το $\text{ext}(S^*)$.

(β) Για κάθε $(u, v) \in \Delta \setminus E$ το διάνυσμα $S_u \times S_v$ σχεδιασμένο με αρχή το $S(u, v)$ «δείχνει» προς το $\text{int}(S^*)$.

Στην πρώτη περίπτωση για κάθε $(u, v) \in \Delta \setminus E$ θέτουμε $\vec{n}(u, v) = S_u \times S_v$ και στην δεύτερη περίπτωση για κάθε $(u, v) \in \Delta \setminus E$ θέτουμε $\vec{n}(u, v) = -(S_u \times S_v)$.

Παράδειγμα 11.1.14. Έστω $\Delta = [0, 2\pi] \times [0, 1]$. Θεωρούμε την $S : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $S(\varphi, z) = (z \cos \varphi, z \sin \varphi, z)$. Η S είναι ανοικτή επιφάνεια. Για κάθε $(\varphi, z) \in [0, 2\pi] \times (0, 1]$ έχουμε

$$(S_\varphi \times S_z)(\varphi, z) = (z \cos \varphi, z \sin \varphi, -z).$$

Στο σημείο $(\varphi, z) = (0, 1)$ έχουμε $(S_\varphi \times S_z)(0, 1) = (1, 0, -1)$ και $S(0, 1) = (1, 0, 1)$, και το διάνυσμα $(1, 0, -1)$ με αρχή το $(1, 0, 1)$ «δείχνει» στο εξωτερικό του κώνου.

Από το θεώρημα προσανατολισμού, έχουμε ότι

$$\vec{n}(\varphi, z) = (S_\varphi \times S_z)(\varphi, z) = (z \cos \varphi, z \sin \varphi, -z)$$

για κάθε $(\varphi, z) \in \Delta$.

11.2 Επιφανειακό ολοκλήρωμα

11.2.1 Επιφανειακό ολοκλήρωμα βαθμωτής συνάρτησης

Ορισμός 11.2.1. Έστω $S : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$ λεία επιφάνεια, όπου $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ (για παράδειγμα, ορθογώνιο ή κλειστός δίσκος) και $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, όπου $U \subseteq \mathbb{R}^3$ ανοικτό σύνολο με $S^* \subset U$. Το επιφανειακό ολοκλήρωμα της f πάνω στην S ορίζεται ως εξής:

$$\int_S f dS := \iint_\Delta f(S(u, v)) \|S_u \times S_v\| du dv.$$

Πρόταση 11.2.2. Το επιφανειακό ολοκλήρωμα μιας βαθμωτής συνάρτησης πάνω σε μια λεία επιφάνεια δεν εξαρτάται από την παραμέτρηση της επιφάνειας.

Απόδειξη. Έστω $S : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$ λεία επιφάνεια, $T : D \rightarrow \Delta$ συνάρτηση 1-1 και επί στην κλάση C^1 με $J_T(a, b) > 0$ για κάθε $(a, b) \in D$, όπου D, Δ κλειστά και φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ και $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ όπου U ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$ με $S^* \subset U$.

Ορίζουμε $\bar{S} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ με

$$\bar{S}(a, b) = S(T(a, b)), \quad (a, b) \in D.$$

Τότε,

$$\int_{\bar{S}} f d\bar{S} = \iint_D f(S(T(a, b))) \|\bar{S}_a \times \bar{S}_b\| da db.$$

Έχουμε

$$\|\bar{S}_a \times \bar{S}_b\| = J_T(a, b) \|S_u \times S_v\|$$

άρα, από το θεώρημα αντικατάστασης,

$$\begin{aligned} \int_{\bar{S}} f d\bar{S} &= \iint_{T^{-1}(\Delta)} f(S(T(a, b))) \|S_u \times S_v\| J_T(a, b) da db = \iint_{\Delta} f(S(u, v)) \|S_u \times S_v\| du dv \\ &= \int_S f dS. \end{aligned}$$

□

Ορισμός 11.2.3. Το εμβαδόν μιας λείας επιφάνειας S ορίζεται να είναι το ολοκλήρωμα

$$\int_S 1 dS = \iint_{\Delta} \|S_u \times S_v\| du dv$$

με την προϋπόθεση ότι το ολοκλήρωμα υπάρχει.

Σχόλιο: Εάν η S^* είναι το γράφημα μιας συνάρτησης $\varphi : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$, όπου $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ κλειστό και φραγμένο, τότε

$$S_u \times S_v = (-\varphi_u, -\varphi_v, 1), \quad (u, v) \in \Delta$$

άρα το επιφανειακό ολοκλήρωμα μιας συνεχούς συνάρτησης $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $U \subseteq \mathbb{R}^3$ με $S^* \subset U$, ισούται με

$$\int_S f dS = \iint_{\Delta} f(u, v, \varphi(u, v)) \sqrt{1 + \varphi_u^2 + \varphi_v^2} du dv.$$

Ειδικότερα, το εμβαδόν της S ισούται με

$$\iint_{\Delta} \sqrt{1 + \varphi_u^2 + \varphi_v^2} du dv.$$

Παράδειγμα 11.2.4. Έστω $R > 0$. Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας της σφαίρας

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Μια παραμέτρηση της σφαίρας είναι η $S : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ με

$$S(\vartheta, \varphi) = R(\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta)$$

και

$$S_{\vartheta} \times S_{\varphi} = \cdots = R \sin \vartheta S(\vartheta, \varphi),$$

άρα $\|S_{\vartheta} \times S_{\varphi}\| = R^2 \sin \vartheta$. Έπεται ότι το εμβαδόν ισούται με

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} R^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta = 2\pi R^2 \left(-\cos \vartheta \Big|_0^{\pi} \right) = 4\pi R^2.$$

Παράδειγμα 11.2.5. Να υπολογιστεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$\int_S \frac{x^2}{\sqrt{1+4z}} dS$$

όπου $S^* : z = x^2 + y^2, z \leq 1 + 2x + 2y$.

Η S^* είναι το ίχνος της $S : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $S(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$, όπου

$$\Delta = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq 1 + 2u + 2v\} = \{(u, v) : (u-1)^2 + (v-1)^2 \leq 3\}.$$

Έχουμε $S_u \times S_v = (-2u, -2v, 1)$, άρα $\|S_u \times S_v\| = \sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}$. Συνεπώς, το ολοκλήρωμα είναι ίσο με

$$\iint_{\Delta} \frac{u^2}{\sqrt{1+4(u^2+v^2)}} \sqrt{4u^2+4v^2+1} du dv = \iint_{\Delta} u^2 du dv.$$

Θέτουμε $u = 1 + \sqrt{3}r \cos \varphi, v = 1 + \sqrt{3}r \sin \varphi$, οπότε $0 \leq r \leq 1$ και $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Έτσι, το ολοκλήρωμα γράφεται ως

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + \sqrt{3}r \cos \varphi)^2 3r dr d\varphi &= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + 3r^2 \cos^2 \varphi + 2\sqrt{3}r \cos \varphi) r dr d\varphi \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r + 3r^3 \cos^2 \varphi + 2\sqrt{3}r^2 \cos \varphi) dr d\varphi \\ &= 3 \left(2\pi \int_0^1 r dr + 3 \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \cdot \int_0^1 r^3 dr + 2\sqrt{3} \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \cdot \int_0^1 r^2 dr \right) \\ &= 3 \left(\pi + 3 \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2\varphi)}{2} d\varphi \cdot \frac{1}{4} \right) \\ &= 3 \left(\pi + \frac{3}{8} 2\pi \right) = 3 \left(\pi + \frac{3\pi}{4} \right) = \frac{21\pi}{4}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 11.2.6. Να υπολογιστεί το $\int_S z dS$, όπου $S^* = S_1^* \cup S_2^* \cup S_3^*$ και

$$S_1^* : x^2 + y^2 = 1, \quad 0 \leq z \leq 1 + x,$$

$$S_2^* : x^2 + y^2 \leq 1, \quad z = 1 + x,$$

$$S_3^* : x^2 + y^2 \leq 1, \quad z = 0.$$

Γράφουμε

$$\int_S z dS = \int_{S_1} z dS_1 + \int_{S_2} z dS_2 + \int_{S_3} z dS_3 = \int_{S_1} z dS_1 + \int_{S_2} z dS_2.$$

Η S_1^* είναι το ίχνος της $S_1 : \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $S_1(z, \varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi, z)$, όπου

$$\Delta_1 = \{(z, \varphi) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 1 + \cos \varphi\}.$$

Υπολογίζουμε το

$$\frac{\partial S_1}{\partial z} \times \frac{\partial S_1}{\partial \varphi} = \cdots = (\cos \varphi, \sin \varphi, z)$$

και έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{S_1} z dS_1 &= \iint_{\Delta_1} z d\varphi dz = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{1+\cos \varphi} z dz \right) d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{(1+\cos \varphi)^2}{2} d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos^2 \varphi + 2 \cos \varphi) d\varphi \\ &= \pi + \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (1 + \cos(2\varphi)) d\varphi = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

Η S_2^* είναι το ίχνος της $S_2 : \Delta_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $S_2(u, v) = (u, v, 1 + u)$, όπου

$$\Delta_2 = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq 1\}.$$

Υπολογίζουμε το

$$\frac{\partial S_2}{\partial u} \times \frac{\partial S_2}{\partial v} = (-1, 0, 1)$$

και έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{S_2} z dS_2 &= \iint_{\Delta_2} (1+u) \sqrt{2} du dv = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1+r \cos \varphi) r dr d\varphi \\ &= \sqrt{2} \left(\int_0^{2\pi} \int_0^1 r dr d\varphi + \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cos \varphi dr d\varphi \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\pi + \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \cdot \int_0^1 r^2 dr \right) = \pi \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Από τα παραπάνω έπεται ότι

$$\int_S z dS = \frac{3\pi}{2} + \pi \sqrt{2}.$$

Παράδειγμα 11.2.7. Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας S που αποκόπτει το επίπεδο $z = 1$ από το παραβολοειδές $z = 2 - x^2 - y^2$.

Βρίσκουμε αρχικά την τομή των $z = 2 - x^2 - y^2$ και $z = 1$, είναι τα $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ με $x^2 + y^2 = 1$ και $z = 1$. Έτσι, η S^* είναι το ίχνος της $S : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $S(u, v) = (u, v, 2 - u^2 - v^2)$, όπου $\Delta = \{(u, v) : 2 - u^2 - v^2 \geq 1\} = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq 1\}$. Έχουμε $S_u \times S_v = (2u, 2v, 1)$, άρα $\|S_u \times S_v\| = \sqrt{4(u^2 + v^2) + 1}$. Συνεπώς, το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta} \|S_u \times S_v\| du dv &= \iint_{\Delta} \sqrt{4(u^2 + v^2) + 1} du dv = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{4r^2 + 1} r dr d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^1 \sqrt{4r^2 + 1} r dr = \frac{\pi}{4} \int_1^5 \sqrt{t} dt \\ &= \frac{\pi}{4} \frac{2}{3} t^{3/2} \Big|_1^5 = \frac{\pi}{6} (5^{3/2} - 1) = \frac{\pi}{6} (5\sqrt{5} - 1). \end{aligned}$$

Παράδειγμα 11.2.8. Να υπολογιστεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$\int_S x^2 \sqrt{2+2z} \, dS$$

όπου $S^* : x^2 + y^2 = 2z + 1, x^2 + y^2 \leq 4$.

Η S^* είναι το ίχνος της $S : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $S(u, v) = \left(u, v, \frac{u^2+v^2-1}{2}\right)$, όπου $\Delta = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq 4\}$. Έχουμε $S_u \times S_v = (-u, -v, 1)$, άρα $\|S_u \times S_v\| = \sqrt{u^2 + v^2 + 1}$. Συνεπώς, το ολοκλήρωμα είναι ίσο με

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta} u^2 \sqrt{2+u^2+v^2-1} \sqrt{u^2+v^2+1} \, du \, dv &= \iint_{\Delta} u^2 (u^2 + v^2 + 1) \, du \, dv \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^2 \cos^2 \varphi (r^2 + 1) r \, dr \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi \cdot \int_0^2 (r^5 + r^3) \, dr \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos(2\varphi)) \, d\varphi \cdot \left(\frac{r^6}{6} + \frac{r^4}{4} \Big|_0^2 \right) = \dots = \frac{44\pi}{3}. \end{aligned}$$

11.2.2 Επιφανειακό ολοκλήρωμα διανυσματικής συνάρτησης

Για να δώσουμε ένα κίνητρο για τον ορισμό του επιφανειακού ολοκληρώματος διανυσματικού πεδίου, θεωρούμε το παράδειγμα ενός ομογενούς μαγνητικού πεδίου έντασης $\vec{B}$. Μέσα σε αυτό τοποθετούμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο εμβαδού S τέτοιο ώστε οι δυναμικές γραμμές να σχηματίζουν οξεία γωνία ϑ με την κάθετη διεύθυνση στην επιφάνεια. Η **μαγνητική ροή** Φ είναι το πλήθος των δυναμικών γραμμών που διέρχονται από την επιφάνεια. Ισχύει ότι

$$\Phi = \|\vec{B}\| \cdot S \cdot \cos \vartheta.$$

Εάν $\vec{n}$ είναι ένα διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια με $\|\vec{n}\| = S$ το οποίο «δείχνει» στο εξωτερικό της S^* , τότε η γωνία των $\vec{n}$ και $\vec{B}$ είναι ίση με ϑ , άρα

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{n}.$$

Έστω τώρα $S : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$ απλή κανονική λεία επιφάνεια μέσα σε μαγνητικό πεδίο έντασης

$$\vec{B} = \vec{B}(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Θεωρούμε στοιχειώδες τμήμα εμβαδού ΔS . Υποθέτουμε ότι το ΔS είναι περίπου ίσο με το εμβαδόν $\|S_u \times S_v\|$ του παραλληλογράμμου που ορίζεται από τα S_u, S_v και ότι η ένταση $\vec{B}$ είναι σταθερή στα σημεία της ΔS . Υποθέτουμε επίσης ότι το $S_u \times S_v$, σχεδιασμένο με αρχή το $S(u, v)$, «δείχνει» στο εξωτερικό της S^* . Επειδή το διάνυσμα $S_u \times S_v$ είναι κάθετο στην S^* στο $S(u, v)$, η στοιχειώδης μαγνητική ροή που αντιστοιχεί στην επιφάνεια εμβαδού ΔS είναι ίση με

$$\Delta \Phi \simeq \vec{B} \cdot (S_u \times S_v).$$

Ορισμός 11.2.9. Έστω $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ κλειστό ορθογώνιο ή κλειστός δίσκος, $S : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$ λεία επιφάνεια και $\vec{F}$ συνεχές διανυσματικό πεδίο σε ανοικτό $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ με $S^* \subset \Omega$. Το **επιφανειακό ολοκλήρωμα** του $\vec{F}$ πάνω στην επιφάνεια S είναι το

$$\int_S \vec{F} = \iint_{\Delta} \vec{F}(S(u, v)) \cdot (S_u \times S_v) \, du \, dv.$$

Εάν S είναι μια απλή κανονική λεία επιφάνεια και το διάνυσμα $S_u \times S_v$, σχεδιασμένο με αρχή το $S(u, v)$, «δείχνει» προς την εξωτερική πλευρά της S^* σε κάθε σημείο $(u, v) \in \Delta \setminus E$, όπου $E \subset \Delta$ σύνολο μέτρου 0, τότε το επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$\int_S \vec{F} = \iint_{\Delta} \vec{F}(S(u, v)) \cdot (S_u \times S_v) du dv$$

εκφράζει τη ροή του διανυσματικού πεδίου $\vec{F}$ διαμέσου της επιφάνειας S . Δηλαδή, η ροή του $\vec{F}$ μέσω της S^* ισούται με

$$\iint_{\Delta} \vec{F}(S(u, v)) \cdot \vec{n}(u, v) du dv,$$

όπου $\vec{n}(u, v) = S_u \times S_v$ αν το $S_u \times S_v$ «δείχνει» στο εξωτερικό της S^* για κάθε $(u, v) \in \Delta \setminus E$ και $\vec{n}(u, v) = -(S_u \times S_v)$ αν το $S_u \times S_v$ «δείχνει» στο εσωτερικό της S^* για κάθε $(u, v) \in \Delta \setminus E$.

Πρόταση 11.2.10. *Το επιφανειακό ολοκλήρωμα ενός συνεχούς διανυσματικού πεδίου πάνω σε λεία επιφάνεια, δεν εξαρτάται από την παραμέτρηση της επιφάνειας.*

Απόδειξη. Έστω $S : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$ λεία επιφάνεια, $T : D \rightarrow \Delta$ 1-1 και επί C^1 συνάρτηση με $J_T(a, b) > 0$ για κάθε $(a, b) \in D$, όπου $\Delta, D \subset \mathbb{R}^2$ κλειστά ορθογώνια ή κλειστοί δίσκοι. Θεωρούμε την επιφάνεια $\bar{S} = S \circ T : D \rightarrow \mathbb{R}^3$. Τότε, από την Πρόταση 11.1.9 έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \iint_D \vec{F}(\bar{S}(a, b)) \cdot (\bar{S}_a \times \bar{S}_b) da db &= \iint_D \vec{F}(S(T(a, b))) \cdot (S_u \times S_v) J_T(a, b) da db \\ &= \iint_{\Delta} \vec{F}(S(u, v)) \cdot (S_u \times S_v) du dv \end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας και την υπόθεση ότι $J_T > 0$. □

Παράδειγμα 11.2.11. Να βρείτε τη ροή του διανυσματικού πεδίου $\vec{F} = (x, y, 0)$ διαμέσου της επιφάνειας $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, όπου $R > 0$.

