

Αρμονική Ανάλυση

Μάθημα 18

Απρίλιος 2024

L^2 -σύγκλιση σειρών Fourier

Σκοπός μας σε αυτή την ενότητα είναι να αποδείξουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα

Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Τότε,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t) - s_n(f, t)|^2 dt = 0.$$

Δύο χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Ο χώρος $\ell^2(\mathbb{Z})$

Ο χώρος $\ell^2(\mathbb{Z})$ πάνω από το $\mathbb{C}$ είναι ο χώρος των (δίπλευρων) άπειρων ακολουθιών μιγαδικών αριθμών $a = (\dots, a_{-k}, \dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots, a_k, \dots)$ για τις οποίες

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 < \infty.$$

Δύο χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Ο χώρος $\ell^2(\mathbb{Z})$

Ο χώρος $\ell^2(\mathbb{Z})$ πάνω από το $\mathbb{C}$ είναι ο χώρος των (δίπλευρων) άπειρων ακολουθιών μιγαδικών αριθμών $a = (\dots, a_{-k}, \dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots, a_k, \dots)$ για τις οποίες

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 < \infty.$$

- Οι πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού ορίζονται κατά συντεταγμένη, ακριβώς όπως στην περίπτωση του $\mathbb{C}^d$. Πρέπει βέβαια να δείξουμε ότι αν $a, b \in \ell^2(\mathbb{Z})$ τότε $a + b \in \ell^2(\mathbb{Z})$.

Δύο χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Ο χώρος $\ell^2(\mathbb{Z})$

Ο χώρος $\ell^2(\mathbb{Z})$ πάνω από το $\mathbb{C}$ είναι ο χώρος των (δίπλευρων) άπειρων ακολουθιών μιγαδικών αριθμών $a = (\dots, a_{-k}, \dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots, a_k, \dots)$ για τις οποίες

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 < \infty.$$

- Οι πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού ορίζονται κατά συντεταγμένη, ακριβώς όπως στην περίπτωση του $\mathbb{C}^d$. Πρέπει βέβαια να δείξουμε ότι αν $a, b \in \ell^2(\mathbb{Z})$ τότε $a + b \in \ell^2(\mathbb{Z})$.
- Στον $\ell_2(\mathbb{Z})$ ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle a, b \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \overline{b_k}.$$

Δύο χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Ο χώρος $\ell^2(\mathbb{Z})$

Ο χώρος $\ell^2(\mathbb{Z})$ πάνω από το $\mathbb{C}$ είναι ο χώρος των (δίπλευρων) άπειρων ακολουθιών μιγαδικών αριθμών $a = (\dots, a_{-k}, \dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots, a_k, \dots)$ για τις οποίες

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 < \infty.$$

- Οι πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού ορίζονται κατά συντεταγμένη, ακριβώς όπως στην περίπτωση του $\mathbb{C}^d$. Πρέπει βέβαια να δείξουμε ότι αν $a, b \in \ell^2(\mathbb{Z})$ τότε $a + b \in \ell^2(\mathbb{Z})$.
- Στον $\ell_2(\mathbb{Z})$ ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle a, b \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \overline{b_k}.$$

- Η επαγόμενη νόρμα είναι η

$$\|a\| = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 \right)^{1/2},$$

Δύο χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Ο χώρος $\ell^2(\mathbb{Z})$

Ο χώρος $\ell^2(\mathbb{Z})$ πάνω από το $\mathbb{C}$ είναι ο χώρος των (δίπλευρων) άπειρων ακολουθιών μιγαδικών αριθμών $a = (\dots, a_{-k}, \dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots, a_k, \dots)$ για τις οποίες

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 < \infty.$$

- Οι πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού ορίζονται κατά συντεταγμένη, ακριβώς όπως στην περίπτωση του $\mathbb{C}^d$. Πρέπει βέβαια να δείξουμε ότι αν $a, b \in \ell^2(\mathbb{Z})$ τότε $a + b \in \ell^2(\mathbb{Z})$.
- Στον $\ell_2(\mathbb{Z})$ ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle a, b \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \overline{b_k}.$$

- Η επαγόμενη νόρμα είναι η

$$\|a\| = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 \right)^{1/2},$$

- Επίσης, ο $\ell^2(\mathbb{Z})$ είναι πλήρης ως προς την $\|\cdot\|$. Δηλαδή, είναι χώρος Hilbert.

Δύο χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Ο χώρος $\mathcal{R}(\mathbb{T})$

Ο χώρος $\mathcal{R}(\mathbb{T})$ των 2π -περιοδικών Riemann ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. είναι γραμμικός χώρος, με την πρόσθεση και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό κατά σημείο.

Δύο χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Ο χώρος $\mathcal{R}(\mathbb{T})$

Ο χώρος $\mathcal{R}(\mathbb{T})$ των 2π -περιοδικών Riemann ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. είναι γραμμικός χώρος, με την πρόσθεση και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό κατά σημείο.

- Ορίζουμε εσωτερικό γινόμενο στον $\mathcal{R}(\mathbb{T})$ ως εξής: αν $f, g \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$, θέτουμε

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Δύο χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Ο χώρος $\mathcal{R}(\mathbb{T})$

Ο χώρος $\mathcal{R}(\mathbb{T})$ των 2π -περιοδικών Riemann ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. είναι γραμμικός χώρος, με την πρόσθεση και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό κατά σημείο.

- Ορίζουμε εσωτερικό γινόμενο στον $\mathcal{R}(\mathbb{T})$ ως εξής: αν $f, g \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$, θέτουμε

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt.$$

- Η επαγόμενη νόρμα είναι η

$$\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Δύο χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Ο χώρος $\mathcal{R}(\mathbb{T})$

Ο χώρος $\mathcal{R}(\mathbb{T})$ των 2π -περιοδικών Riemann ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. είναι γραμμικός χώρος, με την πρόσθεση και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό κατά σημείο.

