

Μερικές Ασκήσεις στο Ολοκλήρωμα

Ασκηση 1. (α) Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $f(x) = 0$ για όλα τα $x \in [a, b]$ εκτός από ένα σημείο δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και $\int_a^b f(x) dx = 0$.

(β) Γενικεύστε για συναρτήσεις $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες $f(x) = 0$ για όλα τα $x \in [a, b]$ εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων.

(γ) Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αν $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x)$ για όλα τα $x \in [a, b]$ εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων δείξτε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη και έχει το ίδιο ολοκλήρωμα με την f .

Απόδειξη. (α) Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι παντού μηδέν εκτός από ένα σημείο $\xi \in [a, b]$. Ας υποθέσουμε ότι $f(\xi) > 0$ (διαφορετικά θεωρούμε την $-f$). Για να δείξουμε τώρα ότι η f είναι ολοκληρώσιμη θα χρησιμοποιήσουμε το γνωστό Κριτήριο Ολοκληρωσιμότητας δηλαδή θα δείξουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση P του $[a, b]$ με $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$. Έστω λοιπόν $\epsilon > 0$. Παρατηρούμε ότι σε κάθε υποδιάστημα του $[a, b]$, η f έχει minimum το μηδέν. Άρα $L(f, P) = 0$ για κάθε διαμέριση P του $[a, b]$. Άρα θα πρέπει να βρούμε διαμέριση P με $U(f, P) < \epsilon$. Ας υποθέσουμε για την συνέχεια ότι $\xi \in (a, b)$ (αν $\xi = a$ ή $\xi = b$ η απόδειξη είναι παρόμοια). Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 = b\}$ του $[a, b]$ με τέσσερα μόνο σημεία τέτοια ώστε (α) $x_2 - x_1 < \frac{\epsilon}{f(\xi)}$ και (β) $x_1 < \xi < x_2$. Εύκολα βλέπουμε ότι $U(f, P) = f(\xi) \cdot (x_2 - x_1) < \epsilon$. Άρα η f είναι ολοκληρώσιμη. Επιπλέον,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f = \sup \{L(f, P) : P \text{ διαμέριση του } [a, b]\} = \sup\{0\} = 0$$

(β) Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ και $\xi_1, \dots, \xi_n \in [a, b]$ τέτοια ώστε $f(x) \neq 0$ αν και μόνο αν $x = \xi_i$ για κάποιο $i = 1, \dots, n$. Για κάθε $i = 1, \dots, n$, έστω $f_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση που μηδενίζεται σε όλα τα $x \in [a, b]$ εκτός του x_i με $f_i(\xi_i) = f(\xi_i)$. Από το (α) ερώτημα έχουμε $\int_a^b f_i(x) dx = 0$ για κάθε $i = 1, \dots, n$. Παρατηρούμε επίσης ότι $f = f_1 + \dots + f_n$ και άρα από την γραμμικότητα του Ολοκληρώματος

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b (f_1 + \dots + f_n)(x) dx = \int_a^b f_1(x) dx + \dots + \int_a^b f_n(x) dx = 0$$

(γ) Θέτουμε $h = f - g$. Τότε η h είναι παντού μηδέν εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων. Άρα από το (β) η h είναι ολοκληρώσιμη και $\int_a^b h = 0$. Επειδή $g = f - h$ από την γραμμικότητα του Ολοκληρώματος έχουμε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b h(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

□

Άσκηση 2. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Αν υπάρχει ακολουθία διαμερίσεων (P_n) του $[a, b]$ τέτοια ώστε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (U(f, P_n) - L(f, P_n)) = 0 \quad (1)$$

δείξτε ότι:

1. Η f είναι ολοκληρώσιμη.
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} L(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} U(f, P_n) = \int_a^b f(x) dx$.

Απόδειξη. (1) Από την θεωρία Ολοκλήρωσης γνωρίζουμε ότι

$$L(f, P) \leq \int_a^b f \leq \overline{\int}_a^b f \leq U(f, P)$$

για κάθε διαμέριση P του $[a, b]$. Άρα

$$L(f, P_n) \leq \int_a^b f \leq \overline{\int}_a^b f \leq U(f, P_n) \quad (2)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και συνεπώς,

$$0 \leq \overline{\int}_a^b f - \int_a^b f \leq U(f, P_n) - L(f, P_n) \quad (3)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από τις (1), (3) και το Θεώρημα των Ισοσυγκλινουσών ακολουθιών έχουμε ότι $\overline{\int}_a^b f - \int_a^b f = 0 \Leftrightarrow \overline{\int}_a^b f = \int_a^b f$ δηλαδή η f είναι ολοκληρώσιμη.