Μια παραμέτρηση της σφαίρας είναι η $S : \Delta = [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ με

$$S(\vartheta, \varphi) = R(\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta).$$

Έχουμε δείξει ότι, για κάθε $(\vartheta, \varphi) \in (0, \pi) \times [0, 2\pi]$, το $S_{\vartheta} \times S_{\varphi} = R \sin \vartheta S(\vartheta, \varphi)$ είναι ομόρροπο με το $S(\vartheta, \varphi)$, άρα αν σχεδιαστεί με αρχή το $S(\vartheta, \varphi)$ «δείχνει» στο εξωτερικό της S^* , δηλαδή $\vec{n}(\vartheta, \varphi) = R \sin \vartheta S(\vartheta, \varphi)$ για κάθε $(\vartheta, \varphi) \in (0, \pi) \times [0, 2\pi]$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \vec{F}(S(\vartheta, \varphi)) \cdot \vec{n}(\vartheta, \varphi) &= R^3(\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, 0) \cdot (\sin^2 \vartheta \cos \varphi, \sin^2 \vartheta \sin \varphi, \sin \vartheta \cos \vartheta) \\ &= R^3(\sin^3 \vartheta \cos^2 \varphi + \sin^3 \vartheta \sin^2 \varphi) = R^3 \sin^3 \vartheta \end{aligned}$$

για κάθε $(\vartheta, \varphi) \in (0, \pi) \times [0, 2\pi]$. Η ζητούμενη ροή ισούται με

$$\begin{aligned} R^3 \iint_{\Delta} \sin^3 \vartheta d\vartheta d\varphi &= 2\pi R^3 \int_0^{\pi} \sin^3 \vartheta d\vartheta = 2\pi R^3 \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta \\ &= 2\pi R^3 \int_{-1}^1 (1 - w^2) dw = 4\pi R^3 \int_0^1 (1 - w^2) dw = 4\pi R^3 \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{8\pi R^3}{3}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 11.2.12. Έστω S η επιφάνεια με ίχνος το μέρος του παραβολοειδούς $z = 1 - (x^2 + y^2)$

που βρίσκεται πάνω από τον μοναδιαίο δίσκο $x^2 + y^2 \leq 1$. Να βρείτε τη ροή του διανυσματικού πεδίου $\vec{F} = (x, y, z)$ διαμέσου της S .

Θέτουμε $\Delta = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq 1\}$, οπότε η επιφάνεια είναι η $S : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $S(u, v) = (u, v, 1 - u^2 - v^2)$. Αν θέσουμε $f(u, v) = 1 - u^2 - v^2$ τότε

$$S_u \times S_v = (-f_u, -f_v, 1) = (2u, 2v, 1).$$

Το $(S_u \times S_v)(0, 0) = (0, 0, 1)$ «δείχνει» στο εξωτερικό της S^* αν σχεδιαστεί με αρχή το $S(0, 0) = (0, 0, 1)$. Συνεπώς, $\vec{n}(u, v) = (2u, 2v, 1)$ για κάθε $(u, v) \in \Delta$. Έχουμε

$$\vec{F}(S(u, v)) \cdot \vec{n}(u, v) = (u, v, 1 - u^2 - v^2) \cdot (2u, 2v, 1) = 2u^2 + 2v^2 + 1 - u^2 - v^2 = 1 + u^2 + v^2$$

για κάθε $(u, v) \in \Delta$. Άρα, η ζητούμενη ροή ισούται με

$$\iint_{\Delta} (1 + u^2 + v^2) du dv = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + r^2) r dr d\varphi = 2\pi \left(\int_0^1 r dr + \int_0^1 r^3 dr \right) = 2\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{3\pi}{2}.$$

Παράδειγμα 11.2.13. Να υπολογιστεί η ροή του διανυσματικού πεδίου $\vec{F} = (xy, 4yz^2, yz)$ διαμέσου της επιφάνειας του κύβου $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.

Θα υπολογίσουμε τη ροή διαμέσου καθεμίας από τις έξι έδρες του κύβου.

(1) Έδρα S_1^* : $x = 1, y, z \in [0, 1]$. Έχουμε $S_1(u, v) = (1, u, v)$ για κάθε $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$. Το διάνυσμα $\frac{\partial S_1}{\partial u} \times \frac{\partial S_1}{\partial v} = (0, 1, 0) \times (0, 0, 1) = (1, 0, 0)$ «δείχνει» στο εξωτερικό της S_1^* , άρα η ροή διαμέσου της S_1 ισούται με

$$\iint_{[0,1] \times [0,1]} \vec{F}(1, u, v) \cdot (1, 0, 0) du dv = \int_0^1 \int_0^1 u du dv = \frac{1}{2}.$$

(2) Έδρα S_2^* : $x = 0, y, z \in [0, 1]$. Έχουμε $S_2(u, v) = (0, u, v)$ για κάθε $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$. Το διάνυσμα $\frac{\partial S_2}{\partial u} \times \frac{\partial S_2}{\partial v} = (0, 1, 0) \times (0, 0, 1) = (1, 0, 0)$ «δείχνει» στο εσωτερικό της S_2^* αν σχεδιαστεί με αρχή το $S_2(0, 0) = (0, 0, 0)$, άρα $\vec{n}_2(u, v) = (-1, 0, 0)$ και η ροή διαμέσου της S_2 ισούται με

$$\iint_{[0,1] \times [0,1]} \vec{F}(0, u, v) \cdot (-1, 0, 0) du dv = - \int_0^1 \int_0^1 (0, 4uv^2, uv) \cdot (1, 0, 0) du dv = 0.$$

(3) Έδρα S_3^* : $y = 1, x, z \in [0, 1]$. Έχουμε $S_3(u, v) = (u, 1, v)$ για κάθε $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$. Το διάνυσμα $\frac{\partial S_3}{\partial u} \times \frac{\partial S_3}{\partial v} = (1, 0, 0) \times (0, 0, 1) = (0, -1, 0)$ «δείχνει» στο εσωτερικό της S_3^* αν σχεδιαστεί με αρχή το $S_3(0, 0) = (0, 1, 0)$, άρα $\vec{n}_3(u, v) = (0, 1, 0)$ και η ροή διαμέσου της S_3 ισούται με

$$\iint_{[0,1] \times [0,1]} \vec{F}(u, 1, v) \cdot (0, 1, 0) du dv = - \int_0^1 \int_0^1 (u, 4v^2, v) \cdot (0, 1, 0) du dv = \int_0^1 \int_0^1 4v^2 du dv = \frac{4}{3}.$$

(4) Έδρα S_4^* : $y = 0, x, z \in [0, 1]$. Έχουμε $S_4(u, v) = (u, 0, v)$ για κάθε $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$. Το διάνυσμα $\frac{\partial S_4}{\partial u} \times \frac{\partial S_4}{\partial v} = (1, 0, 0) \times (0, 0, 1) = (0, -1, 0)$ «δείχνει» στο εξωτερικό της S_4^* αν σχεδιαστεί με αρχή το $S_4(0, 0) = (0, 0, 0)$, άρα $\vec{n}_4(u, v) = (0, -1, 0)$ και $\vec{F}(u, 0, v) = (0, 0, 0)$, επομένως η ροή διαμέσου της S_4 ισούται με 0.

(5) Έδρα S_5^* : $z = 1, x, y \in [0, 1]$. Έχουμε $S_5(u, v) = (u, v, 1)$ για κάθε $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$. Το διάνυσμα

$\frac{\partial S_5}{\partial u} \times \frac{\partial S_5}{\partial v} = (1, 0, 0) \times (0, 1, 0) = (0, 0, -1)$ «δείχνει» στο εσωτερικό της S_5^* αν σχεδιαστεί με αρχή το $S_5(0, 0) = (0, 0, 1)$, άρα $\vec{n}_5(u, v) = (0, 0, 1)$ και η ροή διαμέσου της S_5 ισούται με

$$\iint_{[0,1] \times [0,1]} \vec{F}(u, v, 1) \cdot (0, 0, 1) du dv = \int_0^1 \int_0^1 v du dv = \frac{1}{2}.$$

(6) Έδρα $S_6^* : z = 0, x, y \in [0, 1]$. Έχουμε $S_6(u, v) = (u, v, 0)$ για κάθε $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$. Το διάνυσμα $\frac{\partial S_6}{\partial u} \times \frac{\partial S_6}{\partial v} = (1, 0, 0) \times (0, 1, 0) = (0, 0, -1)$ «δείχνει» στο εξωτερικό της S_6^* αν σχεδιαστεί με αρχή το $S_6(0, 0) = (0, 0, 0)$, άρα $\vec{n}_6(u, v) = (0, 0, -1)$ και η ροή διαμέσου της S_6 ισούται με

$$\iint_{[0,1] \times [0,1]} \vec{F}(u, v, 1) \cdot (0, 0, -1) du dv = 0.$$

Η συνολική ροή είναι ίση με $\Phi = \frac{1}{2} + 0 + \frac{4}{3} + 0 + \frac{1}{2} + 0 = \frac{7}{3}$.