- Ορίζουμε εσωτερικό γινόμενο στον $\mathcal{R}(\mathbb{T})$ ως εξής: αν $f, g \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$, θέτουμε

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt.$$

- Η επαγόμενη νόρμα είναι η

$$\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

- Το εσωτερικό γινόμενο του $\mathcal{R}(\mathbb{T})$ δεν είναι γνήσια θετικό: αν η f μηδενίζεται στο $[0, 2\pi]$ με την εξαίρεση πεπερασμένων το πλήθος σημείων, τότε $f \neq 0$, η f είναι ολοκληρώσιμη και $\|f\|_2 = 0$.

Δύο χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Ο χώρος $\mathcal{R}(\mathbb{T})$

Ο χώρος $\mathcal{R}(\mathbb{T})$ των 2π -περιοδικών Riemann ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. είναι γραμμικός χώρος, με την πρόσθεση και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό κατά σημείο.

- Ορίζουμε εσωτερικό γινόμενο στον $\mathcal{R}(\mathbb{T})$ ως εξής: αν $f, g \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$, θέτουμε

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt.$$

- Η επαγόμενη νόρμα είναι η

$$\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

- Το εσωτερικό γινόμενο του $\mathcal{R}(\mathbb{T})$ δεν είναι γνήσια θετικό: αν η f μηδενίζεται στο $[0, 2\pi]$ με την εξαίρεση πεπερασμένων το πλήθος σημείων, τότε $f \neq 0$, η f είναι ολοκληρώσιμη και $\|f\|_2 = 0$.
- Ο $\mathcal{R}(\mathbb{T})$ δεν είναι πλήρης.

L^2 -σύγκλιση σειρών Fourier

Θέλουμε να δείξουμε το εξής.

Θεώρημα

Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Τότε,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t) - s_n(f, t)|^2 dt = 0.$$

Με τους ορισμούς που δώσαμε, ισοδύναμα θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - s_n(f)\|_2 = 0.$$

L^2 -σύγκλιση σειρών Fourier

Θέλουμε να δείξουμε το εξής.

Θεώρημα

Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Τότε,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t) - s_n(f, t)|^2 dt = 0.$$

Με τους ορισμούς που δώσαμε, ισοδύναμα θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - s_n(f)\|_2 = 0.$$

Οι συναρτήσεις e_k

Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ θέτουμε $e_k(t) = e^{ikt}$ και παρατηρούμε ότι η οικογένεια $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ είναι ορθοκανονική. Δηλαδή,

$$\langle e_k, e_m \rangle = \begin{cases} 1 & \text{αν } k = m \\ 0 & \text{αν } k \neq m \end{cases}.$$

L^2 -σύγκλιση σειρών Fourier

- Αν $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ θέτουμε $a_k = \hat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

L^2 -σύγκλιση σειρών Fourier

- Αν $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ θέτουμε $a_k = \widehat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.
- Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές Fourier της f είναι τα εσωτερικά γινόμενα της f με τα στοιχεία της ορθοκανονικής οικογένειας $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$:

$$\langle f, e_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt = a_k.$$

L^2 -σύγκλιση σειρών Fourier

- Αν $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ θέτουμε $a_k = \widehat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.
- Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές Fourier της f είναι τα εσωτερικά γινόμενα της f με τα στοιχεία της ορθοκανονικής οικογένειας $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$:

$$\langle f, e_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt = a_k.$$

- Ειδικότερα,

$$s_n(f) = \sum_{k=-n}^n a_k e_k.$$

L^2 -σύγκλιση σειρών Fourier

- Αν $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ θέτουμε $a_k = \widehat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.
- Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές Fourier της f είναι τα εσωτερικά γινόμενα της f με τα στοιχεία της ορθοκανονικής οικογένειας $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$:

$$\langle f, e_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt = a_k.$$

- Ειδικότερα,

$$s_n(f) = \sum_{k=-n}^n a_k e_k.$$

- Από το γεγονός ότι η $\{e_k\}$ είναι ορθοκανονική οικογένεια και από το γεγονός ότι $a_k = \langle f, e_k \rangle$ έπεται τώρα ότι η διαφορά $f - s_n(f) = f - \sum_{k=-n}^n a_k e_k$ είναι κάθετη στο e_k για κάθε $|k| \leq n$.

L^2 -σύγκλιση σειρών Fourier

- Αν $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ θέτουμε $a_k = \widehat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.
- Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές Fourier της f είναι τα εσωτερικά γινόμενα της f με τα στοιχεία της ορθοκανονικής οικογένειας $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$:

$$\langle f, e_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt = a_k.$$

- Ειδικότερα,

$$s_n(f) = \sum_{k=-n}^n a_k e_k.$$

- Από το γεγονός ότι η $\{e_k\}$ είναι ορθοκανονική οικογένεια και από το γεγονός ότι $a_k = \langle f, e_k \rangle$ έπεται τώρα ότι η διαφορά $f - s_n(f) = f - \sum_{k=-n}^n a_k e_k$ είναι κάθετη στο e_k για κάθε $|k| \leq n$.
- Συνεπώς, $f - s_n(f) \perp \sum_{k=-n}^n b_k e_k$ για κάθε επιλογή μιγαδικών αριθμών b_k .

L^2 -σύγκλιση σειρών Fourier

- Επιλέγοντας $b_k = a_k$ και εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα για τη διάσπαση

$$f = (f - s_n(f)) + s_n(f) = \left(f - \sum_{k=-n}^n a_k e_k \right) + \sum_{k=-n}^n a_k e_k,$$

παίρνουμε

$$\|f\|_2^2 = \|f - s_n(f)\|_2^2 + \left\| \sum_{k=-n}^n a_k e_k \right\|_2^2.$$

L^2 -σύγκλιση σειρών Fourier

- Επιλέγοντας $b_k = a_k$ και εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα για τη διάσπαση

$$f = (f - s_n(f)) + s_n(f) = \left(f - \sum_{k=-n}^n a_k e_k \right) + \sum_{k=-n}^n a_k e_k,$$

παίρνουμε

$$\|f\|_2^2 = \|f - s_n(f)\|_2^2 + \left\| \sum_{k=-n}^n a_k e_k \right\|_2^2.$$

- Όμως, η οικογένεια $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ είναι ορθοκανονική, άρα

$$\left\| \sum_{k=-n}^n a_k e_k \right\|_2^2 = \sum_{k=-n}^n |a_k|^2.$$

L^2 -σύγκλιση σειρών Fourier

- Επιλέγοντας $b_k = a_k$ και εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα για τη διάσπαση

$$f = (f - s_n(f)) + s_n(f) = \left(f - \sum_{k=-n}^n a_k e_k \right) + \sum_{k=-n}^n a_k e_k,$$

