

ΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ RIEMANN

1. Υπενθύμιση Βασικών έννοιών

Έστω $[a, b]$ ένα κλειστό φραγμένο διάστημα του $\mathbb{R}$. Κάθε πεπερασμένο υποσύνολο P του $[a, b]$ που περιέχει τα σημεία a, b καλείται **διαμέριση** του $[a, b]$. Συνήθως τις διαμερίσεις του $[a, b]$ τις συμβολίζουμε με τα γράμματα $P, Q, R, \dots$ απαριθμώντας τα σημεία τους σε αύξουσα μορφή. Αν $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$ μια διαμέριση του $[a, b]$ τότε για κάθε $1 \leq i \leq n$ συμβολίζουμε με Δx_i το μήκος του διαστήματος $[x_{i-1}, x_i]$, δηλαδή

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

Το άθροισμα

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_{i-1})$$

όπου

$$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

για κάθε $i = 1, \dots, n$, καλείται **κάτω άθροισμα της συνάρτησης f ως προς την διαμέριση P** . Αντίστοιχα, το άθροισμα,

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^n M_i (x_i - x_{i-1})$$

όπου

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

για κάθε $i = 1, \dots, n$, καλείται **άνω άθροισμα της συνάρτησης f ως προς την διαμέριση P** . Εύκολα βλέπουμε ότι

$$L(f, P) \leq U(f, P) \quad (1)$$

για κάθε διαμέριση P .

Πρόταση 1. Έστω P, R δύο διαμερίσεις του $[a, b]$ τέτοιες ώστε $P \subseteq R$. Τότε

$$L(f, P) \leq L(f, R) \text{ και } U(f, R) \leq U(f, P) \quad (2)$$

Πόρισμα 2. Για οποιεσδήποτε δύο διαμερίσεις P_1, P_2 του $[a, b]$ ισχύει ότι

$$L(f, P_1) \leq U(f, P_2) \quad (3)$$

Απόδειξη. Έστω P_1, P_2 δύο διαμερίσεις του $[a, b]$. Θέτουμε

$$R = P_1 \cup P_2$$

Τότε η R είναι μια διαμέριση του $[a, b]$ με $P_1 \subseteq R$ και $P_2 \subseteq R$. Από την Πρόταση 1 παίρνουμε ότι

$$L(f, P_1) \leq L(f, R) \text{ και } U(f, R) \leq U(f, P_2)$$

Επειδή $L(f, R) \leq U(f, R)$ συμπεραίνουμε ότι $L(f, P_1) \leq U(f, P_2)$. $\square$

Το **κάτω ολοκλήρωμα της** f συμβολίζεται με $\int_a^b f(x) dx$ και ορίζεται να είναι το supremum όλων των κάτω αθροισμάτων,

$$\int_a^b f(x) dx = \sup\{L(f, P) : P \text{ διαμέριση του } [a, b]\}$$

Αντίστοιχα, το **άνω ολοκλήρωμα της** f συμβολίζεται με $\overline{\int_a^b} f(x) dx$ και ορίζεται να είναι το infimum όλων των άνω αθροισμάτων,

$$\overline{\int_a^b} f(x) dx = \inf\{U(f, P) : P \text{ διαμέριση του } [a, b]\}$$

Γνωρίζουμε ότι αν $A, B \subseteq \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $a \leq b$ για κάθε $a \in A$ και για κάθε $b \in B$ τότε $\sup A \leq \inf B$. Άρα, από το Πρόσχημα 2 και τον ορισμό του άνω και κάτω ολοκληρώματος έχουμε το εξής.

Πρόσχημα 3. Για κάθε φραγμένη συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$\int_a^b f(x) dx \leq \overline{\int_a^b} f(x) dx \quad (4)$$

Ορισμός 1. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Η f καλείται **ολοκληρώσιμη** αν το κάτω ολοκλήρωμα της είναι ίσο με το άνω ολοκλήρωμά της. Στην περίπτωση αυτή η κοινή τιμή του άνω και κάτω ολοκληρώματος καλείται **ολοκλήρωμα της** f και συμβολίζεται με $\int_a^b f(x) dx$

2. Κριτήριο Ολοκληρωσιμότητας

Πρόταση 4. Μια συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση P του $[a, b]$ τέτοια ώστε $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$.