(2) Δείξαμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και άρα η (2) γράφεται

$$L(f, P_n) \leq \int_a^b f(x) dx \leq U(f, P_n) \quad (4)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Οπότε

$$0 \leq \int_a^b f(x) dx - L(f, P_n) \leq U(f, P_n) - L(f, P_n)$$

και άρα από την (1) και το Θεώρημα των Ισοσυγκλινουσών ακολουθιών παίρνουμε

ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b f(x) dx - L(f, P_n) \right) = 0$ και άρα

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(f, P_n) = \int_a^b f(x) dx$$

Ομοίως, $\lim_{n \rightarrow \infty} U(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (U(f, P_n) - L(f, P_n)) + \lim_{n \rightarrow \infty} L(f, P_n) = \int_a^b f(x) dx$. □

Άσκηση 3. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a)$$

Σφμπεράνετε ότι αν $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$ τότε $\int_a^b f(x) dx \neq 0$.

Απόδειξη. Θέτουμε $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ για κάθε $x \in [a, b]$. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού έχουμε ότι $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = F'(\xi) \quad (5)$$

ή ισοδύναμα,

$$\frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a} = f(\xi) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a)$$

□

Άσκηση 4. Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Με χρήση του Γενικευμένου Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού δείξτε ότι (α) $\int_a^b g(x) dx \neq 0$ και (2) υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{\int_a^b f(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} = \frac{f(\xi)}{g(\xi)}$$

Απόδειξη. Θέτουμε $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ και $G(x) = \int_a^x g(t)dt$ για κάθε $x \in [a, b]$. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού έχουμε ότι οι συναρτήσεις $F(x)$ και $G(x)$ είναι παραγωγίσιμες με

$$F'(x) = f(x) \text{ και } G'(x) = g(x)$$

για κάθε $x \in [a, b]$. Αφού για όλα τα $x \in [a, b]$, $g(x) \neq 0$, από την Άσκηση 3, έπεται ότι και $G(b) - G(a) = \int_a^b g(x) dx \neq 0$. Εφαρμόζοντας τώρα το Γενικευμένο Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{f(\xi)}{g(\xi)}$$

ή ισοδύναμα,

$$\frac{\int_a^b f(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} = \frac{f(\xi)}{g(\xi)}$$

□

Άσκηση 5. Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Θεωρώντας την συνάρτηση

$$H(x) = \int_a^x f(t) dt \cdot \int_x^b g(t) dt$$

δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$f(\xi) \int_{\xi}^b g(t) dt = g(\xi) \int_a^{\xi} f(t) dt.$$

Απόδειξη. Θέτουμε $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ και $G(x) = \int_x^b g(t) dt$ για κάθε $x \in [a, b]$. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού η F είναι παραγωγίσιμη με $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Για την G παρατηρούμε ότι

$$G(x) = \int_x^b g(t) dt = \int_a^b g(t) dt - \int_a^x g(t) dt$$

Άρα, πάλι από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού, παίρνουμε

$$G'(x) = \left(\int_a^b g(t) dt - \int_a^x g(t) dt \right)' = - \left(\int_a^x g(t) dt \right)' = -g(x)$$

για κάθε $x \in [a, b]$. Η συνάρτηση $H = FG$ είναι παραγωγίσιμη ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Η παράγωγός της δίνεται από τον κανόνα παραγωγίσης γινομένου,

$$\begin{aligned} H'(x) &= (F(x)G(x))' = F'(x)G(x) + F(x)G'(x) \\ &= f(x) \int_x^b g(t) dt - g(x) \int_a^x f(t) dt \end{aligned}$$

Επίπλέον, είναι εύκολο να δούμε ότι $H(a) = H(b) = 0$. Άρα, από το Θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (a, b)$ με

$$H'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) \int_{\xi}^b g(t) dt - g(\xi) \int_a^{\xi} f(t) dt = 0$$

και το συμπέρασμα έπεται. □

Άσκηση 6. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση με $\int_a^b f(x) dx \neq 0$.

Δείξτε ότι για κάθε $\lambda \in (0, 1)$ υπάρχει $\xi \in (a, b)$ με $\int_a^{\xi} f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$.

Απόδειξη. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού έχουμε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ είναι συνεχής με $F(a) = 0$ και $F(b) = \int_a^b f(x) dx$.

Από υπόθεση έχουμε $F(b) \neq F(a)$. Από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού, η F θα λαμβάνει κάθε τιμή μεταξύ των $F(a)$ και $F(b)$. Αν $\lambda \in [0, 1]$ η τιμή $\lambda \int_a^b f(x) dx = \lambda F(b)$ είναι μεταξύ των $F(a)$ και $F(b)$ υπάρχει $\xi \in [a, b]$ με $F(\xi) = \lambda \int_a^b f(x) dx$, ισοδύναμα $\int_a^\xi f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$. $\square$

Άσκηση 7. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Αν η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(x) dx$, $x \in [a, b]$ είναι σταθερή δείξτε ότι $f = 0$.

