

Υδραυλική & Υδραυλικά Έργα
5^ο εξάμηνο Σχολής Πολιτικών Μηχανικών

Υδραυλική αγωγών υπό πίεση

Ανδρέας Ευστρατιάδης, Επίκουρος Καθηγητής ΕΜΠ
Παναγιώτης Κοσσιέρης, Δρ. Πολιτικός Μηχανικός ΕΜΠ

Τομέας Υδατικών Πόρων & Περιβάλλοντος, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Ακαδημαϊκό έτος 2023-24

Ορισμός του ρευστού

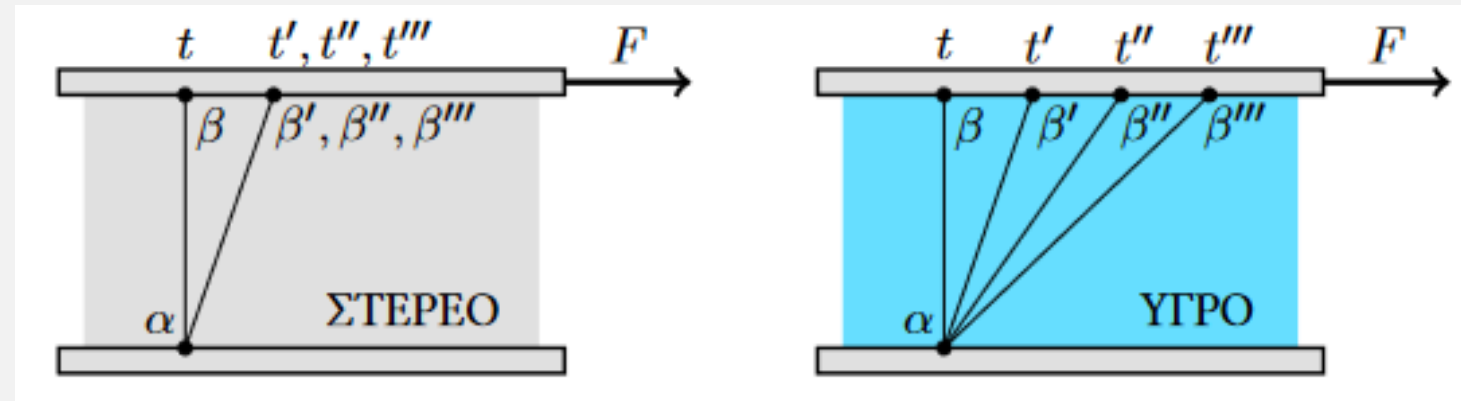
- Διατμητική τάση: Εφαπτομενική δύναμη που ασκείται στην επιφάνεια ενός υλικού:

$$\tau = \frac{dF_x}{dA} \quad \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$$

- Ρευστό: Υλικό το οποίο παραμορφώνεται συνεχώς (ρέει) υπό την επίδραση μιας διατμητικής τάσης, όσο μικρή και αν είναι αυτή (ενώ τα στερεά υφίστανται στατική παραμόρφωση ανάλογη της εφαρμοζόμενης διατμητικής τάσης, η οποία παραμένει σταθερή για όσο χρονικό διάστημα ασκείται η τάση αυτή).

- Κατηγορίες ρευστών:

- Υγρά (σταθερός όγκος)
- Αέρια (καταλαμβάνουν όλο τον όγκο που τους διατίθενται)
- Γενικός νόμος που διέπει τη δυναμική των ρευστών: **εξισώσεις Navier-Stokes**
- **Υδραυλική**: απλοποιημένες σχέσεις, αρκετές εκ των οποίων εμπειρικές



Πηγή: Τζιράκης, Κ., Εισαγωγή στις βασικές έννοιες της μηχανικής ρευστών, Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο, 2021.

Γενικές ιδιότητες υλικών σωμάτων

- Πυκνότητα, $\rho \rightarrow$ μάζα ανά μονάδα όγκου:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \left[\frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \right]$$

- Βάρος, W ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$, επιτάχυνση της βαρύτητας):

$$W = m g = \gamma V \quad [\text{N}]$$

- Ειδικό βάρος, $\gamma \rightarrow$ βάρος ανά μονάδα όγκου:

$$\gamma = \frac{W}{V} = \frac{m g}{V} = \rho g \quad \left[\frac{\text{Kg}}{\text{m}^2 \text{s}^2} \rightarrow \frac{\text{N}}{\text{m}^3} \right]$$

- Ειδικός όγκος, $v_{sp} \rightarrow$ όγκος ανά μονάδα μάζας:

$$v_{sp} = 1/\rho \quad \left[\frac{\text{m}^3}{\text{Kg}} \right]$$

- Θερμοκρασία, T : Μέση θερμική ενέργεια των σωματιδίων που αποτελούν ένα υλικό σώμα, μέσω της αντιστοιχίας της με μία βαθμονομημένη κλίμακα μονάδων.

Ιδιότητες νερού (για
 $T = 16 \text{ }^\circ\text{C}$, $P = 1 \text{ atm}$):

$$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$$

$$\gamma = 9.81 \text{ kN/m}^3$$

$$\mu = 0.001 \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

$$\nu = 1.1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

Ιδιότητες ρευστών: Δυναμική & κινηματική συνεκτικότητα

- Δυναμική συνεκτικότητα ή ιξώδες, μ : Ιδιότητα που χαρακτηρίζει ένα ρευστό να αναπτύσσει αντίσταση σε διατμητικές τάσεις:

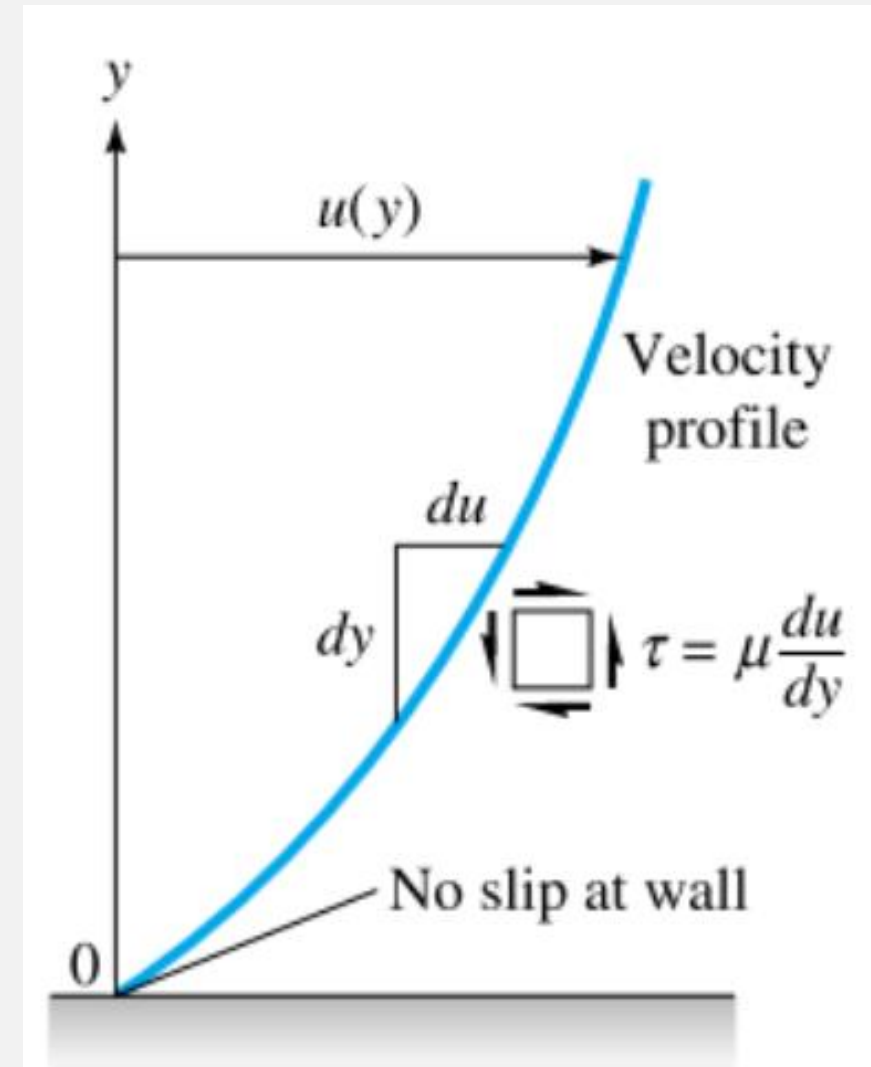
$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \text{ [Pa} \cdot \text{s]}$$

- Κινηματική συνεκτικότητα ή κινηματικό ιξώδες, ν :

$$\nu = \mu / \rho \text{ [m}^2\text{/s]}$$

Παρατηρήσεις

- Αν το ιξώδες μ είναι σταθερό, δηλαδή ανεξάρτητο των τ , du , dy → Νευτώνειο ρευστό
- Η ύπαρξη συνεκτικότητας στα ρευστά έχει ως συνέπεια την ανάπτυξη **τριβών μεταξύ των μορίων τους**.
- Σε κινούμενο ρευστό αναπτύσσονται **απώλειες ενέργειας** λόγω τριβών με τα τοιχώματα του αγωγού και λόγω συνεκτικότητας.



Ιδιότητες ρευστών: Ταχύτητα & παροχή

- Ταχύτητα, $V = (u, v, \omega)$ (διανυσματικό μέγεθος, m/s)
- Γραμμή ροής: Συνεχής νοητή γραμμή στην οποία το διάνυσμα της ταχύτητας είναι πάντα εφαπτομενικό.
- Οι γραμμές ροής δεν τέμνονται και δεν εφάπτονται.
- Παροχή: Όγκος ρευστού που διέρχεται από επιφάνεια ανά μονάδα χρόνου

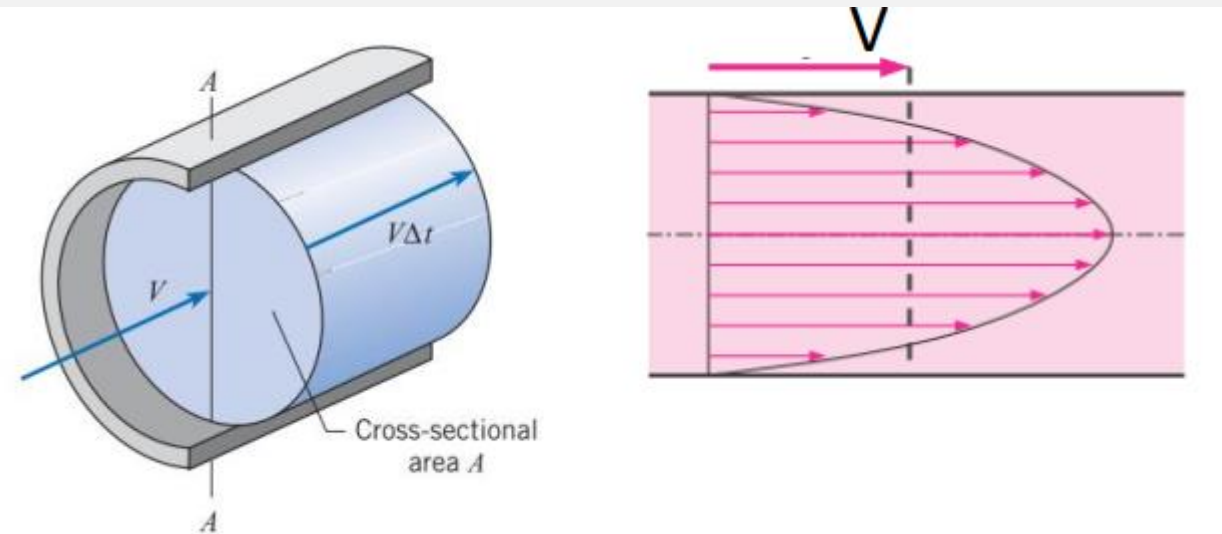
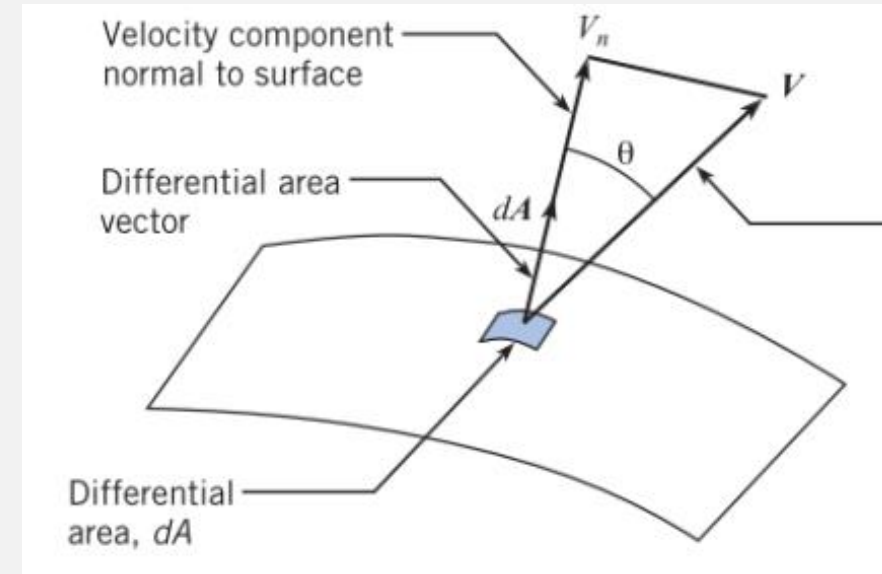
$$Q = \int V_n dA$$