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και έστω $I = \int_a^b f(x) dx$. Έστω $\epsilon > 0$. Έχουμε

$$I = \int_a^b f(x) dx = \sup\{L(f, P) : P \text{ διαμέριση του } [a, b]\}$$

Άπό την χαρακτηριστική ιδιότητα του supremum υπάρχει διαμέριση P_1 του $[a, b]$ τέτοια ώστε

$$I - \frac{\epsilon}{2} < L(f, P_1) \quad (5)$$

Ομοίως,

$$I = \overline{\int_a^b} f(x) dx = \inf\{U(f, P) : P \text{ διαμέριση του } [a, b]\}$$

και άρα υπάρχει διαμέριση P_2 του $[a, b]$ τέτοια ώστε

$$U(f, P_2) < I + \frac{\epsilon}{2} \quad (6)$$

Θέτουμε $P = P_1 \cup P_2$. Τότε $P_1, P_2 \subseteq P$ και άρα από την Πρόταση 1 έχουμε

$$L(f, P_1) \leq L(f, P) \leq U(f, P) \leq U(f, P_2) \quad (7)$$

Από τις (5)-(7) παίρνουμε τελικά ότι

$$I - \frac{\epsilon}{2} < L(f, P) \leq U(f, P) < I + \frac{\epsilon}{2}$$

που σημαίνει ότι $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$.

($\Leftarrow$) Έστω ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση P του $[a, b]$ τέτοια ώστε $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$. Από τον ορισμό του κάτω και άνω ολοκληρώματος έχουμε

$$L(f, P) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \overline{\int_a^b f(x) dx} \leq U(f, P)$$

Άρα

$$0 \leq \overline{\int_a^b f(x) dx} - \int_a^b f(x) dx \leq U(f, P) - L(f, P) < \epsilon \quad (8)$$

Συνεπώς για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει ότι

$$0 \leq \overline{\int_a^b f(x) dx} - \int_a^b f(x) dx < \epsilon$$

και αυτό σημαίνει ότι αναγκαστικά $\overline{\int_a^b f(x) dx} = \int_a^b f(x) dx$ δηλαδή η f είναι ολοκληρώσιμη. $\square$

3. Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού I

Θεώρημα 5. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αν υπάρχει $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$ τότε

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (9)$$

Αν $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, τότε μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$ λέγεται *αρχική* (ή *αντιπαράγωγος* ή *παράγουσα*) της f . Η αρχική μιας συνάρτησης αν υπάρχει¹ δεν είναι μοναδική.

¹Υπάρχουν συναρτήσεις που δεν έχουν αρχική. Πράγματι, από το Θεώρημα Darboux γνωρίζουμε ότι η παράγωγος μιας συνάρτησης ικανοποιεί την ιδιότητα των ενδιάμεσων τιμών (παρόλο που μπορεί να μην είναι συνεχής). Άρα μια συνάρτηση που δεν έχει αυτήν την ιδιότητα δεν μπορεί να έχει αρχική. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = [x]$ (δηλ. το $f(x)$ είναι το ακέραιο μέρος του x) δεν ικανοποιεί την ιδιότητα των Ενδιάμεσων Τιμών αφού παίρνει μόνο ακέραιες τιμές και άρα δεν μπορεί να είναι η παράγωγος κάποιας παραγωγίσιμης συνάρτησης, δηλαδή δεν έχει αρχική. Παρόλα αυτά για κάθε $[a, b]$ το ολοκλήρωμα $\int_a^b [x] dx$ υπάρχει γιατί η $f(x) = [x]$ είναι αψήφιστη συνάρτηση.

Όμως λόγω του Θεωρήματος Μέσης Τιμής όλες οι αρχικές μιας συνάρτησης f παράγονται ουσιαστικά από μια συνάρτηση με πρόσθεση σταθεράς² και άρα στην (9) δεν παίζει ρόλο ποιά αρχική συνάρτηση της f επιλέγουμε.

Παράδειγμα 6. Θυμηθείτε ότι η συνάρτηση $\arctan x$ (ή $\tan^{-1}x$) ορίζεται ως η αντίστροφη της $f(x) = \tan x$ στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ και έχει παράγωγο

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}. \quad (10)$$

Το Θεώρημα 5 διατυπώνεται ισοδύναμα και ως εξής.