παίρνουμε

$$\|f\|_2^2 = \|f - s_n(f)\|_2^2 + \left\| \sum_{k=-n}^n a_k e_k \right\|_2^2.$$

- Όμως, η οικογένεια $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ είναι ορθοκανονική, άρα

$$\left\| \sum_{k=-n}^n a_k e_k \right\|_2^2 = \sum_{k=-n}^n |a_k|^2.$$

- Έπεται ότι

$$\|f\|_2^2 = \|f - s_n(f)\|_2^2 + \sum_{k=-n}^n |a_k|^2.$$

- Από την ισότητα

$$\|f\|_2^2 = \|f - s_n(f)\|_2^2 + \sum_{k=-n}^n |a_k|^2$$

έχουμε προφανώς

$$\sum_{k=-n}^n |a_k|^2 \leq \|f\|_2^2,$$

και αυτό ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Ανισότητα Bessel

- Από την ισότητα

$$\|f\|_2^2 = \|f - s_n(f)\|_2^2 + \sum_{k=-n}^n |a_k|^2$$

έχουμε προφανώς

$$\sum_{k=-n}^n |a_k|^2 \leq \|f\|_2^2,$$

και αυτό ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

- Αφήνοντας το $n \rightarrow \infty$ παίρνουμε την ανισότητα Bessel:

Ανισότητα Bessel

- Από την ισότητα

$$\|f\|_2^2 = \|f - s_n(f)\|_2^2 + \sum_{k=-n}^n |a_k|^2$$

έχουμε προφανώς

$$\sum_{k=-n}^n |a_k|^2 \leq \|f\|_2^2,$$

και αυτό ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

- Αφήνοντας το $n \rightarrow \infty$ παίρνουμε την ανισότητα Bessel:

Ανισότητα Bessel

Για κάθε $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ ισχύει ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 \leq \|f\|_2^2.$$

Λήμμα βέλτιστης προσέγγισης

Λήμμα βέλτιστης προσέγγισης

Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ με συντελεστές Fourier a_k . Για κάθε επιλογή μιγαδικών συντελεστών c_k , $|k| \leq n$, έχουμε

$$\|f - s_n(f)\|_2 \leq \left\| f - \sum_{k=-n}^n c_k e_k \right\|_2.$$

Επιπλέον, ισότητα ισχύει ακριβώς όταν $c_k = a_k$ για κάθε $|k| \leq n$.

Λήμμα βέλτιστης προσέγγισης

Λήμμα βέλτιστης προσέγγισης

Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ με συντελεστές Fourier a_k . Για κάθε επιλογή μιγαδικών συντελεστών c_k , $|k| \leq n$, έχουμε

$$\|f - s_n(f)\|_2 \leq \left\| f - \sum_{k=-n}^n c_k e_k \right\|_2.$$

Επιπλέον, ισότητα ισχύει ακριβώς όταν $c_k = a_k$ για κάθε $|k| \leq n$.

- Γράφουμε

$$f - \sum_{k=-n}^n c_k e_k = (f - s_n(f)) + \sum_{k=-n}^n b_k e_k,$$

όπου $b_k = a_k - c_k$, και εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

Λήμμα βέλτιστης προσέγγισης

Λήμμα βέλτιστης προσέγγισης

Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ με συντελεστές Fourier a_k . Για κάθε επιλογή μιγαδικών συντελεστών c_k , $|k| \leq n$, έχουμε

$$\|f - s_n(f)\|_2 \leq \left\| f - \sum_{k=-n}^n c_k e_k \right\|_2.$$

Επιπλέον, ισότητα ισχύει ακριβώς όταν $c_k = a_k$ για κάθε $|k| \leq n$.

- Γράφουμε

$$f - \sum_{k=-n}^n c_k e_k = (f - s_n(f)) + \sum_{k=-n}^n b_k e_k,$$

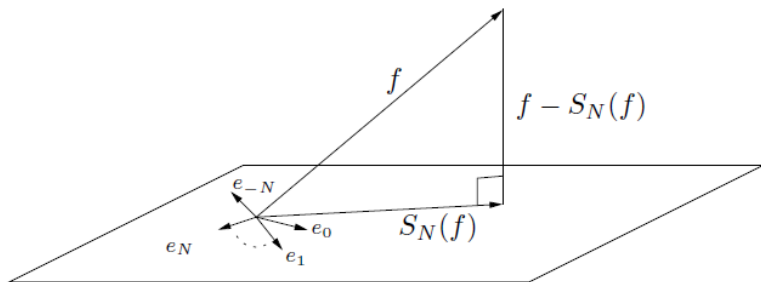
όπου $b_k = a_k - c_k$, και εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

- Ισχύει ότι

$$\left\| f - \sum_{k=-n}^n c_k e_k \right\|_2^2 = \|f - s_n(f)\|_2^2 + \sum_{k=-n}^n |a_k - c_k|^2 \geq \|f - s_n(f)\|_2^2,$$

με ισότητα ακριβώς όταν $\sum_{k=-n}^n |a_k - c_k|^2 = 0$, δηλαδή $c_k = a_k$ για κάθε $|k| \leq n$.

Λήμμα βέλτιστης προσέγγισης



Σχήμα: Το λήμμα της βέλτιστης προσέγγισης

- Η γεωμετρική ερμηνεία του λήμματος βέλτιστης προσέγγισης είναι η εξής: αν θεωρήσουμε τον υπόχωρο $\mathcal{T}_n$ των τριγωνομετρικών πολυωνύμων που έχουν βαθμό το πολύ ίσο με n , τότε για κάθε $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$, το πλησιέστερο σημείο του $\mathcal{T}_n$ προς την f είναι το $s_n(f)$. Είναι η «ορθογώνια προβολή» της f στον υπόχωρο $\mathcal{T}_n$.