- Αν η ταχύτητα V είναι ομοιόμορφη επί της επιφάνειας A και κάθετη σε αυτήν τότε:

$$Q = V A$$

- Σε κυκλικό αγωγό, με ολική πλήρωση:

$$Q = V \pi D^2 / 4$$



Ιδιότητες ρευστών: Απόλυτη και σχετική πίεση

- Πίεση, p : Η ορθή (κάθετη) θλιπτική δύναμη σε οποιοδήποτε σημείο του ρευστού:

$$p = \frac{dF_y}{dA} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \rightarrow \text{Pa} \right]$$

- Ατμοσφαιρική ή βαρομετρική πίεση: Η πίεση που ασκεί η ατμόσφαιρα με το βάρος της στην επιφάνεια της Γης ($P_{atm} = 101.3 \text{ kPa} = 1 \text{ atm}$)

- Απόλυτη πίεση: Η πίεση με αναφορά στο κενό

- Μανομετρική ή σχετική πίεση:

$$p = p_{abs} - p_{atm}$$

- Ύψος πίεσης, p/γ : Ο λόγος της σχετικής πίεσης προς το ειδικό βάρος του ρευστού

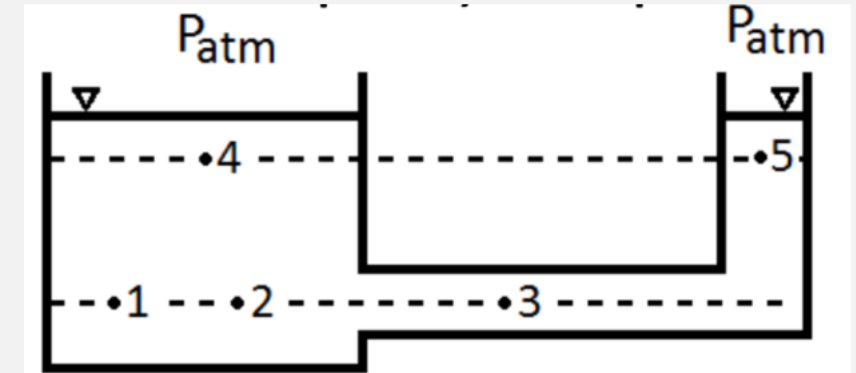
- Πίεση χαμηλότερη της ατμοσφαιρικής → **υποπίεση**

Παρατηρήσεις

- Για ρευστό που βρίσκεται σε ηρεμία ή κινείται ως στερεό σώμα, η πίεση είναι **βαθμωτό μέγεθος**.
- Για δεδομένο σημείο στο χώρο, η πίεση παραμένει σταθερή για όλα τα άπειρα επίπεδα που διέρχονται από το σημείο αυτό.
- Λόγω της πίεσης, σε κάθε σημείο ενός ρευστού αναπτύσσεται μια δύναμη κάθετη προς κάθε επιφάνεια.
- Η πίεση, σε συνδυασμό με τη θερμοκρασία, συνδέονται με το σημείο βρασμού του ρευστού.

Ιδιότητες ρευστών: Υδροστατική πίεση

- **Υδροστατική πίεση** ονομάζεται αυτή που ασκεί ένα ρευστό το οποίο βρίσκεται σε ισορροπία με αντικείμενο ή επιφάνεια που βρίσκεται μέσα σ' αυτό. Η πίεση αυτή οφείλεται στην δύναμη της βαρύτητας και μόνο, δηλαδή στο βάρος του ρευστού που βρίσκεται υπεράνω του αντικειμένου ή της επιφάνειας.
- Η υδροστατική πίεση αυξάνει γραμμικά με το βάθος h :
$$p = \rho g h = \gamma h$$
- Η πίεση έχει την ίδια ένταση σε όλα τα σημεία που βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο, ανεξαρτήτως της γεωμετρίας του δοχείου που εμπεριέχει το ρευστό (παράδοξο του Pascal).
- Κατά τον σχεδιασμό, οι αγωγοί ελέγχονται ως προς τη **αντοχή** τους σε συνθήκες υδροστατικής πίεσης (πλέον δυσμενής συνθήκη).



Μονάδες πίεσης

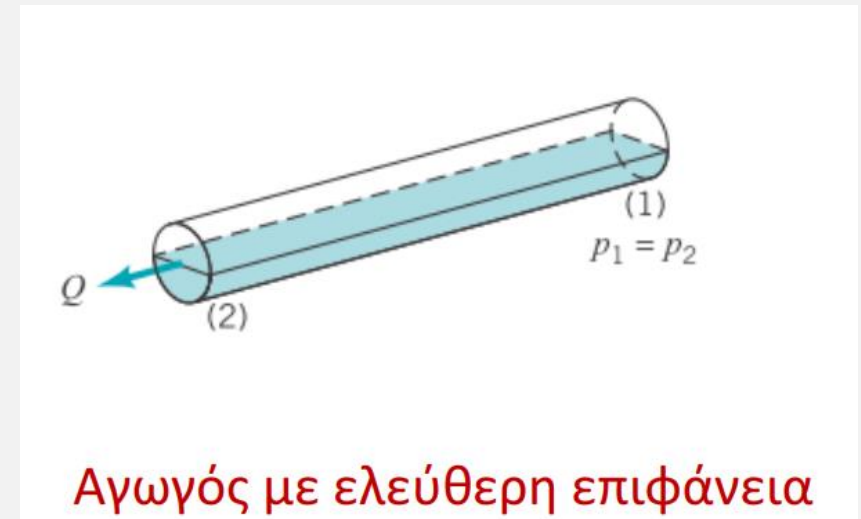
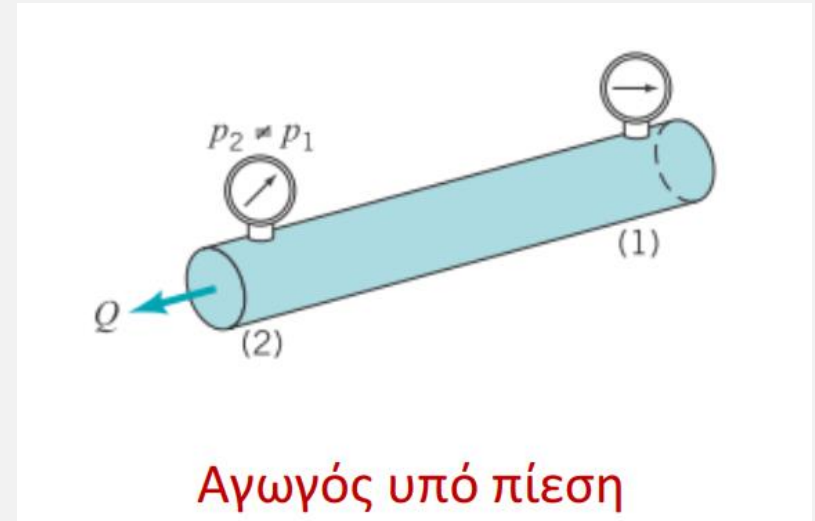
$$1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 1 \text{ Pa} = 1 \frac{\text{Kg}}{\text{m s}^2} = 1 \frac{\text{J}}{\text{m}^3}$$

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa} = 100 \text{ kPa}$$

$$1 \text{ atm} = 101.3 \text{ kPa} \text{ (απόλυτη ατμοσφαιρική πίεση)}$$

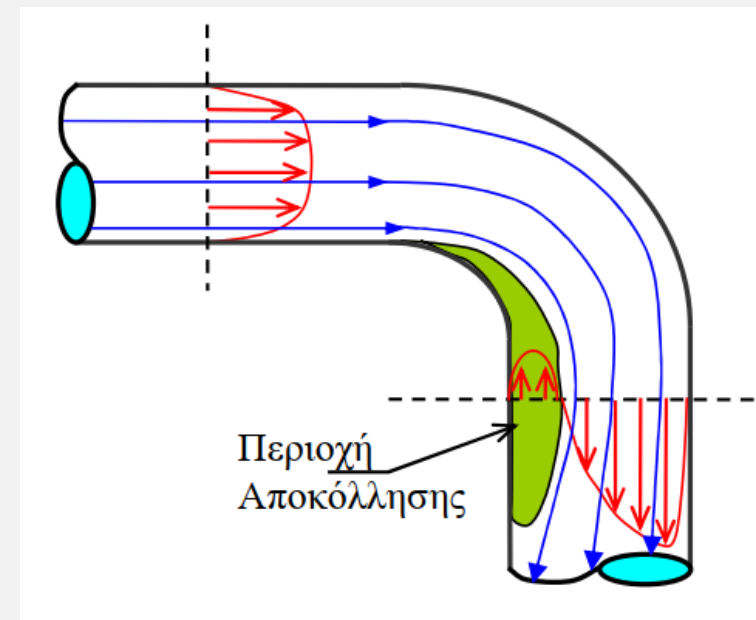
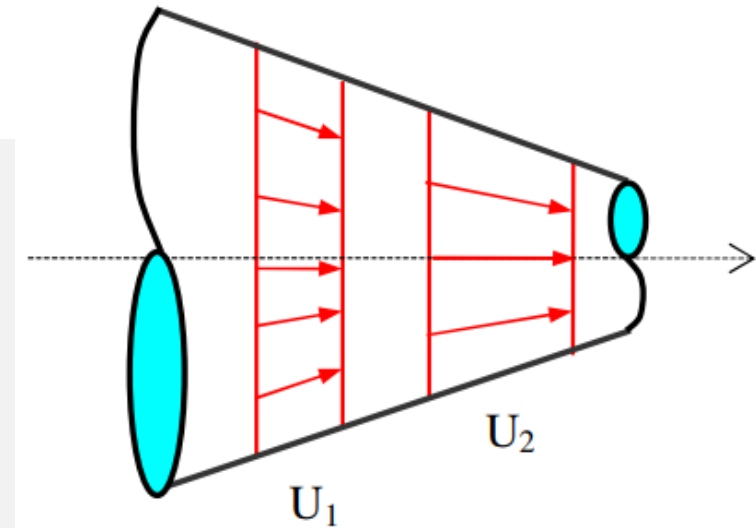
Τύποι ροών σε αγωγούς

- **Ροή υπό πίεση:** Εσωτερικές ροές υγρών ή αερίων, που περιορίζονται από στερεά όρια, σε αγωγούς που είναι πλήρως γεμάτοι
 - Το ρευστό καλύπτει ολόκληρη τη διατομή του αγωγού
 - Η πίεση είναι διαφορετική από την ατμοσφαιρική
 - Η ροή διέπεται κυρίως από την κλίση πίεσης κατά μήκος του αγωγού
 - Ροή υπό πίεση μπορεί να πραγματοποιηθεί αποκλειστικά και μόνο σε κλειστούς αγωγούς.
- **Ροή με ελεύθερη επιφάνεια:** Ροές (υγρών) σε αγωγούς ανοικτούς στην ατμόσφαιρα (π.χ. ποτάμια) ή σε κλειστούς αγωγούς που δεν είναι πλήρως γεμάτοι (π.χ. αγωγοί ομβρίων και ακαθάρτων)
 - Τα όρια της ροής δεν είναι καθορισμένα (εξαρτώνται από την παροχή και τη γεωμετρία του αγωγού)
 - Η ροή διέπεται αποκλειστικά από τη βαρύτητα



Χαρακτηρισμός ροών

- ❑ **Μόνιμη ροή:** δεν υπάρχει μεταβολή της ταχύτητας και της παροχής με τον χρόνο
- ❑ **Ομοιόμορφη ροή:** δεν υπάρχει μεταβολή της ταχύτητας στον χώρο, σε οποιοδήποτε σημείο του ροϊκού πεδίου
- ❑ **Μόνιμη ομοιόμορφη ροή:**
 - γραμμές ροής παράλληλες
 - ταχύτητα σταθερή κατά μήκος γραμμής ροής
 - υδροστατική κατανομή πίεσης κάθετα στις γραμμές ροής
- ❑ **Μόνιμη ανομοιόμορφη ροή:** το διάνυσμα της ταχύτητας μεταβάλλεται κατά μήκος μια γραμμής ροής:
 - Επιταχυνόμενη (συγκλίνουσα)
 - Επιβραδυνόμενη (αποκλίνουσα)
 - Ροή σε καμπύλη



Πηγή: Παπανικολάου, 2014.