Θεώρημα 7. Έστω $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν η F' είναι ολοκληρώσιμη³, τότε $\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 5 στηρίζεται στο Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού. Στην ουσία θα αποδείξουμε το εξής ισχυρότερο θεώρημα:

Θεώρημα 8. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση και έστω ότι υπάρχει $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b) με $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in (a, b)$. Τότε $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

Σταθεροποιούμε για την συνέχεια δύο συναρτήσεις $f, F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος 8. Θα χρειασθούμε το εξής λήμμα.

Λήμμα 9. Για κάθε διαμέριση P του $[a, b]$ έχουμε

$$L(f, P) \leq F(b) - F(a) \leq U(f, P) \quad (11)$$

Απόδειξη. Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$ μια διαμέριση του $[a, b]$. Καταρχήν παρατηρούμε ότι

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n (F(x_i) - F(x_{i-1})) \quad (12)$$

Τώρα από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει $t_i \in (x_{i-1}, x_i)$ (και άρα $t_i \in (a, b)$) για κάθε $i = 1, \dots, n$, τέτοιο ώστε

$$\frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = F'(t_i) = f(t_i) \Rightarrow F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(t_i)\Delta x_i \quad (13)$$

²Πράγματι, αν $F'_1 = F'_2 = f$ τότε $F'_2 - F'_1 = (F_2 - F_1)' = 0$ και άρα $F_2 - F_1 = c \Leftrightarrow F_2 = F_1 + c$.

³Η υπόθεση ότι η F' είναι ολοκληρώσιμη είναι απαραίτητη γιατί (όπως αποδεικνύεται με χρήση μεθόδων της Θεωρίας Μέτρου) υπάρχουν συναρτήσεις με μη ολοκληρώσιμη παράγωγο.

Άρα η (12) γράφεται

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i. \quad (14)$$

Επίσης

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \text{ και } U(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i \quad (15)$$

όπου $m_i = \inf\{f(x) : x \in (x_{i-1}, x_i)\}$ και $M_i = \sup\{f(x) : x \in (x_{i-1}, x_i)\}$ για κάθε $i = 1, \dots, n$. Επειδή $t_i \in (x_{i-1}, x_i) \Rightarrow m_i \leq f(t_i) \leq M_i$ για κάθε $1 \leq i \leq n$ και άρα, από την (14), $L(f, P) \leq F(b) - F(a) \leq U(f, P)$. $\square$

Απόδειξη του Θεωρήματος 8. Θέτουμε $I = \int_a^b f(x) dx$. Θα δείξουμε ότι $I = F(b) - F(a)$.

α' τρόπος: Από τον ορισμό του ολοκληρώματος, για κάθε διαμέριση P του $[a, b]$ έχουμε

$$L(f, P) \leq I \leq U(f, P) \quad (16)$$

Αντίστοιχα, από το Λήμμα 9, για κάθε διαμέριση P του $[a, b]$ έχουμε

$$L(f, P) \leq F(b) - F(a) \leq U(f, P) \quad (17)$$

Έστω $\epsilon > 0$. Από το Κριτήριο Ολοκληρωσιμότητας (Πρόταση 4) υπάρχει διαμέριση P_0 του $[a, b]$ τέτοια ώστε

$$U(f, P) - L(f, P) < \epsilon \quad (18)$$

Από τις (16) - (18) παίρνουμε ότι

$$|I - (F(b) - F(a))| < \epsilon \quad (19)$$

Επειδή η (19) ισχύει για κάθε $\epsilon > 0$ έπεται ότι $|I - (F(b) - F(a))| = 0$, δηλαδή $I = F(b) - F(a)$.

β' τρόπος: Από το Λήμμα 9, έχουμε ότι η διαφορά $F(b) - F(a)$ είναι άνω φράγμα του συνόλου όλων των $L(f, P)$ με P διαμέριση του $[a, b]$. Άρα

$$\int_a^b f(x) dx = \sup\{L(f, P) : P \text{ διαμέριση του } [a, b]\} \leq F(b) - F(a) \quad (20)$$