Παράδειγμα 11.2.14. Να υπολογιστεί η ροή του διανυσματικού πεδίου $\vec{F} = (y, -x, z^2)$ διαμέσου της $S^* : z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 1$.

Έχουμε $S(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$, όπου $(u, v) \in \Delta = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq 1\}$. Υπολογίζουμε το $S_u \times S_v = (-2u, -2v, 1)$. Το $(S_u \times S_v)(0, 0) = (0, 0, 1)$ «δείχνει» στο εσωτερικό της S^* αν σχεδιαστεί με αρχή το $S(0, 0) = (0, 0, 0)$, άρα $\vec{n}(u, v) = (2u, 2v, -1)$. Συνεπώς, η ζητούμενη ροή ισούται με

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta} \vec{F}(u, v, u^2 + v^2) \cdot (2u, 2v, -1) du dv &= \iint_{\Delta} (v, -u, (u^2 + v^2)^2) \cdot (2u, 2v, -1) du dv = - \iint_{\Delta} (u^2 + v^2)^2 du dv \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^5 dr = -\frac{2\pi}{6} = -\frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Ορισμός 11.2.15. Μια απλή κανονική επιφάνεια S λέγεται τμηματικά λεία αν υπάρχουν λείες απλές κανονικές επιφάνειες $S_1, S_2, \dots, S_k$ τέτοιες ώστε

$$S^* = S_1^* \cup S_2^* \cup \dots \cup S_k^*$$

και για κάθε $i \neq j$ η τομή $S_i^* \cap S_j^*$ έχει εμβαδόν ίσο με 0.

Αν οι $S, S_1, \dots, S_k$ είναι όπως παραπάνω και $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι ένα συνεχές διανυσματικό πεδίο με $S^* \subset \Omega$, τότε

$$\int_S \vec{F} = \sum_{i=1}^k \int_{S_i} \vec{F}.$$

Παράδειγμα 11.2.16. Αν $\vec{F} = (0, 0, z^2)$ και S^* είναι το σύνολο του στερεού που φράσσεται από τις επιφάνειες

$$z = x^2 + y^2 \quad \text{και} \quad z = 18 - x^2 - y^2,$$

να υπολογίσετε τη ροή του $\vec{F}$ διαμέσου της S .

Θεωρούμε το $\Delta = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq 9\}$ και τις $S_1, S_2 : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $S_1(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$ και $S_2(u, v) = (u, v, 18 - u^2 - v^2)$. Έχουμε $S^* = S_1^* \cup S_2^*$ και το $S_1^* \cap S_2^* = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 9, z = 9\}$ έχει εμβαδόν 0. Συνεπώς, η ροή διαμέσου της S ισούται με το άθροισμα των ροών διαμέσου των S_1, S_2 .

Έστω Φ_1 η ροή διαμέσου της S_1 . Αν $f(u, v) = u^2 + v^2$ τότε $\frac{\partial S_1}{\partial u} \times \frac{\partial S_1}{\partial v} = (-f_u, -f_v, 1) = (-2u, -2v, 1)$. Το διάνυσμα $\left(\frac{\partial S_1}{\partial u} \times \frac{\partial S_1}{\partial v}\right)(0, 0) = (0, 0, 1)$ «δείχνει» στο εσωτερικό της S_1^* αν σχεδιαστεί με αρχή το

$S_1(0, 0) = (0, 0, 0)$, άρα $\vec{n}_1(u, v) = (2u, 2v, -1)$. Έπεται ότι

$$\Phi_1 = - \iint_{\Delta} (u^2 + v^2)^2 du dv = - \int_0^{2\pi} \int_0^3 r^5 dr = -2\pi \frac{3^6}{6} = -3^5 \pi.$$

Έστω Φ_2 η ροή διαμέσου της S_2 . Αν $g(u, v) = 18 - u^2 - v^2$ τότε $\frac{\partial S_2}{\partial u} \times \frac{\partial S_2}{\partial v} = (-g_u, -g_v, 1) = (2u, 2v, 1)$. Το διάνυσμα $\left(\frac{\partial S_2}{\partial u} \times \frac{\partial S_2}{\partial v}\right)(0, 0) = (0, 0, 1)$ «δείχνει» στο εξωτερικό της S_2^* αν σχεδιαστεί με αρχή το $S_2(0, 0) = (0, 0, 18)$, άρα $\vec{n}_2(u, v) = (2u, 2v, 1)$. Έπεται ότι

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= \iint_{\Delta} \vec{F}(S_2(u, v)) \cdot \vec{n}_2(u, v) du dv = \iint_{\Delta} (18 - u^2 - v^2)^2 du dv \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 (18 - r^2)^2 r dr d\varphi = 2\pi \int_0^3 (18 - r^2)^2 r dr \\ &= \pi \int_9^{18} w^2 dw = \frac{\pi}{3} (18^3 - 9^3) = \frac{\pi}{3} 9^3 (2^3 - 1) = 3^5 \cdot 7\pi. \end{aligned}$$

Η συνολική ροή ισούται με $\Phi_1 + \Phi_2 = 6 \cdot 3^5 \pi$.

11.2.3 Θεώρημα απόκλισης του Gauss

Θεώρημα 11.2.17 (θεώρημα απόκλισης (Gauss)). Έστω S τμηματικά λεία απλή, κανονική, κλειστή επιφάνεια που είναι το σύνορο ενός φραγμένου στερεού K και $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ συνάρτηση της κλάσης C^1 , όπου $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ με $S^* \cup K \subset \Omega$. Η ροή της $\vec{F}$ διαμέσου της S ισούται με

$$\iiint_K \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz.$$

Υπενθυμίζουμε ότι αν $\vec{F} = (P, Q, R)$ τότε $\operatorname{div} \vec{F} = P_x + Q_y + R_z$.

Παράδειγμα 11.2.18. Να υπολογίσετε τη ροή του διανυσματικού πεδίου $\vec{F} = (xy, 4yz^2, yz)$ διαμέσου της επιφάνειας του κύβου $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.

Έχουμε $P = xy$, $Q = 4yz^2$ και $R = yz$, άρα

$$\operatorname{div} \vec{F} = P_x + Q_y + R_z = y + 4z^2 + y = 2y + 4z^2.$$

Από το θεώρημα Gauss, η ζητούμενη ροή ισούται με

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (2y + 4z^2) dx dy dz = \int_0^1 2y dy + \int_0^1 4z^2 dz = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3}.$$

Ο απευθείας υπολογισμός της ροής μέσω του επιφανειακού ολοκληρώματος έγινε στο Παράδειγμα 11.2.13 και είναι πολύ πιο επίπονος.

Παράδειγμα 11.2.19. Να επαληθεύσετε το θεώρημα Gauss για το διανυσματικό πεδίο $\vec{F} = (x, y, z)$ και την επιφάνεια $S : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, όπου $R > 0$.

Έχουμε την $S : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $S(\vartheta, \varphi) = R(\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta)$. Με υπολογισμό βλέπουμε ότι $S_{\vartheta} \times S_{\varphi} = R \sin \vartheta S(\vartheta, \varphi)$ για κάθε $(\vartheta, \varphi) \in (0, \pi) \times [0, 2\pi]$, δηλαδή το $S_{\vartheta} \times S_{\varphi}$ είναι

ομόρροπο με το $S(\vartheta, \varphi)$, άρα $\vec{n}(\vartheta, \varphi) = R \sin \vartheta S(\vartheta, \varphi)$. Τότε,

$$\vec{F}(S(\vartheta, \varphi)) \cdot \vec{n}(\vartheta, \varphi) = R \sin \vartheta S(\vartheta, \varphi) \cdot S(\vartheta, \varphi) = R^3 \sin \vartheta.$$

Έπεται ότι η ροή διαμέσου της S ισούται με

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} R^3 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = 2\pi R^3 \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta = -2\pi R^3 \cos \vartheta \Big|_0^\pi = 4\pi R^3.$$

Από την άλλη πλευρά, έστω $K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$. Τότε,

$$\iiint_K \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz = \iiint_K (1 + 1 + 1) dx dy dz = 3 \cdot \text{όγκος}(K) = 3 \cdot \frac{4\pi}{3} R^3 = 4\pi R^3.$$

Παράδειγμα 11.2.20. Να επαληθεύσετε το θεώρημα Gauss για το διανυσματικό πεδίο $\vec{F} = (0, 0, z^2)$ και την επιφάνεια S που είναι το σύνορο του στερεού K που φράσσεται από τις επιφάνειες $z = x^2 + y^2$ και $z = 18 - x^2 - y^2$.