Αριθμός Reynolds – Στρωτή και τυρβώδης ροή

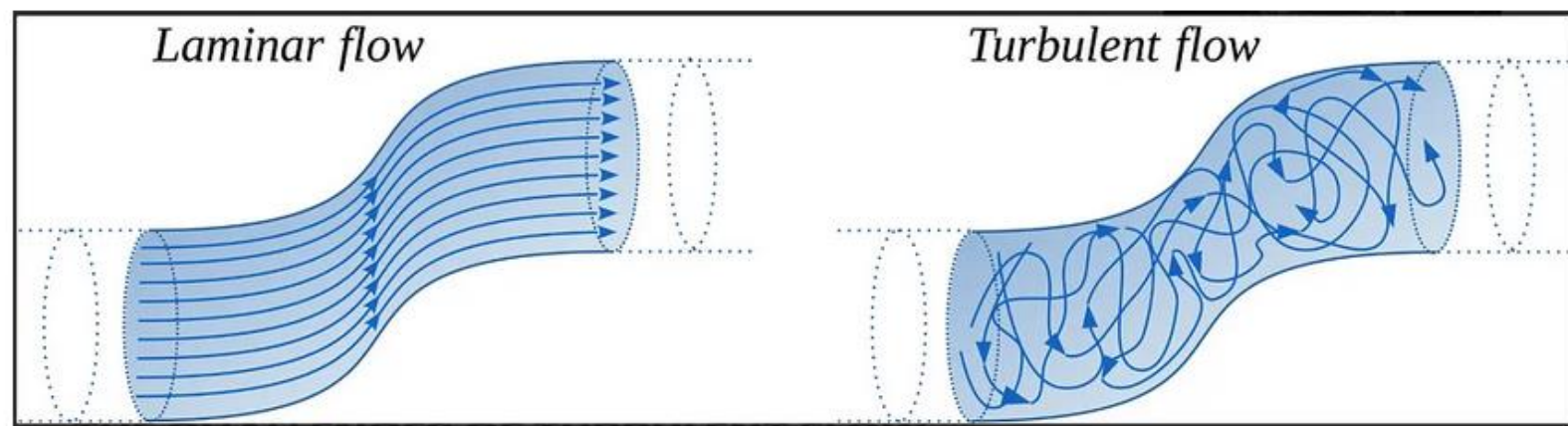
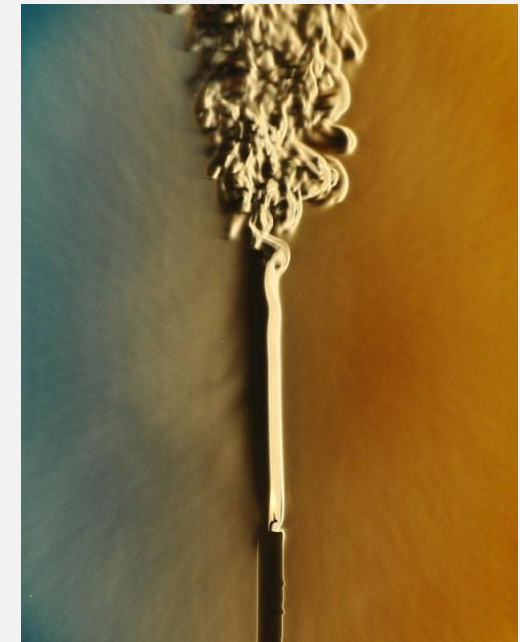
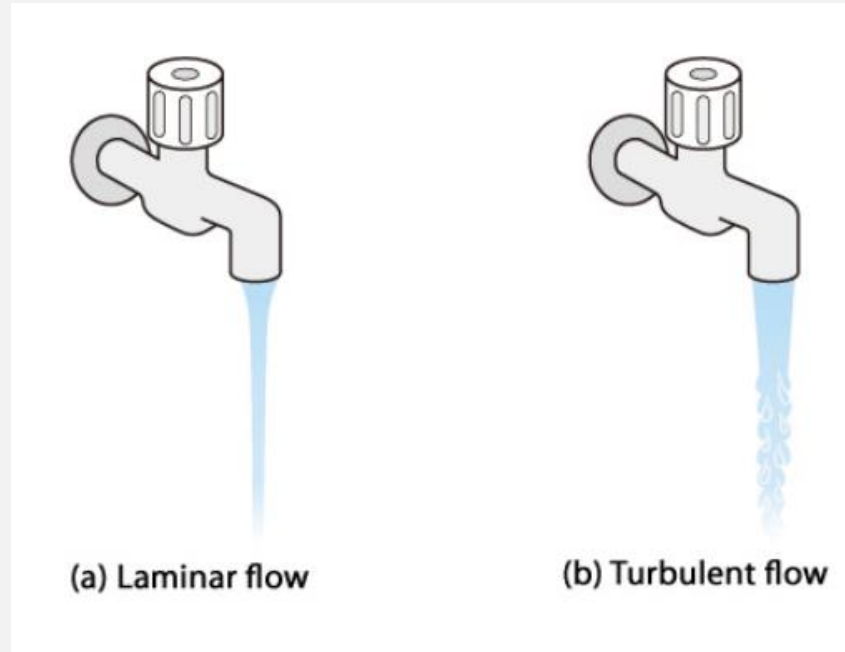
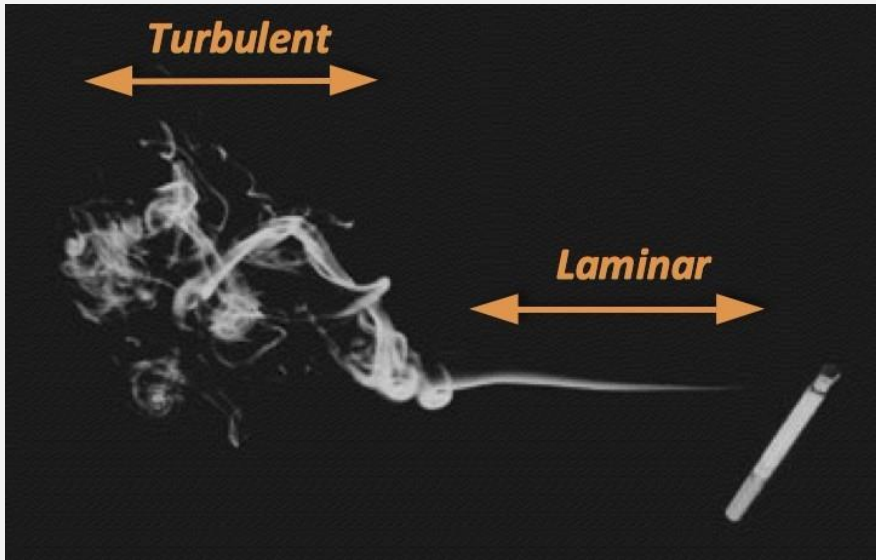
- Ο αριθμός Reynolds αποτελεί χαρακτηριστικό δυναμικό μέγεθος της ροής (αδιάστατο), και ορίζεται ως:

$$Re = \frac{V L}{\nu}$$

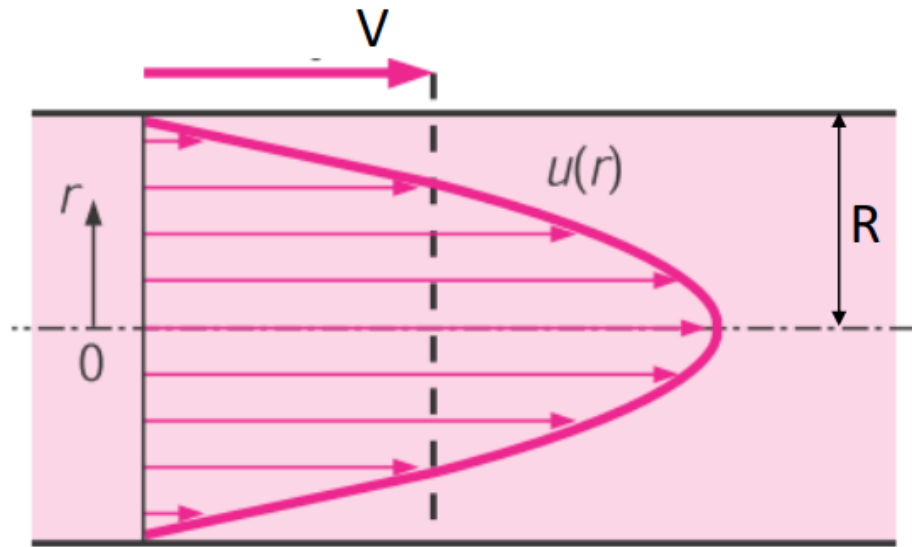
όπου V είναι κάποια χαρακτηριστική ταχύτητα (συνήθως η μέση ταχύτητα ροής στη διατομή), L είναι κάποιο χαρακτηριστικό μήκος του πεδίου ροής (διάμετρος, σε κυκλικό αγωγό, ή κάποια άλλη χαρακτηριστική εγκάρσια κλίμακα μήκους) και ν είναι το κινηματικό ιξώδες του ρευστού.

- Ο αριθμός Re εκφράζει τον λόγο των **δυνάμεων αδράνειας** προς τις **δυνάμεις συνεκτικότητας**.
- Διάκριση ροών από **δυναμική άποψη** σε:
 - **Στρωτή (laminar)**: κίνηση κατά λείες στρώσεις χωρίς μίξη μεταξύ τους, επικράτηση δυνάμεων συνεκτικότητας
 - **Τυρβώδης (turbulent)**: κίνηση ακανόνιστη, έντονη μίξη, επικράτηση δυνάμεων αδράνειας
- Η διάκριση των δύο ροών γίνεται με βάση μια **κρίσιμη τιμή του αριθμού Reynolds**.
- Σε αγωγό κυκλικής διατομής, η ροή είναι στρωτή για $Re < 2000$ έως 2300 και τυρβώδης για $Re > 4000$, (μεταβατική περιοχή για $2300 < Re < 4000$).