διότι το supremum ενός υποσυνόλου του $\mathbb{R}$ είναι εξ ορισμού το μικρότερο άνω φράγμα. Όμως επειδή η f είναι ολοκληρώσιμη, έχουμε $\int_a^b f(x) dx = I$ και συνεπώς η (20) γράφεται

$$I \leq F(b) - F(a) \quad (21)$$

Αντίστοιχα, πάλι από το Λήμμα 9, έχουμε ότι η διαφορά $F(b) - F(a)$ είναι κάτω φράγμα του συνόλου όλων των $U(f, P)$ με P διαμέριση του $[a, b]$ και άρα

$$F(b) - F(a) \leq \overline{\int_a^b f(x) dx} = \inf\{U(f, P) : P \text{ διαμέριση του } [a, b]\}$$

διότι το infimum ενός υποσυνόλου του $\mathbb{R}$ είναι εξ ορισμού το μεγαλύτερο κάτω φράγμα. Όμως πάλι επειδή η f είναι ολοκληρώσιμη, έχουμε $\int_a^b f(x) dx = I$ και συνεπώς

$$F(b) - F(a) \leq I \quad (22)$$

Από τις (21) και (22) προκύπτει τελικά ότι $I = F(b) - F(a)$. $\square$

4. Βασικές Ιδιότητες του Ολοκληρώματος

Πρόταση 10. (Γραμμικότητα) (α) Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Τότε η συνάρτηση $f + g$ είναι ολοκληρώσιμη και ισχύει ότι

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \quad (23)$$

(β) Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση λf είναι ολοκληρώσιμη και ισχύει ότι

$$\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx \quad (24)$$

Πόρισμα 11. Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε η συνάρτηση $\lambda f + \mu g$ είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx \quad (25)$$

Παρατήρηση 12. Έστω $\mathcal{F}[a, b]$ το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω $\mathcal{R}[a, b]$ το σύνολο όλων των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων του $\mathcal{F}[a, b]$. Από την Γραμμική Άλγεβρα γνωρίζουμε ότι το σύνολο $\mathcal{F}[a, b]$ εφοδιασμένο με την πράξη της πρόσθεσης $(f, g) \rightarrow f + g$ όπου $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού $(\lambda, f) \rightarrow \lambda f$ όπου $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ αποτελεί έναν διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{R}$. Από το Πόρισμα 11 έχουμε ότι το σύνολο $\mathcal{R}[a, b]$ εφοδιασμένο με την πρόσθεση και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό αποτελεί έναν διανυσματικό υπόχωρο του $\mathcal{F}[a, b]$. Επιπλέον το Πόρισμα 11 λέει ότι η συνάρτηση $T : \mathcal{R}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $T(f) = \int_a^b f(x) dx$ ικανοποιεί την σχέση $T(\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda T(f) + \mu T(g)$ και άρα αποτελεί μια γραμμική συνάρτηση από τον διανυσματικό χώρο $\mathcal{R}[a, b]$ στο $\mathbb{R}$.

Ισχύει επίσης ότι και το γινόμενο ολοκληρώσιμων συναρτήσεων είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

Πρόταση 13. Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Τότε η συνάρτηση fg είναι ολοκληρώσιμη.

Παρατήρηση 14. Προσχή, η σχέση

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx \quad (26)$$

δεν είναι γενικά σωστή. Πχ. αν $f(x) = g(x) = x$ τότε $\int_0^1 f(x)g(x) dx = \int_0^1 x^2 dx = 1/3$ ενώ $\int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx = \left(\int_0^1 x dx\right)^2 = \frac{1}{4}$. Υπάρχουν βέβαια και περιπτώσεις όπου η (26) ισχύει. Πχ. όταν οι f, g είναι, όπως λένε στην Θεωρία Πιθανοτήτων, ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

Μια πολύ χρήσιμη ιδιότητα του ολοκληρώματος είναι και η επόμενη.

Πρόταση 15. (Προσθετικότητα) Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω $c \in (a, b)$. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ αν και μόνο αν είναι ολοκληρώσιμη στα $[a, c]$ και $[c, b]$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (27)$$

Πόρισμα 16. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ τότε είναι ολοκληρώσιμη και σε κάθε κλειστό υποδιάστημα του $[a, b]$.

Πρόταση 17. (Μονοτονία) Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες. Αν $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$ τότε

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

Πόρισμα 18. Αν $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη με $f(x) \geq 0$ τότε $\int_a^b f(x) \geq 0$.