L^2 -σύγκλιση σειρών Fourier

- Συνεχίζουμε την απόδειξη της $\|f - s_n(f)\|_2 \rightarrow 0$. Θα χρησιμοποιήσουμε το λήμμα βέλτιστης προσέγγισης και το γεγονός ότι τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι «πυκνά» στον χώρο $\mathcal{C}(\mathbb{T})$.

- Συνεχίζουμε την απόδειξη της $\|f - s_n(f)\|_2 \rightarrow 0$. Θα χρησιμοποιήσουμε το λήμμα βέλτιστης προσέγγισης και το γεγονός ότι τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι «πυκνά» στον χώρο $\mathcal{C}(\mathbb{T})$.
- Υποθέτουμε αρχικά, επιπλέον, ότι η f είναι συνεχής. Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ και τριγωνομετρικό πολυώνυμο p βαθμού n_0 ώστε

$$\|f - p\|_\infty = \max_{t \in \mathbb{R}} |f(t) - p(t)| \leq \varepsilon.$$

- Συνεχίζουμε την απόδειξη της $\|f - s_n(f)\|_2 \rightarrow 0$. Θα χρησιμοποιήσουμε το λήμμα βέλτιστης προσέγγισης και το γεγονός ότι τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι «πυκνά» στον χώρο $\mathcal{C}(\mathbb{T})$.
- Υποθέτουμε αρχικά, επιπλέον, ότι η f είναι συνεχής. Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ και τριγωνομετρικό πολυώνυμο p βαθμού n_0 ώστε

$$\|f - p\|_\infty = \max_{t \in \mathbb{R}} |f(t) - p(t)| \leq \varepsilon.$$

- Ειδικότερα,

$$\|f - p\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - p(t)|^2 dt \right)^{1/2} \leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|f - p\|_\infty^2 dt \right)^{1/2} \leq \varepsilon.$$

- Συνεχίζουμε την απόδειξη της $\|f - s_n(f)\|_2 \rightarrow 0$. Θα χρησιμοποιήσουμε το λήμμα βέλτιστης προσέγγισης και το γεγονός ότι τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι «πυκνά» στον χώρο $\mathcal{C}(\mathbb{T})$.
- Υποθέτουμε αρχικά, επιπλέον, ότι η f είναι συνεχής. Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ και τριγωνομετρικό πολυώνυμο p βαθμού n_0 ώστε

$$\|f - p\|_\infty = \max_{t \in \mathbb{R}} |f(t) - p(t)| \leq \varepsilon.$$

- Ειδικότερα,

$$\|f - p\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - p(t)|^2 dt \right)^{1/2} \leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|f - p\|_\infty^2 dt \right)^{1/2} \leq \varepsilon.$$

- Από το λήμμα βέλτιστης προσέγγισης,

$$\|f - s_{n_0}(f)\|_2 \leq \|f - p\|_2 \leq \varepsilon.$$

L^2 -σύγκλιση σειρών Fourier

- Βρήκαμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\|f - s_{n_0}(f)\|_2 \leq \varepsilon.$$

- Βρήκαμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\|f - s_{n_0}(f)\|_2 \leq \varepsilon.$$

- Τώρα, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $s_{n_0}(f) \in \mathcal{T}_n$. Συνεπώς, πάλι από το λήμμα βέλτιστης προσέγγισης (στον $\mathcal{T}_n$ αυτή τη φορά),

$$\|f - s_n(f)\|_2 \leq \|f - s_{n_0}(f)\|_2 \leq \varepsilon.$$

- Βρήκαμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\|f - s_{n_0}(f)\|_2 \leq \varepsilon.$$

- Τώρα, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $s_{n_0}(f) \in \mathcal{T}_n$. Συνεπώς, πάλι από το λήμμα βέλτιστης προσέγγισης (στον $\mathcal{T}_n$ αυτή τη φορά),

$$\|f - s_n(f)\|_2 \leq \|f - s_{n_0}(f)\|_2 \leq \varepsilon.$$

- Αυτό αποδεικνύει ότι $\|f - s_n(f)\|_2 \rightarrow 0$ στην περίπτωση που η f είναι συνεχής.

L^2 -σύγκλιση σειρών Fourier

- Στη γενική περίπτωση, όπου η f είναι απλώς ολοκληρώσιμη, βρίσκουμε πρώτα συνεχή συνάρτηση g ώστε $\|g\|_\infty \leq \sqrt{2}\|f\|_\infty$ και

$$\int_0^{2\pi} |f(t) - g(t)| dt \leq \frac{\pi\varepsilon^2}{6(\|f\|_\infty + 1)}.$$

L^2 -σύγκλιση σειρών Fourier

- Στη γενική περίπτωση, όπου η f είναι απλώς ολοκληρώσιμη, βρίσκουμε πρώτα συνεχή συνάρτηση g ώστε $\|g\|_\infty \leq \sqrt{2}\|f\|_\infty$ και

$$\int_0^{2\pi} |f(t) - g(t)| dt \leq \frac{\pi\varepsilon^2}{6(\|f\|_\infty + 1)}.$$

- Τότε,

$$\begin{aligned}\|f - g\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t) - g(t)|^2 dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t) - g(t)| (|f(t)| + |g(t)|) dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t) - g(t)| (\|f\|_\infty + \|g\|_\infty) dt \\ &\leq \frac{3\|f\|_\infty}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t) - g(t)| dt \leq \frac{\varepsilon^2}{4},\end{aligned}$$

δηλαδή, $\|f - g\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

L^2 -σύγκλιση σειρών Fourier

- Στη γενική περίπτωση, όπου η f είναι απλώς ολοκληρώσιμη, βρίσκουμε πρώτα συνεχή συνάρτηση g ώστε $\|g\|_\infty \leq \sqrt{2}\|f\|_\infty$ και

$$\int_0^{2\pi} |f(t) - g(t)| dt \leq \frac{\pi\varepsilon^2}{6(\|f\|_\infty + 1)}.$$

- Τότε,

$$\begin{aligned}\|f - g\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t) - g(t)|^2 dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t) - g(t)| (|f(t)| + |g(t)|) dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t) - g(t)| (\|f\|_\infty + \|g\|_\infty) dt \\ &\leq \frac{3\|f\|_\infty}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t) - g(t)| dt \leq \frac{\varepsilon^2}{4},\end{aligned}$$