Η ροή διαμέσου της S έχει υπολογιστεί (στο Παράδειγμα 11.2.16) και ισούται με $6\pi \cdot 3^5$.

Εάν $\Delta = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 9\}$ τότε

$$\begin{aligned} \iiint_K \operatorname{div} \vec{F} &= \iiint_K 2z dx dy dz = \iint_{\Delta} \left(\int_{x^2+y^2}^{18-x^2-y^2} 2z dz \right) dx dy \\ &= \iint_{\Delta} ((18 - x^2 - y^2)^2 - (x^2 + y^2)^2) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^3 ((18 - r^2)^2 - r^4) r dr d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^3 ((18 - r^2)^2 - r^4) r dr = \dots = 6\pi \cdot 3^5. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 11.2.21. Να επαληθεύσετε το θεώρημα Gauss για το διανυσματικό πεδίο $\vec{F} = (y, x, z^2)$ και το στερεό $K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 2\}$.

Γράφουμε $S^* = S_1^* \cup S_2^* \cup S_3^*$ όπου $S_1^* : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 2$, $S_2^* : x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$ και $S_3^* : x^2 + y^2 \leq 1, z = 2$.

Για τη ροή διαμέσου της S_1^* θεωρούμε την $S_1 : [0, 2\pi] \times [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $S_1(\varphi, z) = (\cos \varphi, \sin \varphi, z)$. Υπολογίζουμε το

$$\frac{\partial S_1}{\partial \varphi} \times \frac{\partial S_1}{\partial z} = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) \times (0, 0, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0).$$

Παρατηρούμε ότι το $\left(\frac{\partial S_1}{\partial \varphi} \times \frac{\partial S_1}{\partial z}\right)(0, 0) = (1, 0, 0)$ «δείχνει» προς τα έξω αν σχεδιαστεί με αρχή το $S_1(0, 0) = (1, 0, 0)$. Συνεπώς, $\vec{n}_1(\varphi, z) = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$ και

$$\vec{F}(S_1(\varphi, z)) \cdot \vec{n}_1(\varphi, z) = (\sin \varphi, \cos \varphi, z^2) \cdot (\cos \varphi, \sin \varphi, 0) = 2 \sin \varphi \cos \varphi = \sin(2\varphi)$$

και η ροή διαμέσου της S_1^* είναι ίση με

$$\int_0^2 \int_0^{2\pi} \sin(2\varphi) d\varphi dz = 0.$$

Για τη ροή διαμέσου της S_2^* θεωρούμε την $S_2 : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $S_2(u, v) = (u, v, 0)$, όπου $\Delta = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq 1\}$. Υπολογίζουμε το $\frac{\partial S_2}{\partial u} \times \frac{\partial S_2}{\partial v} = (1, 0, 0) \times (0, 1, 0) = (0, 0, 1)$ το οποίο «δείχνει» εσωτερικά αν σχεδιαστεί με αρχή το $S_2(0, 0) = (0, 0, 0)$. Άρα, $\vec{n}_2(u, v) = (0, 0, -1)$ και $\vec{F}(u, v, 0) \cdot (0, 0, -1) = 0$. Έπεται ότι η ροή διαμέσου της S_2^* είναι ίση με 0.

Για τη ροή διαμέσου της S_3^* θεωρούμε την $S_3 : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $S_3(u, v) = (u, v, 2)$, όπου $\Delta = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq 1\}$. Υπολογίζουμε το $\frac{\partial S_3}{\partial u} \times \frac{\partial S_3}{\partial v} = (1, 0, 0) \times (0, 1, 0) = (0, 0, 1)$ το οποίο «δείχνει» εξωτερικά αν σχεδιαστεί με αρχή το $S_3(0, 0) = (0, 0, 2)$. Άρα, $\vec{n}_3(u, v) = (0, 0, 1)$ και $\vec{F}(u, v, 2) \cdot (0, 0, 1) = (v, u, 4) \cdot (0, 0, 1) = 4$. Έπεται ότι η ροή διαμέσου της S_3^* είναι ίση με 4.

$$\iint_{\Delta} 4 \, du \, dv = 4\pi \cdot 1^2 = 4\pi.$$

Συνεπώς, η συνολική ροή είναι ίση με $0 + 0 + 4\pi = 4\pi$. Ταυτόχρονα,

$$\begin{aligned} \iiint_K \operatorname{div} \vec{F} \, dx \, dy \, dz &= \iiint_K 2z \, dx \, dy \, dz = \iint_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} \left(\int_0^2 2z \, dz \right) dx \, dy \\ &= 4 \iint_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} dx \, dy = 4\pi \cdot 1^2 = 4\pi. \end{aligned}$$

11.3 Θεώρημα Stokes

Έστω $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ κλειστό ορθογώνιο ή κλειστός δίσκος και $S : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$ μια C^2 επιφάνεια, δηλαδή $S(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ όπου $x, y, z : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ συναρτήσεις της κλάσης C^2 . Έχουμε

$$S_u \times S_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = (E_x, -E_y, E_z),$$

όπου

$$E_x = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, \quad E_y = \begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix}, \quad E_z = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}.$$

Λήμμα 11.3.1. Για κάθε $(u, v) \in \Delta$ ισχύουν οι

$$x_v S_u - x_u S_v = -(0, E_z, E_y)$$

$$y_v S_u - y_u S_v = (E_z, 0, -E_x)$$

$$z_v S_u - z_u S_v = (E_y, E_x, 0).$$

Απόδειξη. Υπολογίζουμε το

$$\begin{aligned} x_v S_u - x_u S_v &= x_v(x_u, y_u, z_u) - x_u(x_v, y_v, z_v) = \left(0, \begin{vmatrix} x_v & y_v \\ x_u & y_u \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_v & z_v \\ x_u & z_u \end{vmatrix} \right) \\ &= (0, -E_z, -E_y). \end{aligned}$$

Οι υπόλοιπες δύο ισότητες ελέγχονται με τον ίδιο τρόπο. □

Στη συνέχεια θεωρούμε $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ανοικτό, τέτοιο ώστε $\sigma(\Omega) \subseteq \Omega$.

Λήμμα 11.3.2. Έστω $P : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση κλάσης C^1 . Τότε,

$$\frac{\partial}{\partial u}(P(S(u, v))) = \nabla P \cdot S_u, \quad \frac{\partial}{\partial v}(P(S(u, v))) = \nabla P \cdot S_v.$$

Απόδειξη. Από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial u}(P(S(u, v))) = \frac{\partial}{\partial u}(P(x(u, v), y(u, v), z(u, v))) = P_x x_u + P_y y_u + P_z z_u = \nabla P \cdot S_u$$

και όμοια

$$\frac{\partial}{\partial v}(P(S(u, v))) = \frac{\partial}{\partial v}(P(x(u, v), y(u, v), z(u, v))) = P_x x_v + P_y y_v + P_z z_v = \nabla P \cdot S_v.$$

□

Λήμμα 11.3.3. Έστω $\vec{F} = (P, Q, R) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ στην κλάση C^1 , Τότε,

$$\frac{\partial}{\partial u}(\vec{F}(S(u, v)) \cdot S_v) - \frac{\partial}{\partial v}(\vec{F}(S(u, v)) \cdot S_u) = (\text{rot } \vec{F}(S(u, v))) \cdot (S_u \times S_v).$$

Απόδειξη. Η S είναι της κλάσης C^2 , άρα

$$\frac{\partial}{\partial u}(S_v) = S_{vu} = S_{uv} = \frac{\partial}{\partial v}(S_u).$$