Στρωτή vs. τυρβώδης ροή

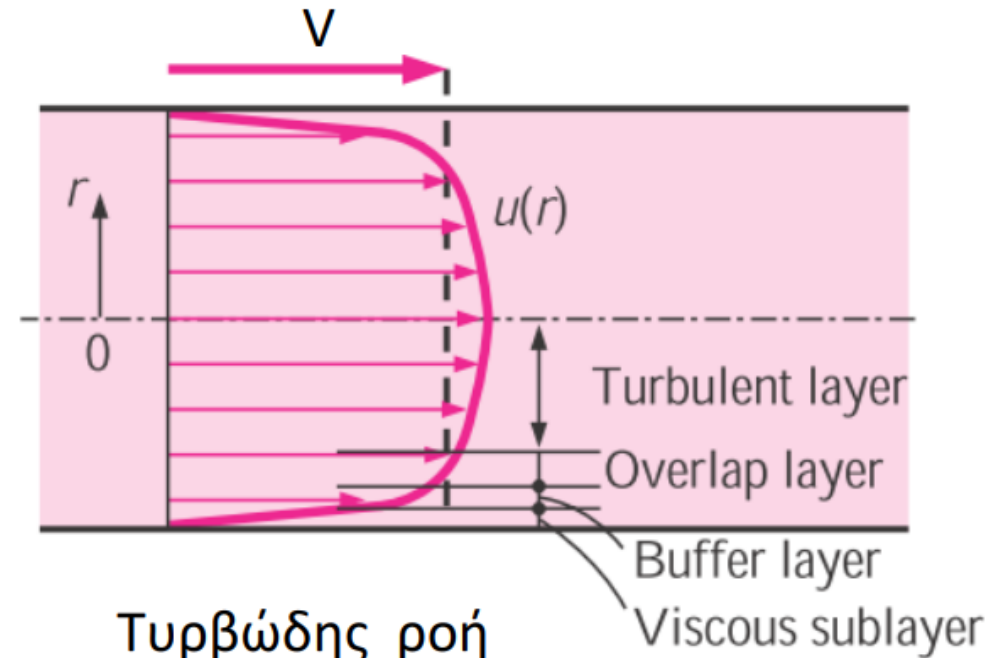


Προφίλ ταχυτήτων σε στρωτή και τυρβώδη ροή



Στρωτή ροή

$$u(r) = u_{max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

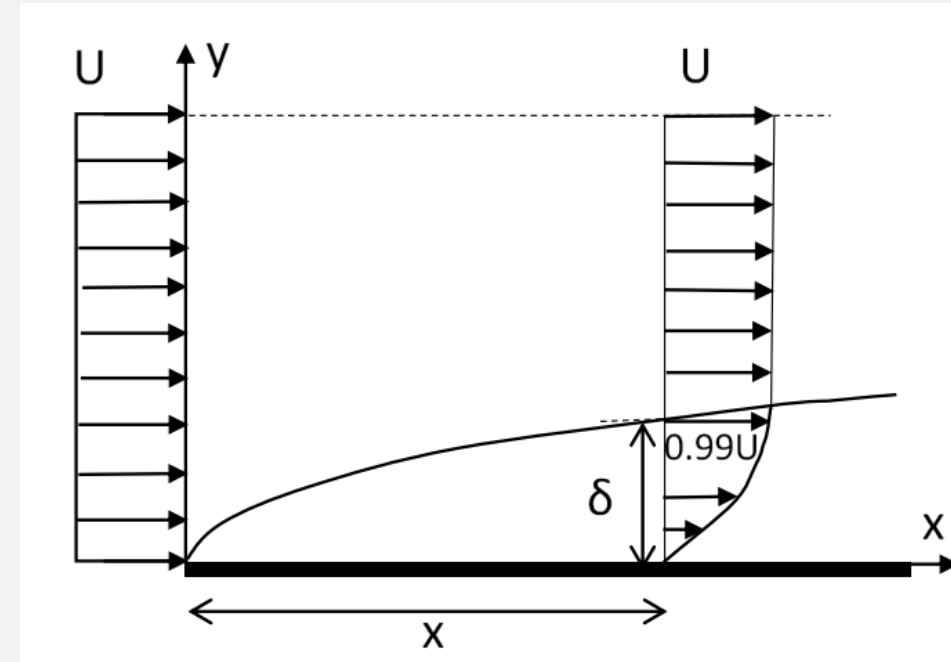


Τυρβώδης ροή

- **Στρωτή ροή:** ομαλή κίνηση, μικρή κλίση du/dy (ελάχιστες εφαρμογές, π.χ. υπόγεια νερά)
- **Τυρβώδης ροή:** μη ομαλή κίνηση → μεγάλες απώλειες ενέργειας, μεγάλη κλίση du/dy (πρακτικά, αφορά σε όλα τα προβλήματα υδραυλικής και υδραυλικών έργων)

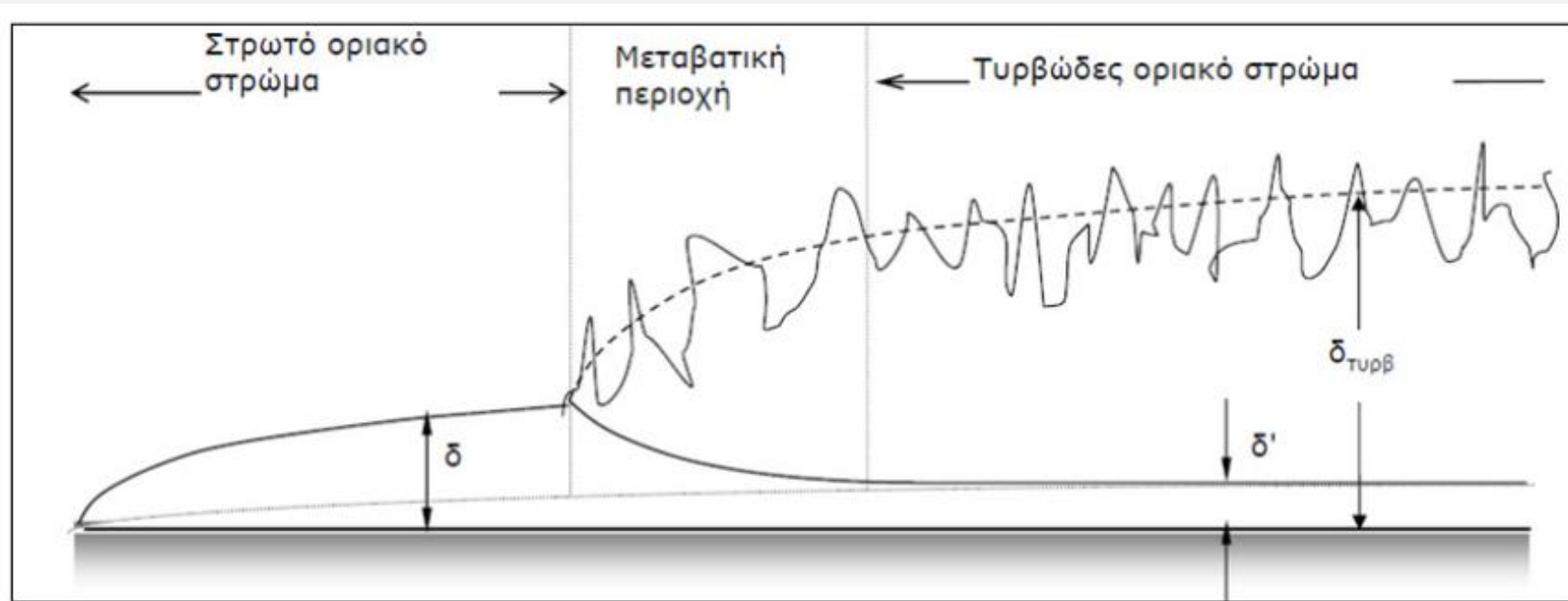
Η έννοια του οριακού στρώματος

- Συνέπειες ύπαρξης **στερεού ορίου**:
 - μηδενισμός ταχύτητας (συνθήκη μη ολίσθησης)
 - επιβράδυνση ροής στην περιοχή του ορίου
- Περιοχή επίδρασης του στερεού ορίου → **οριακό στρώμα**:
 - μεγάλες κλίσεις ταχυτήτων, du/dy
 - σημαντικές διατμητικές τάσεις
 - δεν μπορούν να αμεληθούν οι δυνάμεις συνεκτικότητας
 - φαινόμενα αποκόλλησης της ροής
- Οριακό στρώμα στρωτό (**κοντά στην είσοδο**) ή τυρβώδες (**περιοχή πλήρως ανεπτυγμένης ροής**).
- **Πάχος οριακού στρώματος, δ** : κάθετη απόσταση από το στερεό όριο μέχρι το σημείο όπου η ταχύτητα ροής είναι ίση με την εξωτερική ταχύτητα U (πρακτικά διαφέρει κατά 1%, δηλαδή $u = 0.99U$)
- **Περιοχή κοντά στην είσοδο (στρωτή ροή)**: μικρότερο πάχος Ο.Σ. → πιο απότομη κλίση προφίλ ταχύτητας στο όριο → μέγιστη διατμητική τάση → έντονη πτώση πίεσης



Τυρβώδες οριακό στρώμα και στρωτό οριακό υπόστρωμα

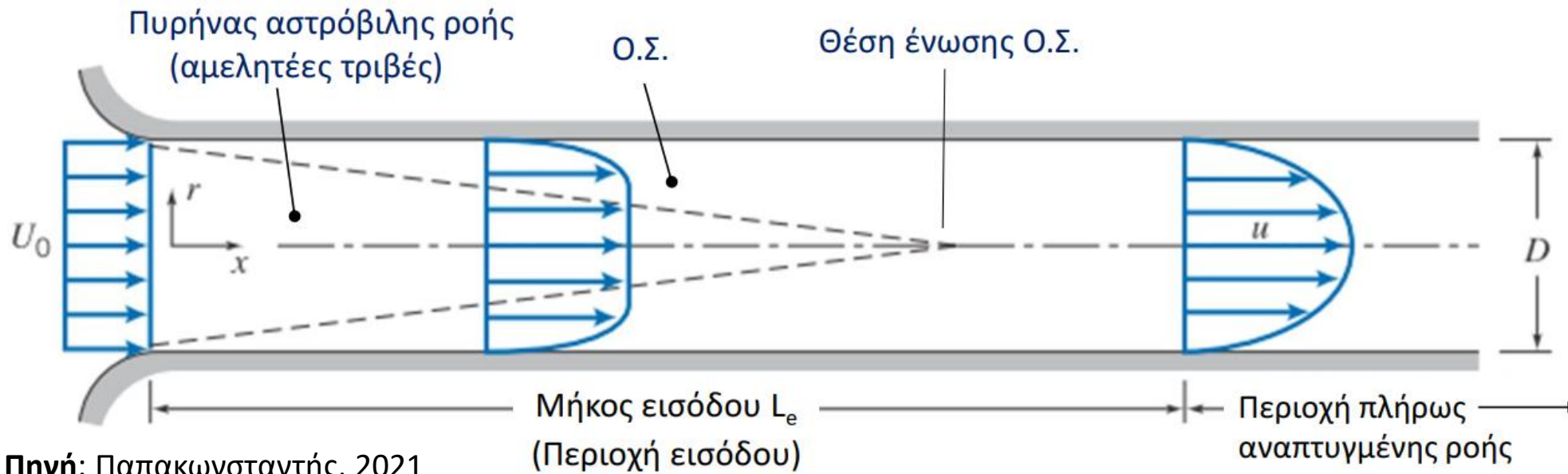
- Η κίνηση του ρευστού στην **τυρβώδη ροή** είναι ακανόνιστη, και η συνισταμένη ταχύτητα αποτελείται από μια μέση τιμή u και έναν τυχαίο όρο u' , δηλαδή $U = u + u'$
- Οι διακυμάνσεις της ταχύτητας μηδενίζονται στην περιοχή που γειτονεύει με το στερεό όριο, επειδή το ρευστό προσκολλάται σ' αυτό (κυριαρχεί η συνεκτικότητα).
- **Στρωτό οριακό (ιξώδες) υπόστρωμα:** ζώνη πάχους δ' πολύ κοντά στο στερεό όριο, όπου επικρατούν οι δυνάμεις συνεκτικότητας και η ροή είναι στρωτή (συνήθως θεωρείται $\delta' = 0.02\delta$).