δηλαδή, $\|f - g\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

- Για τη συνεχή g βρίσκουμε τριγωνομετρικό πολυώνυμο p ώστε $\|g - p\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
Τότε,

$$\|f - p\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - p\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

L^2 -σύγκλιση σειρών Fourier

- Στη γενική περίπτωση, όπου η f είναι απλώς ολοκληρώσιμη, βρίσκουμε πρώτα συνεχή συνάρτηση g ώστε $\|g\|_\infty \leq \sqrt{2}\|f\|_\infty$ και

$$\int_0^{2\pi} |f(t) - g(t)| dt \leq \frac{\pi\varepsilon^2}{6(\|f\|_\infty + 1)}.$$

- Τότε,

$$\begin{aligned}\|f - g\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t) - g(t)|^2 dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t) - g(t)| (|f(t)| + |g(t)|) dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t) - g(t)| (\|f\|_\infty + \|g\|_\infty) dt \\ &\leq \frac{3\|f\|_\infty}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t) - g(t)| dt \leq \frac{\varepsilon^2}{4},\end{aligned}$$

δηλαδή, $\|f - g\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

- Για τη συνεχή g βρίσκουμε τριγωνομετρικό πολυώνυμο p ώστε $\|g - p\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Τότε,

$$\|f - p\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - p\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

- Κατόπιν, συνεχίζουμε όπως πριν: χρησιμοποιώντας το λήμμα βέλτιστης προσέγγισης δείχνουμε ότι $\|f - s_n(f)\|_2 \rightarrow 0$.

Ταυτότητα Parseval

Μια άμεση συνέπεια της απόδειξης του θεωρήματος είναι η *ταυτότητα Parseval*:

Ταυτότητα Parseval

Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Τότε,

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2.$$

Ταυτότητα Parseval

Μια άμεση συνέπεια της απόδειξης του θεωρήματος είναι η ταυτότητα Parseval:

Ταυτότητα Parseval

Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Τότε,

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2.$$

- Πράγματι, έχουμε δει ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=-n}^n |\hat{f}(k)|^2 + \|f - s_n(f)\|_2^2.$$

Ταυτότητα Parseval

Μια άμεση συνέπεια της απόδειξης του θεωρήματος είναι η ταυτότητα Parseval:

Ταυτότητα Parseval

Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Τότε,

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2.$$

- Πράγματι, έχουμε δει ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=-n}^n |\hat{f}(k)|^2 + \|f - s_n(f)\|_2^2.$$

- Αφού $\|f - s_n(f)\|_2 \rightarrow 0$, έπεται το ζητούμενο.

$\mathcal{R}(\mathbb{T})$ και $\ell_2(\mathbb{Z})$

- Μπορούμε να ορίσουμε μια απεικόνιση $T : \mathcal{R}(\mathbb{T}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ θέτοντας

$$T(f) = \{\hat{f}(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}.$$

$\mathcal{R}(\mathbb{T})$ και $\ell_2(\mathbb{Z})$

- Μπορούμε να ορίσουμε μια απεικόνιση $T : \mathcal{R}(\mathbb{T}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ θέτοντας

$$T(f) = \{\widehat{f}(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}.$$

- Παρατηρήστε ότι η T είναι γραμμική: αν $f, g \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ και $a, b \in \mathbb{C}$, τότε

$$T(af + bg) = aT(f) + bT(g).$$

$\mathcal{R}(\mathbb{T})$ και $\ell_2(\mathbb{Z})$

- Μπορούμε να ορίσουμε μια απεικόνιση $T : \mathcal{R}(\mathbb{T}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ θέτοντας

$$T(f) = \{\widehat{f}(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}.$$

- Παρατηρήστε ότι η T είναι γραμμική: αν $f, g \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ και $a, b \in \mathbb{C}$, τότε

$$T(af + bg) = aT(f) + bT(g).$$

- Επιπλέον, η ταυτότητα του Parseval δείχνει ότι η T είναι ισομετρία: για κάθε $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$,

$$\|T(f)\| = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 \right)^{1/2} = \|f\|_2.$$

$\mathcal{R}(\mathbb{T})$ και $\ell_2(\mathbb{Z})$

- Μπορούμε να ορίσουμε μια απεικόνιση $T : \mathcal{R}(\mathbb{T}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ θέτοντας

$$T(f) = \{\widehat{f}(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}.$$

- Παρατηρήστε ότι η T είναι γραμμική: αν $f, g \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ και $a, b \in \mathbb{C}$, τότε

$$T(af + bg) = aT(f) + bT(g).$$

- Επιπλέον, η ταυτότητα του Parseval δείχνει ότι η T είναι ισομετρία: για κάθε $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$,

$$\|T(f)\| = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 \right)^{1/2} = \|f\|_2.$$

- Όπως έχουμε αναφέρει, ο $\mathcal{R}(\mathbb{T})$ δεν είναι πλήρης ως προς την $\|\cdot\|_2$, ενώ ο $\ell^2(\mathbb{Z})$ είναι πλήρης ως προς την $\|\cdot\|$. Αυτό έχει ως συνέπεια το ότι η T δεν είναι επί. Αν ήταν, τότε ο $\mathcal{R}(\mathbb{T})$ θα ήταν ισομετρικά ισόμορφος με τον $\ell^2(\mathbb{Z})$, άρα θα ήταν πλήρης.

$\mathcal{R}(\mathbb{T})$ και $\ell_2(\mathbb{Z})$

- Μπορούμε να ορίσουμε μια απεικόνιση $T : \mathcal{R}(\mathbb{T}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ θέτοντας

$$T(f) = \{\widehat{f}(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}.$$

- Παρατηρήστε ότι η T είναι γραμμική: αν $f, g \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ και $a, b \in \mathbb{C}$, τότε

$$T(af + bg) = aT(f) + bT(g).$$

- Επιπλέον, η ταυτότητα του Parseval δείχνει ότι η T είναι ισομετρία: για κάθε $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$,

$$\|T(f)\| = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 \right)^{1/2} = \|f\|_2.$$

- Όπως έχουμε αναφέρει, ο $\mathcal{R}(\mathbb{T})$ δεν είναι πλήρης ως προς την $\|\cdot\|_2$, ενώ ο $\ell^2(\mathbb{Z})$ είναι πλήρης ως προς την $\|\cdot\|$. Αυτό έχει ως συνέπεια το ότι η T δεν είναι επί. Αν ήταν, τότε ο $\mathcal{R}(\mathbb{T})$ θα ήταν ισομετρικά ισόμορφος με τον $\ell^2(\mathbb{Z})$, άρα θα ήταν πλήρης.
- Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι: υπάρχουν ακολουθίες $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ με την ιδιότητα $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 < +\infty$, για τις οποίες δεν υπάρχει $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ ώστε $\widehat{f}(k) = a_k$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Λήμμα Riemann-Lebesgue

Άλλη άμεση συνέπεια της ταυτότητας του Parseval είναι το λήμμα Riemann–Lebesgue.