Συνεπώς, χρησιμοποιώντας και τα Λήμματα 11.3.2 και 11.3.1 γράφουμε το πρώτο μέλος ως εξής:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial u}(\vec{F}(S(u, v)) \cdot S_v) - \frac{\partial}{\partial v}(\vec{F}(S(u, v)) \cdot S_u) \\ &= (\nabla P \cdot S_u, \nabla Q \cdot S_u, \nabla R \cdot S_u) \cdot (x_v, y_v, z_v) - (\nabla P \cdot S_v, \nabla Q \cdot S_v, \nabla R \cdot S_v) \cdot (x_u, y_u, z_u) \\ &= \nabla P \cdot (x_v S_u - x_u S_v) + \nabla Q \cdot (y_v S_u - y_u S_v) + \nabla R \cdot (z_v S_u - z_u S_v) \\ &= -\nabla P \cdot (0, E_z, E_y) + \nabla Q \cdot (E_z, 0, -E_x) + \nabla R \cdot (E_y, E_x, 0) \\ &= -P_y E_z - P_z E_y + Q_x E_z - Q_z E_x + R_x E_y + R_y E_x \\ &= (R_y - Q_z)E_x - (P_z - R_x)E_y + (Q_x - P_y)E_z \\ &= (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y) \cdot (E_x, -E_y, E_z) \\ &= \text{rot } \vec{F} \cdot (S_u \times S_v). \end{aligned}$$

□

Θεώρημα 11.3.4 (θεώρημα Stokes). Έστω $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ κλειστό ορθογώνιο ή κλειστός δίσκος και $S : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$ μια C^2 επιφάνεια. Έστω $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ θετικά προσανατολισμένη απλή κλειστή λεία καμπύλη με $\sigma([a, b]) = \partial\Delta(\subset \Delta)$ και $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ στην κλάση C^1 , όπου $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ανοικτό με $S(\Delta) \subset \Omega$. Θέτουμε

$$\gamma(t) = S(\sigma(t)), \quad t \in [a, b].$$

Τότε,

$$\int_{\gamma} \vec{F} = \int_S \text{rot } \vec{F}.$$

Απόδειξη. Θέτουμε $\sigma(t) = (u(t), v(t))$, $t \in [a, b]$ όπου $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ κλάσης C^1 . Τότε,

$$\gamma(t) = S(\sigma(t)) = (x(\sigma(t)), y(\sigma(t)), z(\sigma(t))), \quad t \in [a, b].$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(x(\sigma(t))) &= x_u u'(t) + x_v v'(t), \\ \frac{d}{dt}(y(\sigma(t))) &= y_u u'(t) + y_v v'(t), \\ \frac{d}{dt}(z(\sigma(t))) &= z_u u'(t) + z_v v'(t),\end{aligned}$$

άρα

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= (x_u u'(t) + x_v v'(t), y_u u'(t) + y_v v'(t), z_u u'(t) + z_v v'(t)) \\ &= u'(t) S_u(\sigma(t)) + v'(t) S_v(\sigma(t))\end{aligned}$$

για κάθε $t \in [a, b]$. Έπεται ότι

$$\vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = u'(t) [\vec{F}(S(\sigma(t))) \cdot S_u(\sigma(t))] + v'(t) [\vec{F}(S(\sigma(t))) \cdot S_v(\sigma(t))]$$

για κάθε $t \in [a, b]$. Θέτουμε

$$A(u, v) = \vec{F}(S(u, v)) \cdot S_u \quad \text{και} \quad B(u, v) = \vec{F}(S(u, v)) \cdot S_v, \quad (u, v) \in \Delta.$$

Τότε,

$$\vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = A(\sigma(t))u'(t) + B(\sigma(t))v'(t) = (A(\sigma(t)), B(\sigma(t))) \cdot \sigma'(t)$$

για κάθε $t \in [a, b]$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Green και το Λήμμα 11.3.3 συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \vec{F} &= \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b (A(\sigma(t)), B(\sigma(t))) \cdot \sigma'(t) dt \\ &= \int_{\sigma} (A du + B dv) = \iint_{\Delta} (B_u - A_v) du dv \\ &= \iint_{\Delta} \text{rot } \vec{F}(u, v) \cdot (S_u \times S_v) du dv = \int_S \text{rot } \vec{F}.\end{aligned}$$

□

Ορισμός 11.3.5. Έστω S απλή κανονική ανοικτή επιφάνεια με χείλος (σύνορο) C . Θα λέμε ότι η C είναι θετικά προσανατολισμένη ως προς το διάνυσμα $\vec{n}(u, v)$ της εξωτερικής καθέτου αν ικανοποιεί τον παρακάτω κανόνα: όταν κινούμαστε πάνω στην C με το κεφάλι μας να δείχνει την κατεύθυνση του $\vec{n}$, έχουμε συνεχώς την εξωτερική όψη της S^* στα αριστερά μας. Δηλαδή, έχουμε στα αριστερά μας το $\vec{n}(u, v)$ σχεδιασμένο με αρχή το $S(u, v)$.

Σημειώνουμε ότι η επιφάνεια S ενδέχεται να είναι επίπεδη. Επίσης, εάν η S είναι ένωση πεπερασμένων το πλήθος κανονικών ανοικτών επιφανειών τότε προσανατολίζουμε θετικά κάθε χείλος ξεχωριστά.

Θεώρημα 11.3.6 (θεώρημα Stokes). Έστω $S : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$ απλή κανονική ανοικτή επιφάνεια κλάσης C^2 με χείλος C που είναι θετικά προσανατολισμένη ως προς το διάνυσμα $\vec{n}$ της εξωτερικής καθέτου και $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ διανυσματικό πεδίο κλάσης C^1 , όπου $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ανοικτό με $S^* \subset \Omega$. Τότε, η ροή του $\text{rot } \vec{F}$

μέσω της S είναι $\int_C \vec{F}$, δηλαδή

$$\iint_{\Delta} \operatorname{rot} \vec{F}(S(u, v)) \cdot \vec{n}(u, v) du dv = \int_C \vec{F}.$$

Το θεώρημα Stokes ισχύει και για τμηματικά C^2 απλές κανονικές ανοικτές επιφάνειες με θετικά προσανατολισμένα χείλη. Για παράδειγμα, αν

$$S^* : x^2 + y^2 = 1, \quad 0 \leq z \leq b$$

όπου $b > 0$, τότε

$$\iint_{\Delta} \operatorname{rot} \vec{F}(S(u, v)) \cdot \vec{n}(u, v) du dv = \int_{C_1} \vec{F} + \int_{C_2} \vec{F}$$

όπου $C_2 : \gamma_2(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ και $(-C_1) : \gamma_1(t) = (\cos t, \sin t, b)$ για $t \in [0, 2\pi]$. Συνεπώς,

$$\iint_{\Delta} \operatorname{rot} \vec{F}(S(u, v)) \cdot \vec{n}(u, v) du dv = - \int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) dt + \int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) dt.$$

Παράδειγμα 11.3.7. Να επαληθεύσετε το θεώρημα Stokes για το διανυσματικό πεδίο $\vec{F} = (3y, -2x, xyz)$ και την επιφάνεια S με ίχνος το άνω ημισφαίριο ακτίνας 1 και κέντρου $(0, 0, 0)$.

Έχουμε την $S : \Delta = [0, \pi/2] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $S(\vartheta, \varphi) = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta)$. Υπολογίζουμε το $S_{\vartheta} \times S_{\varphi} = \sin \vartheta S(\vartheta, \varphi)$ αν $0 < \vartheta \leq \pi/2$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Το $S_{\vartheta} \times S_{\varphi}$ είναι ομόρροπο του διανύσματος θέσης $S(\vartheta, \varphi)$, δηλαδή «δείχνει» προς τα έξω, άρα $\vec{n}(\vartheta, \varphi) = \sin \vartheta S(\vartheta, \varphi)$ αν $0 < \vartheta \leq \pi/2$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Υπολογίζουμε το

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 3y & -2x & xyz \end{vmatrix} = (xz, -yz, -5),$$

άρα

$$\operatorname{rot} \vec{F}(S(\vartheta, \varphi)) = (\sin \vartheta \cos \varphi \cos \vartheta, -\sin \vartheta \sin \varphi \cos \vartheta, -5).$$

Τώρα,

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{F}(S(\vartheta, \varphi)) \cdot \vec{n}(\vartheta, \varphi) &= \sin^3 \vartheta \cos \vartheta \cos^2 \varphi - \sin^3 \vartheta \cos \vartheta \sin^2 \varphi - 5 \sin \vartheta \cos \vartheta \\ &= \sin^3 \vartheta \cos \vartheta \cos(2\varphi) - \frac{5}{2} \sin(2\vartheta) \end{aligned}$$

για κάθε $(\vartheta, \varphi) \in (0, \pi/2] \times [0, 2\pi]$, άρα

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta} \operatorname{rot} \vec{F}(S(\vartheta, \varphi)) \cdot \vec{n}(\vartheta, \varphi) d\vartheta d\varphi &= \int_0^{\pi/2} \sin^3 \vartheta \cos \vartheta d\vartheta \cdot \int_0^{2\pi} \cos(2\varphi) d\varphi - \frac{5}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\pi/2} \sin(2\vartheta) d\vartheta \\ &= -5\pi \left(-\frac{1}{2} \cos(2\vartheta) \Big|_0^{\pi/2} \right) = -5\pi. \end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά, επειδή η C είναι θετικά προσανατολισμένος κύκλος του xy -επιπέδου, έχουμε $z = 0$ και από το θεώρημα Green βλέπουμε ότι

$$\int_C \vec{F} = \int_C (3y dx - 2x dy) = \iint_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} (-2 - 3) dx dy = -5 \iint_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} dx dy = -5\pi.$$