Είσοδος σε κυκλικό αγωγό – Ανάπτυξη οριακού στρώματος

- Σε μήκος L_e (μήκος εισόδου) από την είσοδο του νερού αναπτύσσεται το στρωτό αξονοσυμμετρικό Ο.Σ.
- Σε απόσταση $x > L_e$ η ροή είναι **πλήρως αναπτυγμένη**:
 - το προφίλ της ταχύτητας δεν μεταβάλλεται κατά μήκος του αγωγού
 - γραμμική μεταβολή (πτώση) της πίεσης κατά x
 - σταθερή διατμητική τάση στο όριο

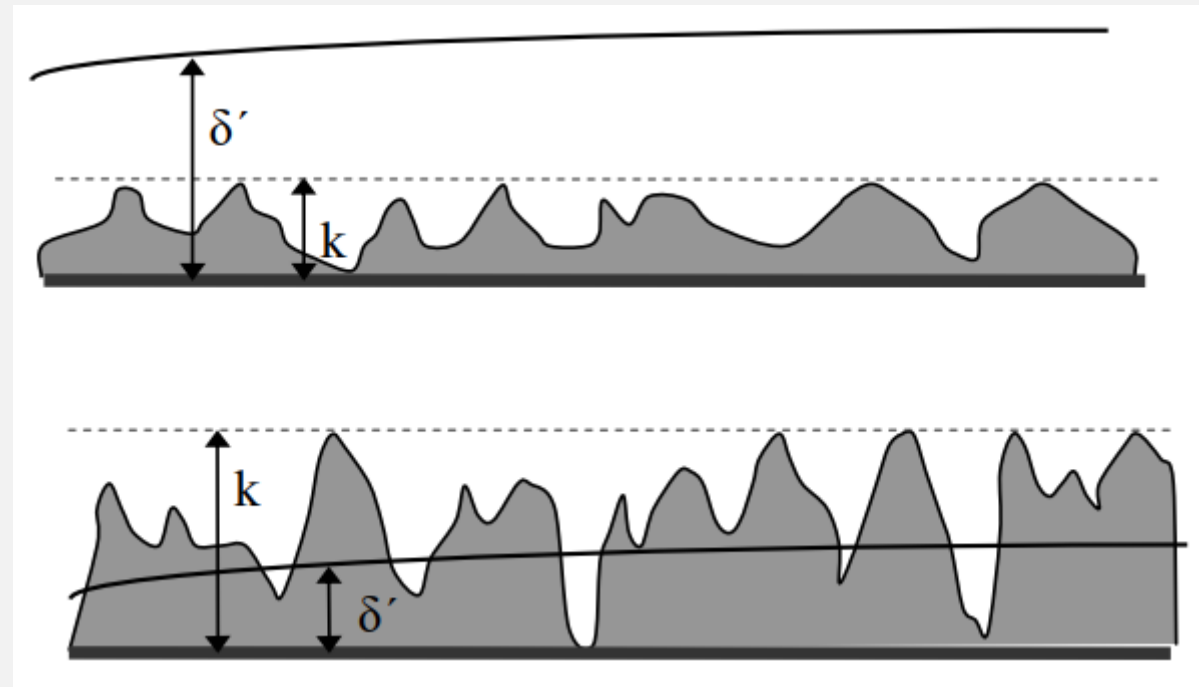
Παρατήρηση: Το μήκος εισόδου στην τυρβώδη ροή είναι της τάξης των 20-40 D . Στα πρακτικά προβλήματα αγνοείται, και θεωρείται ότι η ομοιόμορφη ροή ξεκινά από την αρχή του αγωγού.



Χαρακτηριστικά στερεού ορίου: Τραχύτητα & ισοδύναμη τραχύτητα



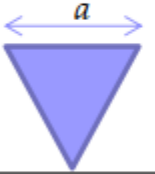
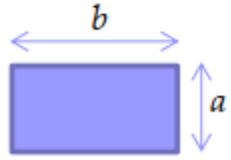
- ❑ **Τραχύτητα, k** : μακροσκοπική ιδιότητα ενός στερεού ορίου, που πρακτικά εκφράζει το μέσο μέγεθος των προεξοχών του, που στην πράξη εμφανίζουν έντονες και ακανόνιστες μεταβολές στη μικροκλίμακα.
- ❑ Για την ανάλυση της ροής κοντά σε στερεό όριο εισάγεται η έννοια της **ισοδύναμης τραχύτητας, k_s** .
- ❑ Ορισμός: η τραχύτητα που προκαλείται από ομοιόμορφους κόκκους άμμου μεγέθους k_s που επικολλώνται στην επιφάνεια, και έχει **ίδια υδροδυναμική συμπεριφορά** με την πραγματική επιφάνεια, τραχύτητας k (πείραμα Nikuradse).
- ❑ Συγκρίνοντας την ισοδύναμη τραχύτητα k_s με το πάχος του στρωτού οριακού υποστρώματος δ' (διαστάσεις μήκους), οι αγωγοί διακρίνονται σε:
 - **Λείοι (ή υδραυλικά λείοι)**, όταν $k_s < \delta'$
 - **Τραχείς**, όταν $k_s > \delta'$

Παρατήρηση: Η τραχύτητα ενός αγωγού αυξάνει δραστικά με το χρόνο και τη χρήση του, λόγω φαινομένων γήρανσης και επικαθήσεων φερτών.



Χαρακτηριστικά μεγέθη διατομής – Υδραυλική ακτίνα

- **Επιφάνεια υγρής διατομής, A :** το τμήμα της διατομής που είναι καλυμμένο με νερό
- **Βρεχόμενη περίμετρος, P :** η τομή της υγρής διατομής με το στερεό όριο (τοιχώματα αγωγού) → περιοχή όπου πραγματοποιούνται υδραυλικές απώλειες λόγω τριβών
- **Υδραυλική ακτίνα, R :** ο λόγος της υγρής διατομής προς τη βρεχόμενη περίμετρο

| Σχήμα | A | P | $R = A/P$ | $R = f(A)$ |
|--|-------------------------|-----------|------------------------|--|
|  | $\frac{\pi D^2}{4}$ | πD | $\frac{D}{4}$ | $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{A} = 0.282\sqrt{A}$ |
|  | a^2 | $4a$ | $\frac{a}{4}$ | $\frac{1}{4}\sqrt{A} = 0.25\sqrt{A}$ |
|  | $\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$ | $3a$ | $\frac{\sqrt{3}a}{12}$ | $\frac{3^{1/4}}{6}\sqrt{A} = 0.219\sqrt{A}$ |
|  | ba | $2b + 2a$ | $\frac{a}{2 + 2a/b}$ | $\frac{\sqrt{a/b}}{2 + 2a/b}\sqrt{A}$ $\max\left(\frac{\sqrt{a/b}}{2+2a/b}\right) = 0.25$ για $a/b = 1$ (τετράγωνο) |

Παρατηρήσεις

- Στη ροή με ελεύθερη επιφάνεια η βρεχόμενη περίμετρος είναι μικρότερη (δεν υπολογίζεται η ελεύθερη επιφάνεια) και άρα η υδραυλική ακτίνα μεγαλύτερη.
- Μέγιστη υδραυλική ακτίνα για δεδομένο εμβαδό διατομής → ημικύκλιο ($R = 0.399\sqrt{A}$)

Μονοδιάστατη ανάλυση

- Αρχή διατήρησης μάζας (εξίσωση συνέχειας):

$$Q = V_1 A_1 = V_2 A_2$$

- Αρχή διατήρησης ορμής (εξίσωση ποσότητας κίνησης):

$$\Sigma F = F_\tau + F_g + F_p = \rho Q (V_2 - V_1)$$

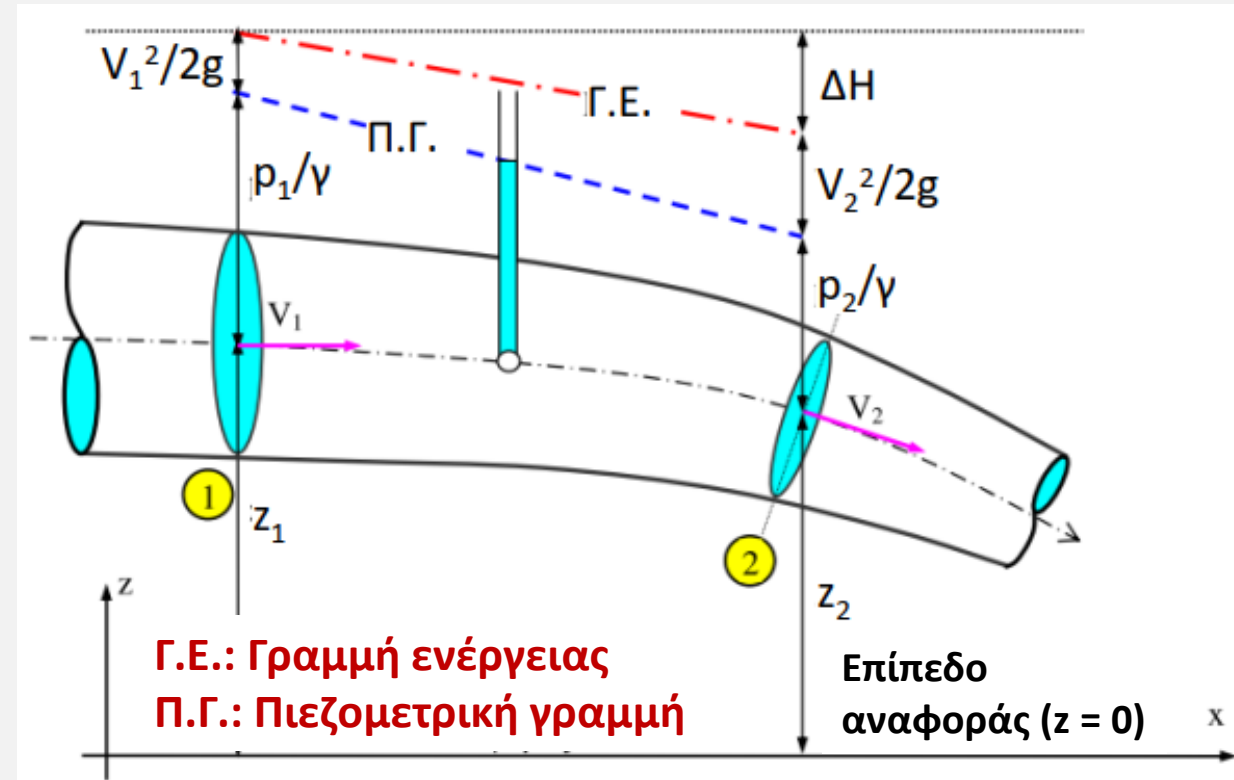
- Αρχή διατήρησης ενέργειας (εξίσωση Bernoulli, υδραυλική ενέργεια = δυναμική ενέργεια + ενέργεια πίεσης + κινητική ενέργεια):

$$\boxed{z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g}} = \boxed{z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}} + \boxed{\Delta H}$$

↑
**Ύψος
ενέργειας**

↑
**Πιεζομετρικό
φορτίο**

↑
**Απώλειες
ενέργειας**



Ύψος ενέργειας ή υδραυλικό φορτίο, H :
Η υδραυλική ενέργεια εκφράζεται ανά μονάδα βάρους ρέοντος ρευστού, διαιρώντας με τον όρο mg , οπότε λαμβάνει διαστάσεις μήκους

Γραμμή ενέργειας & πιεζομετρική γραμμή

□ **Γραμμή ενέργειας** → ο γεωμετρικός τόπος του **ολικού φορτίου** κατά μήκος ενός αγωγού.

- Η Γ.Ε. θα φθίνει στην κατεύθυνση της ροής, με εξαίρεση:
 - τα σημεία στα οποία προστίθεται ενέργεια από μηχανές (π.χ. αντλίες), όπου παρουσιάζει **τοπική ανύψωση** ίση με το φορτίο της αντλίας (μανομετρικό ύψος)
 - τα σημεία στα οποία υπάρχουν **τοπικές απώλειες** λόγω γεωμετρικών μεταβολών, όπου παρουσιάζει **τοπική πτώση** ίση με το φορτίο των τοπικών απωλειών
- Κλίση γραμμής ενέργειας, για μήκος αγωγού L :

$$J = \Delta H / L$$

□ **Πιεζομετρική Γραμμή** → ο γεωμετρικός τόπος του **πιεζομετρικού φορτίου** κατά μήκος ενός αγωγού.