Λήμμα Riemann–Lebesgue

Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Τότε, $\hat{f}(k) \rightarrow 0$ όταν $|k| \rightarrow \infty$.

Λήμμα Riemann-Lebesgue

Άλλη άμεση συνέπεια της ταυτότητας του Parseval είναι το λήμμα Riemann–Lebesgue.

Λήμμα Riemann–Lebesgue

Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Τότε, $\widehat{f}(k) \rightarrow 0$ όταν $|k| \rightarrow \infty$.

- Συχνά, χρησιμοποιούμε το λήμμα Riemann–Lebesgue στην εξής μορφή: αν $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ τότε

$$a_k(f) = \int_0^{2\pi} f(t) \sin(kt) dt \rightarrow 0 \quad \text{και} \quad b_k(f) = \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt) dt \rightarrow 0$$

όταν $k \rightarrow \infty$.

Λήμμα Riemann-Lebesgue

Άλλη άμεση συνέπεια της ταυτότητας του Parseval είναι το λήμμα Riemann–Lebesgue.

Λήμμα Riemann–Lebesgue

Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Τότε, $\widehat{f}(k) \rightarrow 0$ όταν $|k| \rightarrow \infty$.

- Συχνά, χρησιμοποιούμε το λήμμα Riemann–Lebesgue στην εξής μορφή: αν $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ τότε

$$a_k(f) = \int_0^{2\pi} f(t) \sin(kt) dt \rightarrow 0 \quad \text{και} \quad b_k(f) = \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt) dt \rightarrow 0$$

όταν $k \rightarrow \infty$.

- Από τις σχέσεις που συνδέουν τους $\widehat{f}(k)$, $a_k(f)$ και $b_k(f)$, ελέγχουμε εύκολα ότι η πρόταση « $a_k(f) \rightarrow 0$ και $b_k(f) \rightarrow 0$ όταν $k \rightarrow \infty$ » είναι ακριβώς ισοδύναμη με την « $\widehat{f}(k) \rightarrow 0$ όταν $|k| \rightarrow \infty$ ».

Γενίκευση της ταυτότητας Parseval

Η επόμενη πρόταση γενικεύει την ταυτότητα του Parseval.

Πρόταση

$$\text{Έστω } f, g \in \mathcal{R}(\mathbb{T}). \text{ Τότε, } \langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) \overline{\hat{g}(k)}.$$

Γενίκευση της ταυτότητας Parseval

Η επόμενη πρόταση γενικεύει την ταυτότητα του Parseval.

Πρόταση

Έστω $f, g \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Τότε, $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) \overline{\widehat{g}(k)}$.

- Αν V είναι ένας γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{C}$ με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$, τότε

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} [\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2].$$

Η ταυτότητα αυτή ελέγχεται άμεσα, με πράξεις.

Γενίκευση της ταυτότητας Parseval

Η επόμενη πρόταση γενικεύει την ταυτότητα του Parseval.

Πρόταση

Έστω $f, g \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Τότε, $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) \overline{\widehat{g}(k)}$.

- Αν V είναι ένας γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{C}$ με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$, τότε

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} [\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2].$$

Η ταυτότητα αυτή ελέγχεται άμεσα, με πράξεις.

- Παρατηρήστε τώρα ότι

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{4} [\|f + g\|_2^2 - \|f - g\|_2^2 + i\|f + ig\|_2^2 - i\|f - ig\|_2^2]$$

$$\text{και } \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) \overline{\widehat{g}(k)} =$$

$$\frac{1}{4} [\|\widehat{f}(k) + \widehat{g}(k)\|^2 - \|\widehat{f}(k) - \widehat{g}(k)\|^2 + i\|\widehat{f}(k) + i\widehat{g}(k)\|^2 - i\|\widehat{f}(k) - i\widehat{g}(k)\|^2].$$

Γενίκευση της ταυτότητας Parseval

Η επόμενη πρόταση γενικεύει την ταυτότητα του Parseval.

Πρόταση

Έστω $f, g \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Τότε, $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) \overline{\widehat{g}(k)}$.

- Αν V είναι ένας γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{C}$ με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$, τότε

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} [\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2].$$

Η ταυτότητα αυτή ελέγχεται άμεσα, με πράξεις.

- Παρατηρήστε τώρα ότι

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{4} [\|f + g\|_2^2 - \|f - g\|_2^2 + i\|f + ig\|_2^2 - i\|f - ig\|_2^2]$$

$$\text{και } \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) \overline{\widehat{g}(k)} =$$

$$\frac{1}{4} [\|\widehat{f}(k) + \widehat{g}(k)\|^2 - \|\widehat{f}(k) - \widehat{g}(k)\|^2 + i\|\widehat{f}(k) + i\widehat{g}(k)\|^2 - i\|\widehat{f}(k) - i\widehat{g}(k)\|^2].$$

- Το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα, αν εφαρμόσουμε την ταυτότητα του Parseval για τις $f + g$, $f - g$, $f + ig$ και $f - ig$.

Παράδειγμα

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής 2π -περιοδική συνάρτηση και έστω a_k, b_k οι συντελεστές Fourier της f . Τότε,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - x) f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}.$$

Παράδειγμα

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής 2π -περιοδική συνάρτηση και έστω a_k, b_k οι συντελεστές Fourier της f . Τότε,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - x) f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}.$$

- Απόδειξη: Θεωρούμε την $g : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = \pi - x$ και την επεκτείνουμε 2π -περιοδικά.