Απόδειξη. Θέτουμε $g = 0$ και εφαρμόζουμε την Πρόταση 17. $\square$

Πόρισμα 19. Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς με $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$ τότε

$$\int_a^b f(x) dx > \int_a^b g(x) dx$$

Ειδικότερα, αν $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ τότε $\int_a^b f(x) dx > 0$.

Απόδειξη. Θέτουμε $h = f - g$. Η h είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών, ορίζεται σε κλειστό φραγμένο διάστημα και άρα, από γνωστό θεώρημα στις συνεχείς συναρτήσεις, θα λαμβάνει ελάχιστη τιμή. Υπάρχει δηλαδή $x_0 \in [a, b]$ τέτοιο ώστε $h(x_0) = \min\{h(x) : x \in [a, b]\}$. Αφού $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$ έχουμε $h(x) = f(x) - g(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Ειδικότερα, $h(x_0) > 0$ και

$h(x) \geq h(x_0)$ για κάθε $x \in [a, b]$, οπότε από την Μονοτονία του Ολοκληρώματος (Πρόταση 17),

$$\int_a^b h(x) dx \geq \int_a^b h(x_0) dx = h(x_0)(b-a) > 0$$

Από την Γραμμικότητα του Ολοκληρώματος έχουμε

$$\int_a^b h(x) dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

$$\text{Συνεπώς } \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx > 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx > \int_a^b g(x) dx. \quad \square$$

Παρατήρηση 20. Αποδεικνύεται (με Θεωρία Μέτρου) ότι το Πόρισμα 19 ισχύει γενικότερα για ολοκληρώσιμες συναρτήσεις χωρίς την επιπλέον υπόθεση της συνέχειας των f, g . Δηλαδή, αν $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες με $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$ τότε $\int_a^b f(x) dx > \int_a^b g(x) dx$

Επίσης πολύ χρήσιμη είναι και η εξής πρόταση.

Πρόταση 21. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη. Τότε η συνάρτηση $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη και ισχύει ότι

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (28)$$

5. Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού II

Θεώρημα 22. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Θεωρούμε την συνάρτηση $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (29)$$

για κάθε $x \in [a, b]$.

(α) Η F είναι συνεχής. Ειδικότερα η F είναι συνάρτηση *Lipschitz* και ικανοποιεί την ανισότητα

$$|F(y) - F(x)| \leq M|y - x| \quad (30)$$

όπου $M = \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$.

(β) Αν η f είναι συνεχής σε κάποιο $x_0 \in [a, b]$ τότε η F είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει ότι $F'(x_0) = f(x_0)$.

⁴για $x = a$ κατά σύμβαση δεχόμαστε ότι $F(a) = \int_a^a f(x) dx = 0$

Απόδειξη. Καταρχάς παρατηρούμε ότι λόγω της ιδιότητας της Προσθετικότητας του ολοκληρώματος (Πρόταση 15) η F είναι καλά ορισμένη.

(α) Αρκεί να δείξουμε την (30) γιατί όπως γνωρίζουμε κάθε Lipschitz συνάρτηση είναι (ομοιόμορφα) συνεχής. Έστω $x, y \in [a, b]$. Αν $x = y$ τότε η ανισότητα είναι προφανής. Έστω $x \neq y$ και έστω $y > x$ (η απόδειξη είναι παρόμοια αν $y < x$). Από την Προσθετικότητα του Ολοκληρώματος έχουμε

$$F(y) = \int_a^y f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_x^y f(t) dt = F(x) + \int_x^y f(t) dt$$

και άρα από την (28) και την μονοτονία του ολοκληρώματος,

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f(t) dt \right| \leq \int_x^y |f(t)| dt \leq M(y - x)$$

(β) Επειδή

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$$

πρέπει να δείξουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$$

Άρα, σύμφωνα με τον ορισμό του ορίου συνάρτησης πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$x \in [a, b] \text{ και } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| < \epsilon \quad (31)$$

Έστω λοιπόν $\epsilon > 0$. Αφού η f είναι συνεχής στο $x_0 \in [a, b]$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$x \in [a, b] \text{ και } |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon/2 \quad (32)$$

Θα δείξουμε ότι το δ για το οποίο ισχύει η (32) είναι το κατάλληλο για την (31). Πράγματι, έστω $x \in [a, b]$ με $0 < |x - x_0| < \delta$. Ας υποθέσουμε ότι $x > x_0$ (η απόδειξη είναι παρόμοια για $x < x_0$). Παρατηρούμε ότι $F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x f(t) dt$.