- Για αγωγούς σταθερής διαμέτρου με ροή υπό πίεση, η Π.Γ. είναι εξ ορισμού παράλληλη με την Γ.Ε. και βρίσκεται κάτω από αυτήν, από την οποία απέχει κατά $V^2 / 2g$
- Στη ροή υπό πίεση, η Π.Γ. ανυψώνεται τοπικά, σε σημεία στένωσης, όπου $V_{\text{ΑΝΑΝΤΗ}} > V_{\text{ΚΑΤΑΝΤΗ}}$
- Στην ελεύθερη ροή, η Π.Γ. ταυτίζεται με την επιφάνεια του νερού (μηδενισμός σχετικής πίεσης)

Μόνιμη ομοιόμορφη ροή

- Ομοιόμορφη ροή (ορισμός): **σταθερά V, A**

- Αρχή διατήρησης μάζας:

$$Q = V_1 A_1 = V_2 A_2 = VA$$

- Αρχή διατήρησης ορμής:

$$\Sigma F = \rho Q(V_2 - V_1) = 0$$

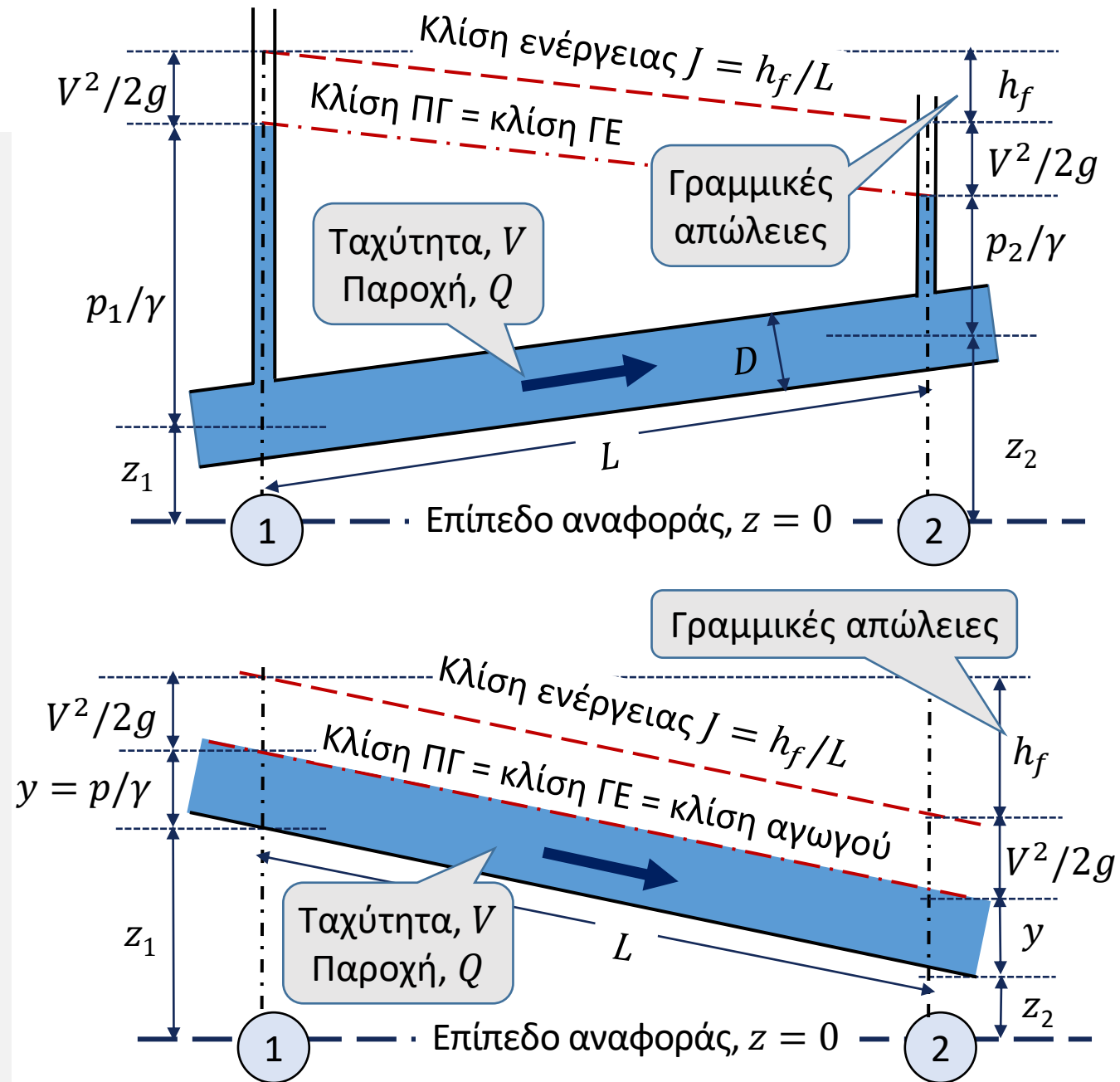
- Αρχή διατήρησης ενέργειας:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \Delta H$$

- Λόγω ομοιομορφίας, οι απώλειες ενέργειας οφείλονται μόνο σε τριβές (**γραμμικές απώλειες, friction losses**): $\Delta H = h_f, J = h_f/L$

- Ομοιόμορφη ροή με ελεύθερη επιφάνεια:

$$h_f = z_1 - z_2, J = J_{\text{αγωγού}}$$



Μόνιμη ομοιόμορφη ροή: ροή υπό πίεση vs. με ελεύθερη επιφάνεια

□ Ροή υπό πίεση:

- Η διατομή αποτελεί καθαρά γεωμετρικό μέγεθος και δεν εξαρτάται από τα υδραυλικά μεγέθη της ροής (παροχή, ταχύτητα).
- Αντίθετα, η κλίση ενέργειας είναι υδραυλικό μέγεθος (μεταβάλλεται με την παροχή).
- Κατά κανόνα, οι αγωγοί υπό πίεση είναι κυκλικής διατομής (σωλήνες), κάτι που εξασφαλίζει:
 - την απλούστερη δυνατή γεωμετρία ροής (πολλαπλές συμμετρίες)
 - τη μαθηματική περιγραφή της γεωμετρίας ροής από ένα μέγεθος, την εσωτερική διάμετρο D .
- Η ομοιομορφία της ροής είναι δεδομένη (έστω κατά τμήματα).

□ Ροή με ελεύθερη επιφάνεια:

- Η κλίση ενέργειας αποτελεί καθαρά γεωμετρικό μέγεθος, ίση με την κλίση του πυθμένα του αγωγού.
- Αντίθετα, η διατομή είναι υδραυλικό μέγεθος (μεταβάλλεται με την παροχή).
- Η γεωμετρία της διατομής είναι σαφώς πιο πολύπλοκη από τη γεωμετρία των κυκλικών αγωγών.
- Η ομοιομορφία της ροής δεν είναι δεδομένη (χρειάζεται υδραυλικές προϋποθέσεις)

Γραμμικές απώλειες

- Ανάλυση όγκου αναφοράς σε τμήμα αγωγού μήκους L , επιφάνειας A και βρεχόμενης περιμέτρου P
- Από αρχή διατήρησης ορμής (ισορροπία δυνάμεων) στον όγκο αναφοράς μεταξύ των διατομών 1 και 2, σε διεύθυνση παράλληλη με τον πυθμένα:

$$F_\tau + F_g + F_p = 0 \Rightarrow p_1 A = p_2 A + W \sin\theta + T$$

- Αν τ η μέση διατμητική τάση στο όριο:

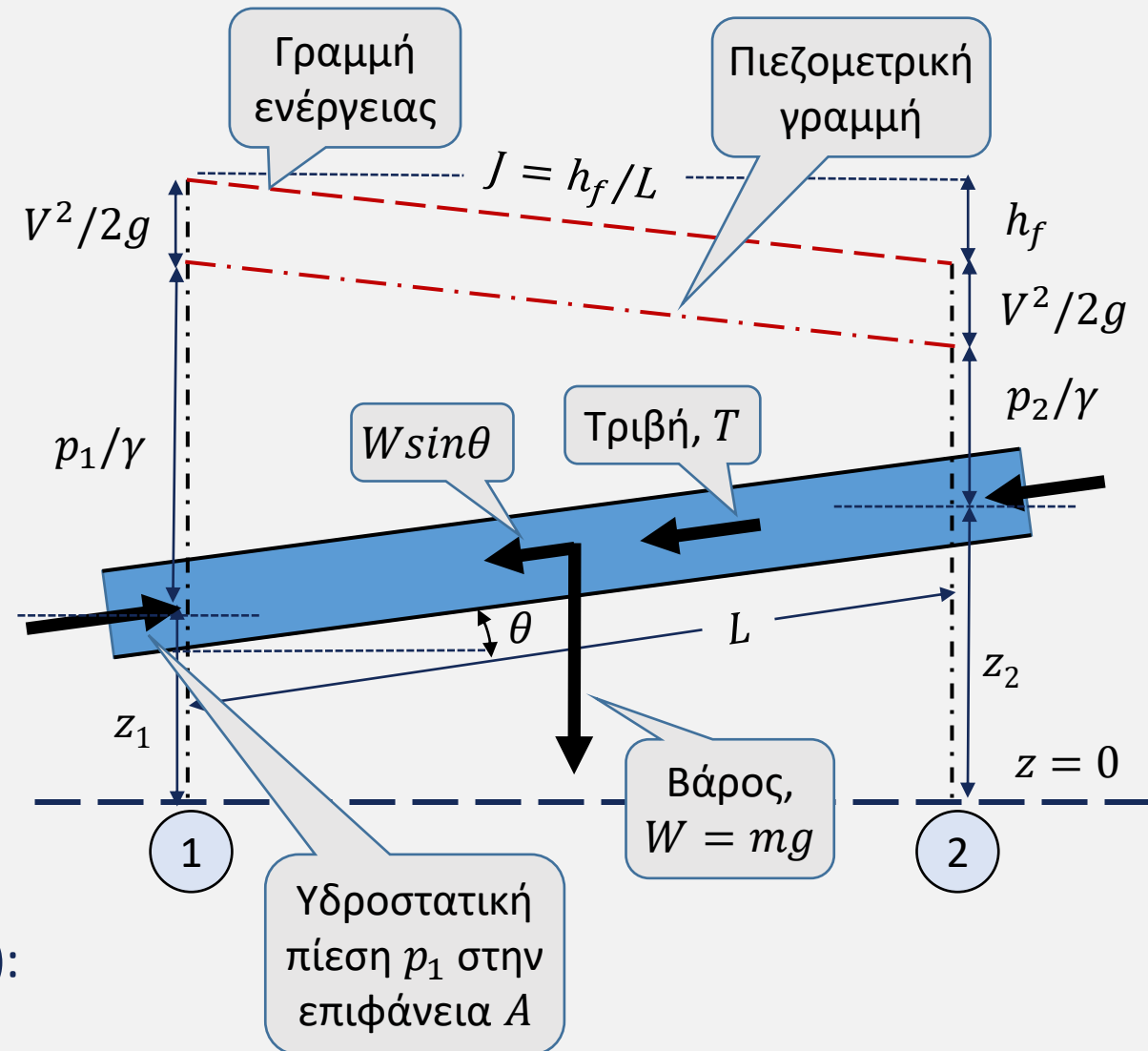
$$T = \tau P L$$

- Αντικαθιστώντας όπου $W = m g = \rho L A g = \gamma L A$ και $\sin\theta = (z_2 - z_1)/L$, προκύπτει:

$$(p_1 - p_2)/\gamma = z_2 - z_1 + \tau P L / (\gamma A)$$

- Θέτοντας $J = h_f/L$ και $R = A/P$ (υδραυλική ακτίνα):

$$\tau = \gamma R J$$



Γενικευμένη εξίσωση Chézy

- Μέσω **διαστατικής ανάλυσης** προκύπτει ότι η διατμητική τάση μπορεί να εκφραστεί και ως συνάρτηση της ταχύτητας (εξίσωση σύρσης, drag equation):

$$\tau = C_f \rho V^2 / 2$$

όπου C_f αδιάστατος συντελεστής τριβής.

- Αντικαθιστώντας τον όρο τ και επιλύοντας ως προς την υδραυλική κλίση J , προκύπτει η **γενικευμένη εξίσωση Chézy**, που ισχύει για κάθε τύπο ροής:

$$R J = C_f V^2 / 2g$$

- Αρχική **εμπειρική σχέση Chézy (1768)**:

$$V = C \sqrt{R J}$$

- Αργότερα διαπιστώθηκε ότι ο συντελεστής C έχει μικρή εξάρτηση από την **υδραυλική ακτίνα**, ήτοι $C \sim R^{1/6}$.

Παρατηρήσεις

- Από τη γενικευμένη εξίσωση Chézy προκύπτει ότι για δεδομένη διατομή A , όσο μεγαλώνει η υδραυλική ακτίνα R ή/και η κλίση J , τόσο μεγαλώνει η ταχύτητα V , άρα και η παροχή Q .
- Στη ροή υπό πίεση, ο κύκλος είναι το **υδραυλικά βέλτιστο** σχήμα αγωγού, γιατί για δεδομένο εμβαδό διατομής A έχει τη μικρότερη βρεχόμενη περίμετρο P και τη μεγαλύτερη υδραυλική ακτίνα R .
- Λόγω συμμετρίας, η κυκλική διατομή είναι επίσης **οικονομικά** και **στατικά** βέλτιστη.