Παράδειγμα

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής 2π -περιοδική συνάρτηση και έστω a_k, b_k οι συντελεστές Fourier της f . Τότε,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - x) f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}.$$

- Απόδειξη: Θεωρούμε την $g : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = \pi - x$ και την επεκτείνουμε 2π -περιοδικά.
- Έχουμε $\widehat{g}(0) = 0$ και $\widehat{g}(k) = \frac{(-i)}{k}$ για κάθε $k \neq 0$.

Παράδειγμα

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής 2π -περιοδική συνάρτηση και έστω a_k, b_k οι συντελεστές Fourier της f . Τότε,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - x) f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}.$$

- Απόδειξη: Θεωρούμε την $g : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = \pi - x$ και την επεκτείνουμε 2π -περιοδικά.
- Έχουμε $\widehat{g}(0) = 0$ και $\widehat{g}(k) = \frac{(-i)}{k}$ για κάθε $k \neq 0$.
- Επίσης $f, g \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$, άρα

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - x) f(x) dx &= \langle g, f \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) \overline{\widehat{g}(k)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i}{k} (\widehat{f}(k) - \widehat{f}(-k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i}{k} (-i) b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}. \end{aligned}$$

Άσκηση

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη 2π -περιοδική συνάρτηση.

❶ Αποδείξτε ότι

$$\|f - s_n(f)\|_{\infty} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|a_k(f')| + |b_k(f')|}{k}.$$

❷ Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \|f - s_n(f)\|_{\infty} = 0.$$

Άσκηση

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη 2π -περιοδική συνάρτηση.

- ❶ Αποδείξτε ότι

$$\|f - s_n(f)\|_\infty \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|a_k(f')| + |b_k(f')|}{k}.$$

- ❷ Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \|f - s_n(f)\|_\infty = 0.$$

- Αφού η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη, γνωρίζουμε ότι $f \equiv S(f)$. Συνεπώς,

$$f(x) - s_n(f, x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Άσκηση

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη 2π -περιοδική συνάρτηση.

- ❶ Αποδείξτε ότι

$$\|f - s_n(f)\|_\infty \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|a_k(f')| + |b_k(f')|}{k}.$$

- ❷ Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \|f - s_n(f)\|_\infty = 0.$$

- Αφού η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη, γνωρίζουμε ότι $f \equiv S(f)$. Συνεπώς,

$$f(x) - s_n(f, x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Παίρνοντας απόλυτες τιμές και κατόπιν supremum πάνω απ' όλα τα $x \in \mathbb{R}$, καταλήγουμε στην

$$\|f - s_n(f)\|_\infty \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} (|a_k(f)| + |b_k(f)|).$$

Βασικές ασκήσεις

- Τώρα χρησιμοποιούμε τη σχέση των συντελεστών Fourier της f με τους συντελεστές Fourier της f' : $|a_k(f)| = \frac{1}{k}|b_k(f')|$, $|b_k(f)| = \frac{1}{k}|a_k(f')|$ και την ανισότητα Cauchy–Schwarz, διαδοχικά, για να πάρουμε

Βασικές ασκήσεις

- Τώρα χρησιμοποιούμε τη σχέση των συντελεστών Fourier της f με τους συντελεστές Fourier της f' : $|a_k(f)| = \frac{1}{k}|b_k(f')|$, $|b_k(f)| = \frac{1}{k}|a_k(f')|$ και την ανισότητα Cauchy-Schwarz, διαδοχικά, για να πάρουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{\infty} (|a_k(f)| + |b_k(f)|) &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{|a_k(f')|}{k} + \frac{|b_k(f')|}{k} \right) \\ &\leq \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left[\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k(f')|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |b_k(f')|^2 \right)^{1/2} \right] \\ &\leq \sqrt{2/n} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k(f')|^2 + |b_k(f')|^2 \right)^{1/2},\end{aligned}$$

Βασικές ασκήσεις

- Τώρα χρησιμοποιούμε τη σχέση των συντελεστών Fourier της f με τους συντελεστές Fourier της f' : $|a_k(f)| = \frac{1}{k}|b_k(f')|$, $|b_k(f)| = \frac{1}{k}|a_k(f')|$ και την ανισότητα Cauchy-Schwarz, διαδοχικά, για να πάρουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{\infty} (|a_k(f)| + |b_k(f)|) &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{|a_k(f')|}{k} + \frac{|b_k(f')|}{k} \right) \\ &\leq \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left[\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k(f')|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |b_k(f')|^2 \right)^{1/2} \right] \\ &\leq \sqrt{2/n} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k(f')|^2 + |b_k(f')|^2 \right)^{1/2},\end{aligned}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{n}$$

και την στοιχειώδη ανισότητα $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{2}\sqrt{a+b}$.

- Επομένως,

$$\sqrt{n}\|f - s_n(f)\|_{\infty} \leq \sqrt{2} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k(f')|^2 + |b_k(f')|^2 \right)^{1/2}.$$

- Επομένως,

$$\sqrt{n}\|f - s_n(f)\|_{\infty} \leq \sqrt{2} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k(f')|^2 + |b_k(f')|^2 \right)^{1/2}.$$

- Από την ανισότητα του Bessel έχουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k(f')|^2 + |b_k(f')|^2)$ συγκλίνει και το συμπέρασμα έπεται.

Άσκηση

Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση.

1. Αποδείξτε ότι υπάρχει σταθερά $C(f) > 0$ ώστε $|k\hat{f}(k)| \leq C(f)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.
2. Εξετάστε αν $\lim_{|k| \rightarrow \infty} |k\hat{f}(k)| = 0$.
3. Εξετάστε αν $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)| < +\infty$.

Άσκηση

Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση.

- ❶ Αποδείξτε ότι υπάρχει σταθερά $C(f) > 0$ ώστε $|k\hat{f}(k)| \leq C(f)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.
 - ❷ Εξετάστε αν $\lim_{|k| \rightarrow \infty} |k\hat{f}(k)| = 0$.
 - ❸ Εξετάστε αν $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)| < +\infty$.
- Η απάντηση είναι καταφατική σε όλα τα ερωτήματα. Αρχικά παρατηρούμε ότι η f' είναι ολοκληρώσιμη. Από την ταυτότητα του Parseval,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}'(k)|^2 = \|f'\|_2^2 < +\infty.$$

Άσκηση

Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση.