Παράδειγμα 11.3.8. Να επαληθεύσετε το θεώρημα Stokes για το διανυσματικό πεδίο $\vec{F} = (yz, -xz, z^3)$ και την επιφάνεια S με ίχνος

$$S^* : z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad 1 \leq z \leq 3.$$

Έχουμε την $S : \Delta = [0, 2\pi] \times [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $S(\varphi, z) = z(\cos \varphi, \sin \varphi, 1)$. Η S^* είναι ένας κόλινος κώνος. Υπολογίζουμε το $S_\varphi \times S_z = z(\cos \varphi, \sin \varphi, -1)$ για κάθε $(\varphi, z) \in \Delta$. Παρατηρούμε ότι $(S_\varphi \times S_z)(0, 1) = (1, 0, -1)$ και $S(0, 1) = (1, 0, 1)$. Αν σχεδιάσουμε το $(1, 0, -1)$ με αρχή το $(1, 0, 1)$ βλέπουμε ότι «δείχνει» προς τα έξω. Συνεπώς,

$$\vec{n}(\varphi, z) = z(\cos \varphi, \sin \varphi, -1), \quad (\varphi, z) \in \Delta.$$

Υπολογίζουμε το

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ yz & -xz & z^3 \end{vmatrix} = (x, y, -2z),$$

άρα

$$\text{rot } \vec{F}(S(\varphi, z)) \cdot \vec{n}(\varphi, z) = (z \cos \varphi, z \sin \varphi, -2z) \cdot (z \cos \varphi, z \sin \varphi, -z) = 3z^2.$$

Έπεται ότι

$$\iint_{\Delta} \text{rot } \vec{F}(S(\varphi, z)) \cdot \vec{n}(\varphi, z) d\varphi dz = \int_0^{2\pi} \int_1^3 3z^2 d\varphi dz = 2\pi \cdot z^3 \Big|_1^3 = 52\pi.$$

Τα χείλη της S είναι οι κύκλοι $C_1 : x^2 + y^2 = 9, z = 3$ και $C_2 : x^2 + y^2 = 1, z = 1$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \vec{F} + \int_{C_2} \vec{F} &= \int_{C_1} (yz dx - xz dy + z^3 dz) + \int_{C_2} (yz dx - xz dy + z^3 dz) \\ &= \int_{C_1} (3y dx - 3x dy) + \int_{C_2} (y dx - x dy) \\ &= -3 \int_{-C_1} (y dx - x dy) + \int_{C_2} (y dx - x dy). \end{aligned}$$

Οι $-C_1, C_2$ βρίσκονται σε επίπεδα παράλληλα προς το xy -επίπεδο και μάλιστα είναι θετικά προσανατολισμένες αν τις δούμε ως καμπύλες του xy -επιπέδου. Επομένως, μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Green και παίρνουμε

$$\int_{-C_1} (y dx - x dy) = \iint_{\{x^2+y^2 \leq 9\}} (-1-1) dx dy = -2\pi \cdot 9 = -18\pi$$

και

$$\int_{C_2} (y dx - x dy) = \iint_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} (-1-1) dx dy = -2\pi \cdot 1^2 = -2\pi.$$

Τελικά,

$$\int_{C_1} \vec{F} + \int_{C_2} \vec{F} = -3 \cdot (-18\pi) - 2\pi = 52\pi.$$

Παράδειγμα 11.3.9. Να επαληθεύσετε το θεώρημα Stokes για το διανυσματικό πεδίο $\vec{F} = \frac{1}{3}(z^3, x^3, y^3)$ και την επιφάνεια S με $S^* : z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 1$.

Έστω $\Delta = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq 1\}$. Έχουμε την $S : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $S(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$. Υπολογίζουμε το $S_u \times S_v = (-2u, -2v, 1)$ για κάθε $(u, v) \in \Delta$. Παρατηρούμε ότι $(S_u \times S_v)(0, 0) = (0, 0, 1)$ και $S(0, 0) = (0, 0, 0)$.

Αν σχεδιάσουμε το $(0, 0, 1)$ με αρχή το $(0, 0, 0)$ βλέπουμε ότι «δείχνει» στο εσωτερικό της S^* . Συνεπώς,

$$\vec{n}(u, v) = -(S_u \times S_v) = (2u, 2v, -1), \quad (u, v) \in \Delta.$$

Υπολογίζουμε το

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ z^3 & x^3 & y^3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}(3y^2, 3z^2, 3x^2) = (y^2, z^2, x^2),$$

άρα

$$\operatorname{rot} \vec{F}(S(u, v)) \cdot \vec{n}(u, v) = (v^2, (u^2 + v^2)^2, u^2) \cdot (2u, 2v, -1) = 2uv^2 + 2v(u^2 + v^2)^2 - u^2.$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta} \operatorname{rot} \vec{F}(S(u, v)) \cdot \vec{n}(u, v) du dv &= \iint_{\Delta} (2uv^2 + 2v(u^2 + v^2)^2 - u^2) du dv \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2r \cos \varphi \cdot r^2 \sin^2 \varphi + 2r \sin \varphi \cdot r^4 - r^2 \cos^2 \varphi) r dr d\varphi \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi \cdot \int_0^1 r^4 dr + 2 \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \cdot \int_0^1 r^6 dr - \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \cdot \int_0^1 r^3 dr. \end{aligned}$$

Όμως, $\int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi = 0$, $\int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = 0$ και $\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \pi$. Συνεπώς, η ζητούμενη ροή ισούται με

$$-\pi \int_0^1 r^3 dr = -\frac{\pi}{4}.$$

Για το χείλος C της S έχουμε $C : x^2 + y^2 = 1, z = 1$ και

$$\int_C \vec{F} = \frac{1}{3} \int_C (z^3 dx + x^3 dy + y^3 dz) = \frac{1}{3} \int_C (dx + x^3 dy) = -\frac{1}{3} \int_{-C} (dx + x^3 dy).$$

Η $-C$ βρίσκεται σε επίπεδο παράλληλο προς το xy -επίπεδο και ως καμπύλη του xy -επιπέδου είναι θετικά προσανατολισμένη, οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Green:

$$\frac{1}{3} \int_{-C} (dx + x^3 dy) = \iint_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} x^2 dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cos^2 \varphi \cdot r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \cdot \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi}{4}.$$

Τελικά,

$$\int_C \vec{F} = -\frac{\pi}{4}.$$

Παράδειγμα 11.3.10. Με χρήση του θεωρήματος Stokes να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C \vec{F}$, όπου $\vec{F} = (y^2 - 2z^2, x^2 + z^2, y^2 + 2x^2)$ και C είναι η τομή του κυλίνδρου $x^2 + y^2 = 4$ με το επίπεδο $x + y + z = 6$. Η C είναι αρνητικά προσανατολισμένη ως προς την εξωτερική κάθετο της επιφάνειας με ίχνος

$$x^2 + y^2 = 4, \quad x + y + z \leq 6, \quad z \geq 0.$$

Η C μπορεί να θεωρηθεί ως το θετικά προσανατολισμένο χείλος του δίσκου $S^* : x^2 + y^2 \leq 4, x + y + z = 6$. Μια παραμέτρηση της S^* είναι η $S : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $S(u, v) = (u, v, 6 - u - v)$, όπου

$\Delta = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq 4\}$. Έχουμε $S_u \times S_v = (1, 1, 1)$ ενώ $S(0, 0) = (0, 0, 6)$. Το $(1, 1, 1)$ σχεδιασμένο με αρχή το $(0, 0, 6)$ «δείχνει» στο εξωτερικό του δίσκου S^* , άρα $\vec{n}(u, v) = (1, 1, 1)$. Επιπλέον,

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y^2 - 2z^2 & x^2 + z^2 & y^2 + 2x^2 \end{vmatrix} = (2y - 2z, -4x - 4z, 2x - 2y),$$

άρα $\operatorname{rot} \vec{F} = -2x - 6z$. Έπεται ότι η ροή του $\operatorname{rot} \vec{F}$ διαμέσου της S είναι ίση με

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta} \operatorname{rot} \vec{F}(S(u, v)) \cdot \vec{n}(u, v) du dv &= \iint_{\Delta} \operatorname{rot} \vec{F}(u, v, 6 - u - v) \cdot (1, 1, 1) du dv \\ &= \iint_{\Delta} (-2u - 6(6 - u - v)) du dv = \iint_{\Delta} (4u + 6v - 36) du dv \\ &= 4 \iint_{\Delta} u du dv + 6 \iint_{\Delta} v du dv - 36 \iint_{\Delta} du dv \\ &= 4 \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^2 \cos \varphi dr d\varphi + 6 \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^2 \sin \varphi d\varphi - 36\pi \cdot 2^2 \\ &= -144\pi. \end{aligned}$$

Από το θεώρημα Stokes, $\int_C \vec{F} = -144\pi$.