Εξίσωση Darcy – Weisbach

- Εκφράζοντας τον συντελεστή τριβών της γενικευμένης εξίσωσης Chézy στη μορφή $f = 4 C_f$, προκύπτει η ισοδύναμη σχέση των Darcy & Weisbach (1858):

$$J = \frac{f}{4R} \frac{V^2}{2g}$$

- Η εξίσωση Darcy-Weisbach αποτελεί την πληρέστερη προσέγγιση, λόγω της διαστατικής ομογένειάς της και της γενικότητάς της για **οποιοδήποτε είδος ρευστού** και **οποιοσδήποτε συνθήκες ροής**.
- Ο συντελεστής τριβών f εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά του **ρευστού** (πυκνότητα, κινηματική συνεκτικότητα), της **ροής** (ταχύτητα) και του **αγωγού** (υδραυλική ακτίνα, ισοδύναμη τραχύτητα):

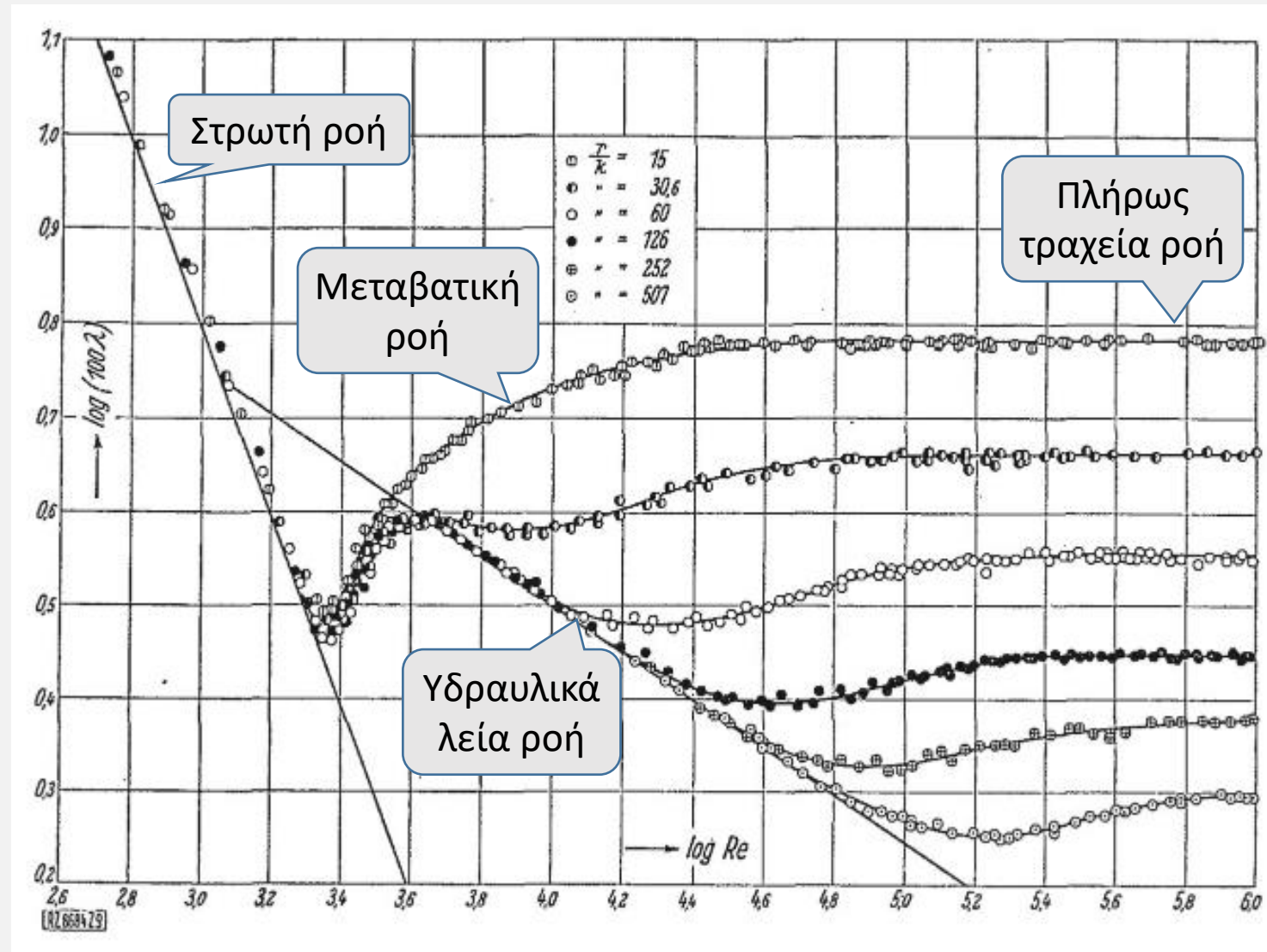
$$f = \mathcal{F}(\rho, \nu, V, R, k_s)$$

- Σε **κυκλικούς αγωγούς υπό πίεση**, διαμέτρου D (υδραυλική ακτίνα $R = D/4$), και θεωρώντας μόνιμη ομοιόμορφη ροή ($J = h_f/L$), προκύπτει:

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} = f \frac{8 L Q^2}{g \pi^2 D^5}$$

Εκτίμηση συντελεστή τριβής – Πείραμα Nikuradse (1933)

- Πειραματική σύλληψη: Επικόλληση κόκκων άμμου μεγέθους k_s στο εσωτερικό σωλήνων διαφορετικών διαμέτρων → διερεύνηση μεταβολής του συντελεστή απωλειών f για μεγάλο εύρος των Re και k_s/D .
- Προέκυψαν τρεις περιοχές ροής: (επαλήθευση από διαστατική ανάλυση)
 - υδραυλικά λεία, $f = \mathcal{F}(Re)$
 - μεταβατική, $f = \mathcal{F}(Re, k_s/D)$
 - πλήρως τραχεία, $f = \mathcal{F}(k_s/D)$
- Φυσική ερμηνεία:
 - k_s/D : τριβές στο στερεό όριο
 - Re : τριβές λόγω συνεκτικότητας



Αναλυτική εκτίμηση συντελεστή τριβής σε κυκλικούς αγωγούς

- Στρωτή ροή → θεωρητική σχέση:

$$f = 64/Re$$

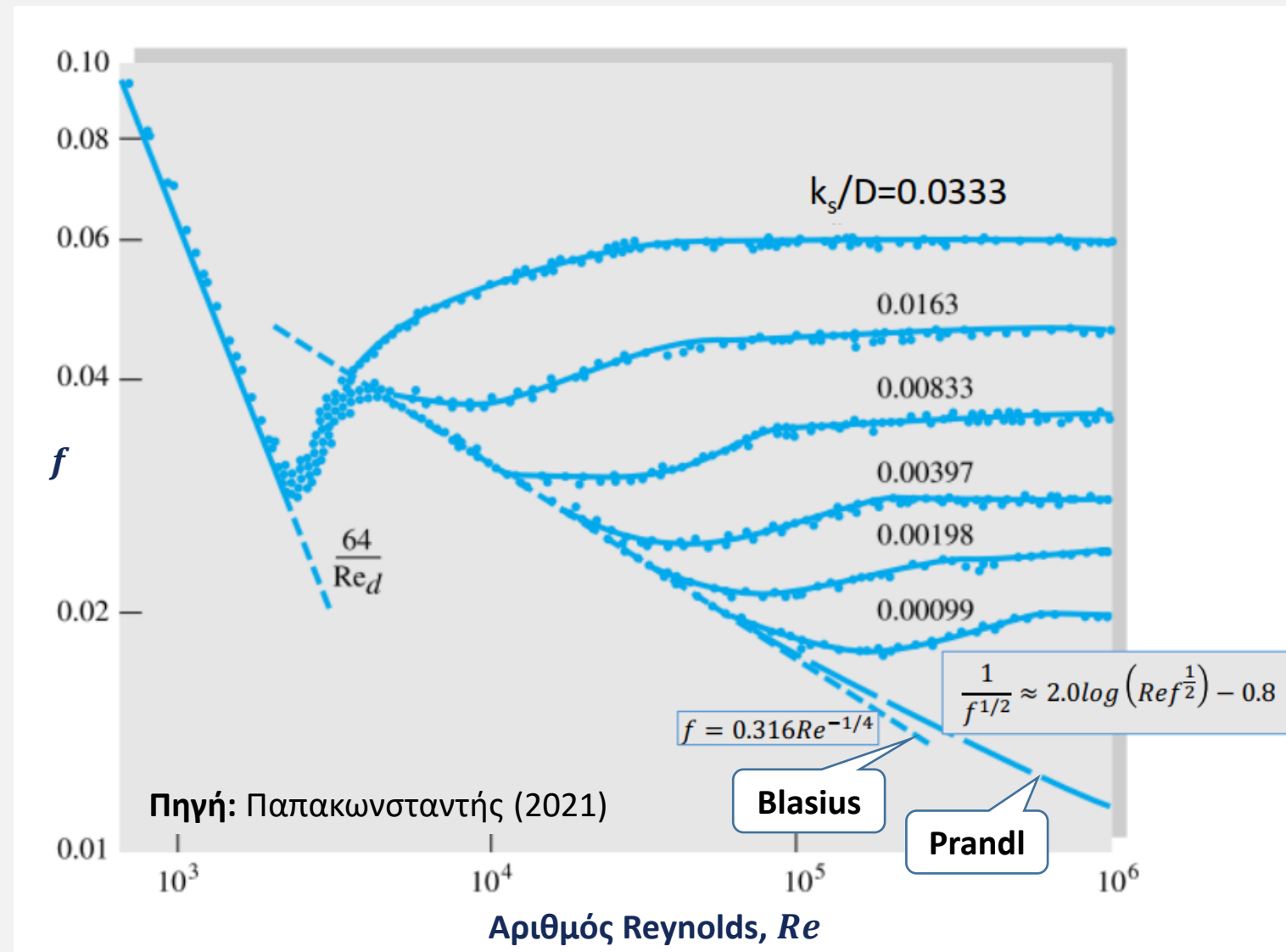
- Τυρβώδης ροή, λείοι αγωγοί → εμπειρικές σχέσεις Prandl και Blasius:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.0 \log(Re\sqrt{f}) - 0.8$$

$$f = 0.316 Re^{-1/4}$$

- Τυρβώδης ροή, τραχείς αγωγοί → εξίσωση των Colebrook & White (1939), για σωλήνες εμπορίου:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log\left(\frac{k_s/D}{3.71} + \frac{2.51}{Re\sqrt{f}}\right)$$