- 1 Αποδείξτε ότι υπάρχει σταθερά $C(f) > 0$ ώστε $|k\hat{f}(k)| \leq C(f)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.
- 2 Εξετάστε αν $\lim_{|k| \rightarrow \infty} |k\hat{f}(k)| = 0$.
- 3 Εξετάστε αν $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)| < +\infty$.

- Η απάντηση είναι καταφατική σε όλα τα ερωτήματα. Αρχικά παρατηρούμε ότι η f' είναι ολοκληρώσιμη. Από την ταυτότητα του Parseval,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}'(k)|^2 = \|f'\|_2^2 < +\infty.$$

- Γνωρίζουμε ότι $\hat{f}'(k) = ik\hat{f}(k)$, συνεπώς

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 |\hat{f}(k)|^2 < +\infty.$$

Άσκηση

Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση.

- 1 Αποδείξτε ότι υπάρχει σταθερά $C(f) > 0$ ώστε $|k\hat{f}(k)| \leq C(f)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.
- 2 Εξετάστε αν $\lim_{|k| \rightarrow \infty} |k\hat{f}(k)| = 0$.
- 3 Εξετάστε αν $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)| < +\infty$.

- Η απάντηση είναι καταφατική σε όλα τα ερωτήματα. Αρχικά παρατηρούμε ότι η f' είναι ολοκληρώσιμη. Από την ταυτότητα του Parseval,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}'(k)|^2 = \|f'\|_2^2 < +\infty.$$

- Γνωρίζουμε ότι $\hat{f}'(k) = ik\hat{f}(k)$, συνεπώς

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 |\hat{f}(k)|^2 < +\infty.$$

- Έπεται το (β) (και από αυτό, το (α)): αφού η παραπάνω σειρά συγκλίνει, έχουμε

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} |k\hat{f}(k)| = 0.$$

- Για το (γ) , από την ανισότητα Cauchy-Schwarz παίρνουμε

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k \neq 0} |\widehat{f}(k)|\right)^2 &= \left(\sum_{k \neq 0} (k|\widehat{f}(k)|) \frac{1}{k}\right)^2 \\ &\leq \left(\sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^2}\right) \left(\sum_{k \neq 0} k^2 |\widehat{f}(k)|^2\right) < +\infty.\end{aligned}$$

- Για το (γ) , από την ανισότητα Cauchy-Schwarz παίρνουμε

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k \neq 0} |\widehat{f}(k)|\right)^2 &= \left(\sum_{k \neq 0} (k|\widehat{f}(k)|) \frac{1}{k}\right)^2 \\ &\leq \left(\sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^2}\right) \left(\sum_{k \neq 0} k^2 |\widehat{f}(k)|^2\right) < +\infty.\end{aligned}$$

- Έπεται ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| = |\widehat{f}(0)| + \sum_{k \neq 0} |\widehat{f}(k)| < +\infty.$$

Άσκηση

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη 2π -περιοδική συνάρτηση με

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0.$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Parseval για τις f και f' αποδείξτε ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx,$$

με ισότητα αν και μόνο αν $f(x) = a \cos x + b \sin x$ για κάποιους $a, b \in \mathbb{R}$.

Άσκηση

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη 2π -περιοδική συνάρτηση με

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0.$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Parseval για τις f και f' αποδείξτε ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx,$$

με ισότητα αν και μόνο αν $f(x) = a \cos x + b \sin x$ για κάποιους $a, b \in \mathbb{R}$.

- Γνωρίζουμε ότι $\widehat{f'}(k) = ik\widehat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Άσκηση

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη 2π -περιοδική συνάρτηση με

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0.$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Parseval για τις f και f' αποδείξτε ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx,$$

με ισότητα αν και μόνο αν $f(x) = a \cos x + b \sin x$ για κάποιους $a, b \in \mathbb{R}$.

- Γνωρίζουμε ότι $\widehat{f'}(k) = ik\widehat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.
- Επίσης, από την υπόθεση έχουμε

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0.$$

Βασικές ασκήσεις

- Από την ταυτότητα του Parseval για τις f και f' έπεται άμεσα ότι

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx &= \|f\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 \\ &= \sum_{k \neq 0} |\hat{f}(k)|^2 = \sum_{k \neq 0} \frac{|\hat{f}'(k)|^2}{k^2} \\ &\leq \sum_{k \neq 0} |\hat{f}'(k)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx.\end{aligned}$$

Βασικές ασκήσεις

- Από την ταυτότητα του Parseval για τις f και f' έπεται άμεσα ότι

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx &= \|f\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 \\ &= \sum_{k \neq 0} |\hat{f}(k)|^2 = \sum_{k \neq 0} \frac{|\hat{f}'(k)|^2}{k^2} \\ &\leq \sum_{k \neq 0} |\hat{f}'(k)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx.\end{aligned}$$

- Για την τελευταία ισότητα παρατηρήστε ότι

$$\hat{f}'(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) dx = \frac{f(\pi) - f(-\pi)}{2\pi} = 0$$

από την 2π -περιοδικότητα της f .

Βασικές ασκήσεις

- Από την ταυτότητα του Parseval για τις f και f' έπεται άμεσα ότι

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx &= \|f\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 \\ &= \sum_{k \neq 0} |\hat{f}(k)|^2 = \sum_{k \neq 0} \frac{|\hat{f}'(k)|^2}{k^2} \\ &\leq \sum_{k \neq 0} |\hat{f}'(k)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx.\end{aligned}$$

- Για την τελευταία ισότητα παρατηρήστε ότι

$$\hat{f}'(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) dx = \frac{f(\pi) - f(-\pi)}{2\pi} = 0$$

από την 2π -περιοδικότητα της f .

- Ισότητα μπορεί να ισχύει αν και μόνο αν $\hat{f}'(k) = ik\hat{f}(k) = 0$ για κάθε $k \geq 2$ (εξηγήστε γιατί). Ισοδύναμα αν

$$f(x) = \hat{f}(1)e^{ix} + \hat{f}(-1)e^{-ix}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή αν υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = a \cos x + b \sin x$.