Παράδειγμα 11.3.11. Με χρήση του θεωρήματος Stokes να υπολογίσετε το

$$\int_C (z^2 dx + x^2 dy + y^2 dz),$$

όπου C η κλειστή τεθλασμένη γραμμή $AB\Gamma A$, με $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $\Gamma(0, 0, 1)$.

Θέτουμε $\vec{F} = (z^2, x^2, y^2)$. Η C είναι το θετικά προσανατολισμένο χείλος της επιφάνειας S^* του τριγώνου $AB\Gamma$. Η καρτεσιανή εξίσωση του επιπέδου που ορίζεται από τα A, B, Γ είναι $x + y + z = 1$, δηλαδή $z = 1 - x - y$. Μια παραμέτρηση της S^* είναι η $S : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $S(u, v) = (u, v, 1 - u - v)$, όπου $\Delta = \{(u, v) : u + v \leq 1, u \geq 0, v \geq 0\}$. Έχουμε $S_u \times S_v = (1, 1, 1)$, που «δείχνει» προς τα έξω, άρα $\vec{n}(u, v) = (1, 1, 1)$. Επιπλέον,

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ z^2 & x^2 & y^2 \end{vmatrix} = 2(y, z, x),$$

άρα $\operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} = 2(y + z + x) = 2$ στην S . Από το θεώρημα Stokes,

$$\int_C \vec{F} = \iint_{\Delta} \operatorname{rot} \vec{F}(S(u, v)) \cdot \vec{n}(u, v) du dv = 2 \iint_{\Delta} du dv = 2 \times \text{εμβαδόν}(AB\Gamma) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Παράδειγμα 11.3.12. Δίνεται το διανυσματικό πεδίο $\vec{G} = (x^2 - 3x + 2, y, (-2x + 2)z)$.

(α) Να βρείτε το διανυσματικό πεδίο $\vec{F} = (P, Q, 0)$ με $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{G}$.

(β) Να βρείτε τη ροή του $\vec{G}$ μέσω της επιφάνειας με ίχνος

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2, \quad 0 \leq z \leq 1.$$

(α) Έχουμε

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = (-Q_z, P_z, Q_x - P_y).$$

Θα πρέπει λοιπόν να ισχύουν οι $-Q_z = x^2 - 3x + 2$, $P_z = y$ και $Q_x - P_y = -(2x + 2)z$. Οι $P = yz$ και $Q = -(x^2 - 3x + 2)z$ ικανοποιούν τις δύο πρώτες εξισώσεις. Τότε, $Q_x - P_y = -(2x - 3)z - z = -2xz + 2z$ άρα ισχύει και η τρίτη εξίσωση. Αν λοιπόν $\vec{F} = (yz, -(x^2 - 3x + 2)z, 0)$ τότε $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{G}$. Φυσικά, η $\vec{F}$ δεν είναι η μοναδική με αυτήν την ιδιότητα.

(β) Το ίχνος S^* της επιφάνειας είναι το τμήμα του άνω ημισφαιρίου

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2, \quad z \geq 0$$

που βρίσκεται κάτω από το επίπεδο $z = 1$. Η τομή του ημισφαιρίου με το επίπεδο $z = 1$ είναι ο κύκλος $C_1 : x^2 + y^2 = 1, z = 1$. Η S^* έχει δύο χείλη: C_1 και $C_2 : x^2 + y^2 = 2, z = 0$. Από το θεώρημα Stokes παίρνουμε ότι η ροή του $\vec{G} = \operatorname{rot} \vec{F}$ διαμέσου της S είναι ίση με $\int_{C_1} \vec{F} + \int_{C_2} \vec{F}$, όπου $\vec{F} = (yz, -(x^2 - 3x + 2)z, 0)$. Παρατηρούμε ότι $\vec{F}|_{C_2} = (0, 0, 0)$ αφού $z = 0$ πάνω στην C_2 . Επίσης, $\vec{F}|_{C_1} = (y, -x^2 + 3x - 2, 0)$ πάνω στην C_1 . Άρα, από το θεώρημα Green,

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \vec{F} &= - \int_{-C_1} \vec{F} = \int_{-C_1} (-y dx + (x^2 - 3x + 2) dy) \\ &= \iint_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} (2x - 3 + 1) dx dy = 2 \iint_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} x dx dy - 2 \iint_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cos \varphi dr d\varphi - 2\pi = \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \cdot \int_0^1 r^2 dr - 2\pi \\ &= 0 - 2\pi = -2\pi. \end{aligned}$$

Δηλαδή, η ζητούμενη ροή ισούται με -2π .

Παράδειγμα 11.3.13. Να επαληθεύσετε το θεώρημα Stokes για το διανυσματικό πεδίο $\vec{F} = (y, z-2, x+1)$ και την επιφάνεια $x^2 + y^2 = 2z, z \leq 1 - x$.

Θεωρούμε την $S : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $S(u, v) = \left(u, v, \frac{u^2 + v^2}{2}\right)$, όπου $(u, v) \in \Delta$ αν $\frac{u^2 + v^2}{2} \leq 1 - u$ ή ισοδύναμα $(u+1)^2 + v^2 \leq 3$, οπότε $\Delta = \{(u, v) : (u+1)^2 + v^2 \leq 3\}$.

Έχουμε $S_u \times S_v = (-u, -v, 1)$. Παρατηρούμε ότι $(S_u \times S_v)(0, 0) = (0, 0, 1)$. Το $(0, 0, 1)$ σχεδιασμένο με αρχή το $S(0, 0) = (0, 0, 0)$ «δείχνει» στο εσωτερικό της S^* , άρα $\vec{n}(u, v) = (u, v, -1)$ για κάθε $(u, v) \in \Delta$. Επιπλέον,

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y & z-2 & x+1 \end{vmatrix} = (-1, -1, -1).$$

Συνεπώς, η ροή του $\operatorname{rot} \vec{F}$ διαμέσου της S ισούται με

$$\iint_{\Delta} \operatorname{rot} \vec{F}(S(u, v)) \cdot \vec{n}(u, v) du dv = \iint_{\Delta} (-u - v + 1) du dv = - \iint_{\Delta} (u + v) du dv + \iint_{\Delta} du dv.$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα είναι ίσο με 3π . Για το πρώτο, θέτουμε $u = -1 + r \cos \varphi, v = r \sin \varphi$ όπου

$0 \leq r \leq \sqrt{3}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Τότε,

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta} (u + v) du dv &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} (-1 + r \cos \varphi + t \sin \varphi) r dr d\varphi \\ &= -2\pi \int_0^{\sqrt{3}} r dr + \int_0^{2\pi} (\cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi \cdot \int_0^{\sqrt{3}} r^2 dr \\ &= -\pi r^2 \Big|_0^{\sqrt{3}} + 0 = -3\pi. \end{aligned}$$

Άρα, η ροή του $\vec{F}$ διαμέσου της S είναι ίση με $3\pi + 3\pi = 6\pi$.

Το χείλος C της S^* είναι η τομή των επιφανειών $2z = x^2 + y^2$ και $x + z = 1$. Η C ως επίπεδη καμπύλη είναι αρνητικά προσανατολισμένη και περιγράφεται από τις $x^2 + y^2 = 2(1 - x)$ και $z = 1 - x$, δηλαδή $(x + 1)^2 + y^2 = 3$ και $z = 1 - x$. Μια παραμέτρηση της $-C$ είναι η:

$$x = -1 + \sqrt{3} \cos t, \quad y = \sqrt{3} \sin t, \quad z = 1 - x = 2 - \sqrt{3} \cos t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Δηλαδή έχουμε την $\gamma(t) = (-1 + \sqrt{3} \cos t, \sqrt{3} \sin t, 2 - \sqrt{3} \cos t)$ με $\gamma'(t) = \sqrt{3}(-\sin t, \cos t, \sin t)$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) &= (\sqrt{3} \sin t, -\sqrt{3} \cos t, \sqrt{3} \cos t) \cdot \sqrt{3}(-\sin t, \cos t, \sin t) = 3(-\sin^2 t - \cos^2 t + \sin t \cos t) \\ &= -3 + \frac{3}{2} \sin(2t), \quad t \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

και

$$\int_C \vec{F} = - \int_{-C} \vec{F} = 3 \int_0^{2\pi} dt + \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \sin(2t) dt = 6\pi.$$