Επίσης είναι εύκολο να δούμε ότι $f(x_0) = \frac{\int_{x_0}^x f(x_0) dt}{x - x_0}$. Οπότε,

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{\int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0)) dt}{x - x_0} \right| \\ &\stackrel{(28)}{\leq} \frac{\int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)| dt}{x - x_0} \\ &\stackrel{(32)}{\leq} \frac{\int_{x_0}^x \frac{\epsilon}{2} dt}{x - x_0} = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \end{aligned}$$

□

Πόρισμα 23. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Θεωρούμε την συνάρτηση $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$G(x) = \int_x^b f(t) dt \quad (33)$$

για κάθε⁵ $x \in [a, b]$.

(α) Η G είναι συνεχής. Ειδικότερα η G είναι συνάρτηση *Lipschitz* και ικανοποιεί την ανισότητα

$$|G(y) - G(x)| \leq M|y - x| \quad (34)$$

όπου $M = \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$.

(β) Αν η f είναι συνεχής σε κάποιο $x_0 \in [a, b]$ τότε η G είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει ότι $G'(x_0) = -f(x_0)$.

Απόδειξη. Από την Προσθετικότητα του Ολοκληρώματος έχουμε

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_x^b f(t) dt$$

Άρα, θέτοντας $c = \int_a^b f(t) dt$ και $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ παίρνουμε $c = F(x) + G(x)$ και συνεπώς

$$G(x) = c - F(x) \quad (35)$$

Εφαρμόζοντας τώρα το Θεώρημα 22 παίρνουμε άμεσα τα (α) και (β). Πράγματι για το (α) παρατηρούμε ότι $|G(y) - G(x)| = |F(y) - F(x)|$ και για το (β) $G'(x_0) = (c - F)'(x_0) = -F'(x_0)$. $\square$

Πόρισμα 24. Έστω I διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Έστω $c \in I$ και έστω

$$F(x) = \begin{cases} \int_c^x f(t) dt & \text{αν } x \geq c \\ -\int_x^c f(t) dt & \text{αν } x < c \end{cases}$$

Τότε $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in I$. Άρα κάθε συνεχής συνάρτηση $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ορισμένη σε διάστημα του $\mathbb{R}$ έχει αρχική συνάρτηση.

Απόδειξη. Από το 22 για $x \geq c$, έχουμε $F'(x) = f(x)$. Επίσης, αν $x < c$ παρατηρούμε ότι $F(x) = -G(x)$, όπου G η συνάρτηση του Πορίσματος 23 και άρα $F'(x) = (-G(x))' = -G'(x) = -(-f(x)) = f(x)$. $\square$

Ορισμός 2. Έστω $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I διάστημα του $\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I . Έστω $c \in I$. Για κάθε $x < c$ ορίζουμε

$$\int_c^x f(t) dt = -\int_x^c f(t) dt \quad (36)$$

⁵για $x = b$ πάλι κατά σύμβαση δεχόμαστε ότι $F(a) = \int_b^b f(x) dx = 0$

Με τον παραπάνω συμβολισμό η συνάρτηση $F(x)$ που ορίζεται στο Πόρισμα 24 γράφεται με ενιαίο τρόπο ως

$$F(x) = \int_c^x f(t) dt$$

για κάθε $x \in I$ (που σημαίνει ότι αν $c < x$ το $\int_c^x f(t) dt$ είναι το κανονικό ολοκλήρωμα στο $[c, x]$, αν $x = c$ $\int_c^x f(t) dt = 0$ και αν $x < c$ $\int_c^x f(t) dt = -\int_x^c f(t) dt$). Σύμφωνα με τον Ορισμό 2 το Πόρισμα 24 αναδιατυπώνεται ως εξής.

Πόρισμα 25. Έστω I διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Έστω $c \in I$ και έστω $F(x) = \int_c^x f(t) dt$ για κάθε $x \in I$. Τότε η F είναι μια αντιπαράγωγος της f .