Απόδειξη. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού έχουμε ότι $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Από την υπόθεσή μας έχουμε ότι η F είναι σταθερή συνάρτηση και άρα $f(x) = F'(x) = 0$. $\square$

Άσκηση 8. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ και $\int_a^b f(x) dx = 0$ δείξτε ότι $f(x) = 0$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού έχουμε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη με $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ έχουμε ότι $F'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ και συνεπώς η F είναι αύξουσα. Άρα το $F(a)$ και το $F(b) = \int_a^b f(x) dx = 0$ είναι αντίστοιχα η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της F . Επειδή είναι και τα δύο ίσα με μηδέν, η F είναι σταθερή και ίση με μηδέν. Συνεπώς και η παράγωγος της F θα είναι μηδέν, δηλαδή $f = F' = 0$. $\square$

Άσκηση 9. Έστω $G : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$G(x) = \int_0^{\sqrt{\ln x}} e^{t^2} dt$$

για κάθε $x > 1$. Δείξτε ότι η G είναι παραγωγίσιμη και βρείτε τον τύπο της G' .

Απόδειξη. Αν $F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$, $x > 0$ και $\phi(x) = \sqrt{\ln x}$, $x > 1$, τότε $G(x) = F(\phi(x))$. Συνεπώς η G είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, αφού $F'(x) = e^{x^2}$ και $\phi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x}$. Από τον Κανόνα Αλυσίδας έχουμε

$$G'(x) = F'(\phi(x))\phi'(x) = e^{\ln x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}}.$$

$\square$

Άσκηση 10. Έστω $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ γνησίως αύξουσα συνεχής και με συνεχή παράγωγο συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\int_c^d f^{-1}(x) dx = bd - ac - \int_a^b f(x) dx$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = f(t)$, $t \in [a, b]$ και ολοκλήρωση κατά μέρη, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_c^d f^{-1}(x) dx &= \int_a^b f^{-1}(f(t))f'(t) dt = \int_a^b tf'(t) dt \\ &= [tf(t)]_a^b - \int_a^b t'f(t) dt \\ &= bd - ac - \int_a^b f(t) dt\end{aligned}$$

□

Άσκηση 11. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση και $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, $x \in [a, b]$. Αν $x_0 \in [a, b]$ και το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός δείξτε ότι $F'(x_0) = \ell$.

Απόδειξη. Αν $f(x_0) = \ell$, τότε η f είναι συνεχής στο x_0 και το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Αν $f(x_0) \neq \ell$, θέτουμε $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x)$ αν $x \neq x_0$ και $g(x_0) = \ell$. Η g είναι συνεχής στο x_0 και διαφέρει από την f μόνο στο x_0 . Από την Άσκηση 1 παραπάνω, η g είναι ολοκληρώσιμη και επιπλέον για κάθε $x \in [a, b]$, $\int_a^x g(t) dt = \int_a^x f(t) dt$. Με άλλα λόγια αν $G(x) = \int_a^x g(t) dt$ τότε $G = F$. Επειδή η g είναι συνεχής στο x_0 , η $G = F$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $F'(x_0) = G'(x_0) = g(x_0) = \ell$. □

Άσκηση 12. Για κάθε $n = 0, 1, \dots$ θέτουμε

$$I_n = \int_0^{2\pi} \cos^n x dx$$

(i) Βρείτε τα I_0 και I_1 . (ii) Δείξτε ότι $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ για κάθε $n \geq 2$.

Απόδειξη. (1) (i) $I_0 = \int_0^{2\pi} dx = 2\pi$ και $I_1 = \int_0^{2\pi} \cos x dx = [\sin x]_0^{2\pi} = 0$.

(ii) Για κάθε $n \geq 2$ έχουμε

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int_0^{2\pi} \cos^n x \, dx = \int_0^{2\pi} \cos^{n-1} x (\sin x)' \, dx \\
 &= [\cos^{n-1} x \sin x]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (\cos^{n-1} x)' \sin x \, dx \\
 &= -(n-1) \int_0^{2\pi} \cos^{n-2} x (\cos x)' \sin x \, dx \\
 &= (n-1) \int_0^{2\pi} \cos^{n-2} x \sin^2 x \, dx \\
 &= (n-1) \int_0^{2\pi} \cos^{n-2} x (1 - \cos^2 x) \, dx \\
 &= (n-1) \int_0^{2\pi} \cos^{n-2} x \, dx - (n-1) \int_0^{2\pi} \cos^n x \, dx \\
 &= (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n
 \end{aligned}$$

και άρα

$$I_n = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n \Rightarrow I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

για κάθε $n \geq 2$. □