Πόρισμα 26. Έστω I διάστημα του $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής, $h : I \rightarrow I$ παραγωγίσιμη και $c \in I$. Ορίζουμε

$$H(x) = \int_c^{h(x)} f(t) dt$$

για κάθε $x \in I$ (όπου αν $h(x) < c$, χρησιμοποιούμε τον Ορισμό 2). Τότε η H είναι παραγωγίσιμη και ισχύει ότι

$$H'(x) = f(h(x))h'(x)$$

για κάθε $x \in I$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι $H(x) = F(h(x))$, όπου $F(x) = \int_c^x f(t) dt$. Από το Πόρισμα 25 η F είναι παραγωγίσιμη με $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in I$ και άρα από τονόνα Αλυσίδας, $H'(x) = F'(h(x))h'(x) = f(h(x))h'(x)$. $\square$

Πόρισμα 27. Έστω I διάστημα του $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και $h_1, h_2 : I \rightarrow I$ παραγωγίσιμες. Ορίζουμε

$$E(x) = \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(t) dt$$

για κάθε $x \in I$ (όπου αν για κάποιο $x \in I$, $h_1(x) > h_2(x)$, χρησιμοποιούμε τον Ορισμό 2). Τότε η E είναι παραγωγίσιμη και ισχύει ότι

$$E'(x) = f(h_2(x))h_2'(x) - f(h_1(x))h_1'(x)$$

για κάθε $x \in I$.

Απόδειξη. Έστω $c \in I$. Από την Προσθετικότητα του Ολοκληρώματος (Πρόταση 15 και χρησιμοποιώντας τον Ορισμό 2 δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

για οποιαδήποτε $a, b \in I$. Άρα

$$E(x) = \int_{h_1(x)}^c f(t) dt + \int_c^{h_2(x)} f(t) dt = -H_1(x) + H_2(x)$$

όπου $H_1(x) = \int_c^{h_1(x)} f(t) dt$ και $H_2(x) = \int_c^{h_2(x)} f(t) dt$. Από το Πόρισμα 26 παίρνουμε

$$E'(x) = (H_2 - H_1)'(x) = H_2'(x) - H_1'(x) = f(h_2(x))h_2'(x) - f(h_1(x))h_1'(x)$$

□

6. Μέθοδοι Ολοκλήρωσης

Πρόταση 28. (Ολοκλήρωση κατά παράγοντες) Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες με f', g' ολοκληρώσιμες. Τότε

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx$$

Απόδειξη. Επειδή $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ έχουμε ότι $f' \cdot g = (f \cdot g)' - f \cdot g'$. Άρα από την γραμμικότητα του ολοκληρώματος και το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού,

$$\begin{aligned} \int_a^b f'(x)g(x) dx &= \int_a^b (f(x)g(x))' dx - \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx \\ &= [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx. \end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 29.

$$\begin{aligned} \int_1^e \ln x dx &= \int_1^e (x)' \ln x dx = [x \ln x]_1^e - \int_1^e x(\ln x)' dx \\ &= [x \ln x]_1^e - \int_1^e x \frac{1}{x} dx \\ &= [x \ln x]_1^e - \int_1^e 1 dx \\ &= [x \ln x]_1^e - [x]_1^e = [x \ln x - x]_1^e = 1 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 30. Δείξτε ότι

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{\pi}{2}$$

Απόδειξη. Έστω $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt$. Έχουμε,

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot (\sin t)' \, dt = \cos t \sin t \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)' \sin t \, dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \, dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t) \, dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt \\ &= \pi - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt = \pi - I \end{aligned}$$

και άρα

$$2I = \pi \Rightarrow I = \frac{\pi}{2} \quad (37)$$

□

Θεώρημα 31. (Ολοκλήρωση με αλλαγή μεταβλητής I) Έστω I διάστημα του $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και έστω $\phi : [c, d] \rightarrow I$ παραγωγίσιμη με ϕ' ολοκληρώσιμη. Τότε

$$\int_c^d f(\phi(t)) \cdot \phi'(t) \, dt = \int_{\phi(c)}^{\phi(d)} f(x) \, dx \quad (38)$$

Απόδειξη. Αφού η f είναι συνεχής, από το Πόρισμα 24 υπάρχει $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ με $F' = f$. Από το Θεώρημα 7,

$$\int_{\phi(c)}^{\phi(d)} f(x) \, dx = F(\phi(d)) - F(\phi(c)) = F \circ \phi(d) - F \circ \phi(c) \quad (39)$$

Από την άλλη μεριά, $F' = f$ και άρα από τον κανόνα παραγωγισής σύνθετης συνάρτησης και το Θεώρημα 7, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_c^d f(\phi(t)) \cdot \phi'(t) \, dt &= \int_c^d F'(\phi(t)) \cdot \phi'(t) \, dt \\ &= \int_c^d (F \circ \phi)'(t) \, dt \\ &= F \circ \phi(d) - F \circ \phi(c) \end{aligned} \quad (40)$$

Από (39) και (40) έπεται το συμπέρασμα. □

Στην πράξη, λέμε ότι

$$\text{θέτουμε } \phi(t) = x \text{ και } \phi'(t) \, dt = dx$$

Παράδειγμα 32.

$$\int_a^b \phi(t) \phi'(t) dt \stackrel{x=\phi(t), \quad dx=\phi'(t) dt}{=} \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{\phi(a)}^{\phi(b)} = \left[\frac{\phi^2(x)}{2} \right]_a^b$$

Πχ.

$$\begin{aligned} \int_c^d \sin t \cos t dt &= \int_c^d \sin t (\sin t)' dt \\ &\stackrel{x=\sin t, \quad dx=\cos t dt}{=} \int_{\sin c}^{\sin d} x dx = \frac{\sin^2 d - \sin^2 c}{2} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 33. Έστω $\phi : [a, b] \rightarrow (0, +\infty)$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο. Τότε

$$\int_c^d \frac{\phi'(t)}{\phi(t)} dt \stackrel{x=\phi(t), \quad dx=\phi'(t) dt}{=} \int_{\phi(c)}^{\phi(d)} \frac{dx}{x} dx = [\ln x]_{\phi(c)}^{\phi(d)} = \ln \phi(d) - \ln \phi(c)$$

Πχ.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/3} \tan t dt &= \int_0^{\pi/3} \frac{\sin t}{\cos t} dt = - \int_0^{\pi/3} \frac{(\cos t)'}{\cos t} dt \\ &\stackrel{\cos t=x}{=} - \int_1^{1/2} \frac{dx}{x} = \int_{1/2}^1 \frac{dx}{x} = [\ln x]_{1/2}^1 = -\ln \frac{1}{2} = \ln 2 \end{aligned}$$

Ο τύπος (38), χρησιμοποιείται και από δεξιά προς τα αριστερά:

Θεώρημα 34. (Ολοκλήρωση με αλλαγή μεταβλητής II) Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και έστω $\phi : I \rightarrow [a, b]$ γνησίως αύξουσα, με $[a, b] \subseteq \phi(I)$ παραγωγίσιμη με ϕ' ολοκληρώσιμη. Τότε

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\phi^{-1}(c)}^{\phi^{-1}(d)} f(\phi(t)) \cdot \phi'(t) dt \quad (41)$$

Απόδειξη. Όμοια με την απόδειξη του Θεωρήματος 31. □

Στην πράξη όταν εφαρμόζουμε το Θεώρημα 34, συνήθως λέμε:

$$\text{θέτουμε } x = \phi(t) \text{ και } dx = \phi'(t) dt$$

Το δύσκολο εδώ είναι να βρούμε την κατάλληλη συνάρτηση $\phi : I \rightarrow [a, b]$.

Παράδειγμα 35.

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \arctan t \, dt &= \int_1^e (t)' \arctan t \, dt = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 t(\arctan t)' \, dt \\
 &= [t \arctan t]_0^1 - \int_0^1 t \cdot \frac{1}{t^2 + 1} \, dt \\
 &\stackrel{(x=t^2+1, \, dx=2t \, dt)}{=} \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{x} \, dx \\
 &= \frac{\pi}{4} - [\ln x]_1^2 \\
 &= \frac{\pi}{4} - \ln 2
 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 36. Δείξτε ότι

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{\pi}{2}$$

(Το ολοκλήρωμα αυτό εκφράζει γεωμετρικά το εμβαδό του άνω ημικυκλίου (ημι-δίσκου) με ακτίνα $R = 1$).

Απόδειξη. Θέτουμε $x = \sin t$, $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Τότε

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} (\sin t)' \, dt \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt = \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

από το Παράδειγμα 30. □