Προσεγγιστικές σχέσεις εκτίμησης συντελεστή f

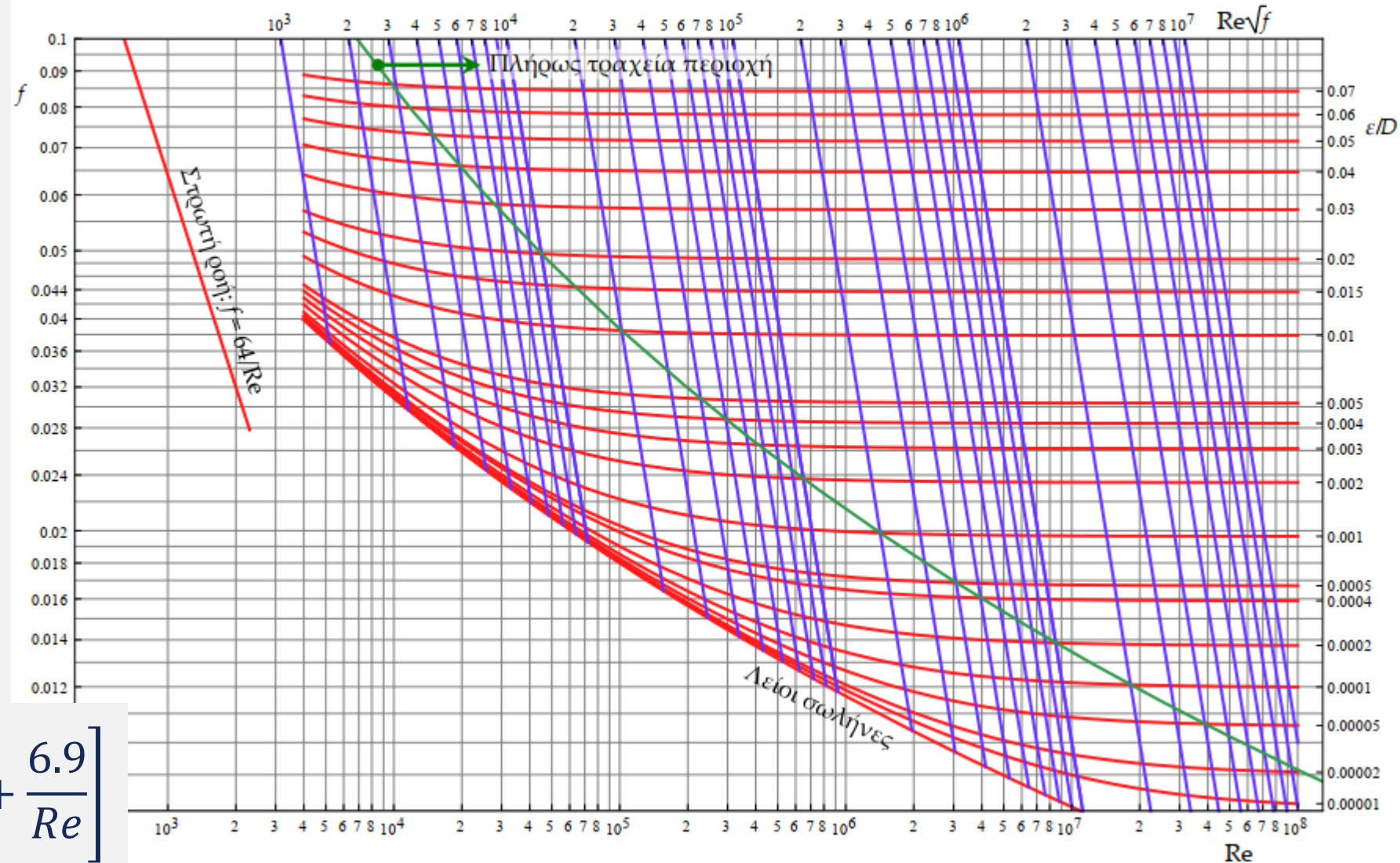
- Εξίσωση Colebrook-White πεπλεγμένη ως προς f .
- **Νομογράφημα Moody:** Συνδυάζει τα μεγέθη f , Re , k_s/D , $Re\sqrt{f}$

- **Swamee & Jain (1976):**

$$f = \frac{0.25}{\left[\log \left(\frac{0.27k_s}{D} + \frac{5.74}{Re^{0.9}} \right) \right]^2}$$

- **Haaland (1984):**

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1.8 \log \left[\left(\frac{k_s/D}{3.7} \right)^{1.11} + \frac{6.9}{Re} \right]$$



Παραγωγή γραφήματος Moody: Κουτσογιάννης & Παπαλεξίου (2017)

Μη κυκλικοί αγωγοί – Σχέση Manning

- Η εξίσωση **Darcy-Weisbach** ισχύει για στρωτή και τυρβώδη ροή σε αγωγούς σταθερής διατομής (πρισματικοί) κάθε μορφής (θέτοντας $D = 4R$), ενώ η εξίσωση **Colebrook-White** ισχύει μόνο για τυρβώδη ροή σε κυκλικούς αγωγούς υπό πίεση .
- Λόγω της ανάπτυξης **δευτερευουσών ροών σε μη κυκλικούς αγωγούς**, ο συντελεστής f επηρεάζεται και από το **σχήμα της διατομής**, το οποίο δεν περιγράφεται από τη σχέση Colebrook-White.
- Για αγωγούς κάθε άλλης διατομής πλην της κυκλικής και για κάθε τύπο ροής (υπό πίεση ή με ελεύθερη επιφάνεια) εφαρμόζεται η **γενικευμένη εξίσωση Chézy** (πρόβλημα: εκτίμηση συντελεστή C_f).
- Θέτοντας $C_f = 2g n^2 / R^{1/3}$ προκύπτει η σχέση του **Manning** (1889), που κυρίως εφαρμόζεται σε αγωγούς **ελεύθερης επιφάνειας**:

$$V = \frac{1}{n} R^{2/3} J^{1/2}$$

- Ο συντελεστής n [$s \text{ m}^{-1/3}$] συνδέεται με τον αδιάστατο συντελεστή f με τη σχέση $n = (f/8g)^{1/2} R^{1/6}$.
- Για πλήρως τυρβώδη ροή στην περιοχή $Re > 50\,000$ και για σχετική τραχύτητα $k_s/4R$ στην περιοχή από 0.001 μέχρι 0.1, ισχύει $n \approx k_s^{1/6} / 26$ (σχέση Müller).

Απλοποιημένες σχέσεις εκτίμησης γραμμικών ενεργειακών απωλειών σε κυκλικούς αγωγούς – Γενικευμένη σχέση Manning

- Σχέση Hazen-Williams (δεν συστήνεται):

$$V = 0.85 C R^{0.63} J^{0.54}$$

- Γενικευμένη σχέση Manning:

$$V = \frac{1}{N} R^{(1+\beta)/2} J^{(1+\gamma)/2}$$

- Σχέσεις ανάμεσα στην υδραυλική κλίση J , την παροχή Q και τη διάμετρο D :

$$J = \left(\frac{4^{3+\beta} N^2 Q^2}{\pi^2 D^{5+\beta}} \right)^{1/(1+\gamma)}, \quad Q = \frac{\pi}{2^{3+\beta} N} D^{(5+\beta)/2} J^{(1+\gamma)/2}, \quad D = \left(\frac{4^{3+\beta} N^2 Q^2}{\pi^2 J^{1+\gamma}} \right)^{1/(5+\beta)}$$

- Για δεδομένη τραχύτητα αγωγού, οι τιμές των συντελεστών β , γ και N προκύπτουν από βελτιστοποίηση, ενώ οι βέλτιστες τιμές εξαρτώνται από το εύρος διακύμανσης της διαμέτρου D και της ταχύτητας V .
- Για το **σύνηθες εύρος διαμέτρων και ταχυτήτων** των αστικών υδραυλικών έργων, ήτοι $0.1 \text{ m} \leq D \leq 1 \text{ m}$ και $0.2 \text{ m/s} \leq V \leq 2 \text{ m/s}$, ισχύει $\beta = 0.310$, $\gamma = 0.0133$ και $N = 0.012$, για $k_s = 1.0 \text{ mm}$ (τυπική τιμή σχεδιασμού), και $\beta = 0.302$, $\gamma = 0.059$ και $N = 0.0086$, για $k_s = 0.1 \text{ mm}$.

Θεωρητικό υπόβαθρο και λεπτομέρειες αλγορίθμου: Koutsoyiannis, D., A power-law approximation of the turbulent flow friction factor useful for the design and simulation of urban water networks, *Urban Water Journal*, 5(2), 117-115, 2008.

Τυπικά προβλήματα υδραυλικής κυκλικών αγωγών υπό πίεση

- Γενικά δεδομένα εισόδου σε πρισματικό αγωγό (σταθερή διατομή):
 - Μήκος αγωγού, L (για δεδομένη χάραξη)
 - Ισοδύναμη τραχύτητα, k_s (εμπειρική εκτίμηση, με βάση το υλικό και την ηλικία του αγωγού, την ανάπτυξη διάβρωσης, την ύπαρξη επικαθήσεων φερτών, κτλ.)
 - Κινηματική συνεκτικότητα νερού: $\nu = 1.1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ (για τυπική θερμοκρασία 16°C)
 - Χαρακτηριστικά μεγέθη προβλήματος (δύο εκ των τριών θα πρέπει να είναι γνωστά):
 - Ενεργειακές απώλειες, ΔH (διαθέσιμες, π.χ. από την τοπογραφία, ή επιθυμητές)
 - Παροχή, Q (πραγματική, π.χ. από μέτρηση, ή υποθετική, π.χ., παροχή σχεδιασμού)
 - Διάμετρος αγωγού (ακριβέστερα: εσωτερική διάμετρος D , που ορίζει την υγρή διατομή)
 - Τυπικό πρόβλημα 1: υπολογισμός απωλειών ΔH (Q, D : γνωστά)
 - Τυπικό πρόβλημα 2: υπολογισμός παροχής Q ($\Delta H, D$: γνωστά)
 - Τυπικό πρόβλημα 3: υπολογισμός διαμέτρου D ($\Delta H, Q$: γνωστά)
- Ακριβείς εκτιμήσεις, με χρήση των σχέσεων Darcy-Weisbach και Colebrook-White
- Απλοποίηση προβλημάτων: γραμμικές απώλειες, h_f , αντί για ολικές, ΔH

1^ο τυπικό πρόβλημα: Ενεργειακές απώλειες

- Δεδομένα: L, k_s, ν, Q, D
- Υπολογιστική διαδικασία για γραμμικές απώλειες:
 1. Υπολογίζουμε την ταχύτητα: $V = 4Q/\pi D^2$
 2. Υπολογίζουμε τον αριθμό Reynolds: $Re = VD/\nu$
 3. Υπολογίζουμε τη σχετική τραχύτητα: k_s/D
 4. Εκτιμούμε τον συντελεστή τριβών: $f(k_s/D, Re)$
 5. Υπολογίζουμε τις γραμμικές απώλειες:

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

- Πρακτικές εφαρμογές:
 - Χάραξη γραμμής ενέργειας (υδραυλική μηκοτομή)
 - Έλεγχος πιέσεων κατά μήκος του αγωγού
- Συνολικές απώλειες: προσθήκη τοπικών απωλειών

Επαναληπτική διαδικασία εκτίμησης του f :

- Διατύπωση της πεπλεγμένης εξίσωσης Colebrook-White στην αναδρομική μορφή:

$$\frac{1}{\sqrt{f^{[i+1]}}} = -2.0 \log \left(\frac{k_s/D}{3.71} + \frac{2.51}{Re \sqrt{f^{[i]}}} \right)$$

- Τυπική αρχική τιμή: $f^{[0]} = 0.020$
- Έλεγχος σύγκλισης: $f^{[i+1]} \approx f^{[i]}$
- Ταχεία σύγκλιση (συνήθως 3-4 δοκιμές)
- Προσεγγιστικές εκτιμήσεις:
 - Εμπειρικές σχέσεις Swamee-Jain ή Haaland (αναλυτική λύση)
 - Διάγραμμα Moody (γραφική εκτίμηση)

2^ο τυπικό πρόβλημα: Παροχή (ή ταχύτητα)

□ **Δεδομένα:** L, k_s, ν, h_f, D

□ **Υπολογιστική διαδικασία** (γραμμικές απώλειες → αναλυτική λύση):

1. Επιλύουμε την εξίσωση Darcy-Weisbach ως προς την ταχύτητα, την οποία αντικαθιστούμε στη σχέση του αριθμού Reynolds:

$$V = \left(\frac{2gh_f D}{L} \right)^{1/2} \frac{1}{f^{1/2}} \Rightarrow Re = \frac{VD}{\nu} = \left(\frac{2gh_f}{L} \right)^{1/2} \frac{D^{3/2}}{\nu} \frac{1}{f^{1/2}}$$

2. Υπολογίζουμε την ποσότητα:

$$Re f^{1/2} = \left(\frac{2gh_f}{L} \right)^{1/2} \frac{D^{3/2}}{\nu}$$

3. Αντικαθιστούμε τον όρο $Re f^{1/2}$ στο δεξί μέλος της εξίσωσης Colebrook-White και υπολογίζουμε τον συντελεστή τριβών f .
4. Υπολογίζουμε την ταχύτητα, V , και στη συνέχεια την παροχή.

Παρατηρήσεις

- Αν είναι γνωστές οι **ολικές απώλειες, ΔH** , το πρόβλημα δεν έχει αναλυτική λύση και απαιτούνται δοκιμές.
- Η παροχή που μπορεί να διέλθει μέσω ενός αγωγού, για δεδομένο ύψος απωλειών αποτελεί ένα άνω όριο, που καλείται **παροχεταιυτικότητα**.
- Μικρότερες παροχές μπορούν να διοχετευτούν στον αγωγό μέσω συσκευών **ελέγχου της ροής** (δικλίδες).

3^ο τυπικό πρόβλημα: Διάμετρος

□ **Δεδομένα:** L, k_s, ν, h_f, Q

□ **Υπολογιστική διαδικασία** (επαναληπτική, με δοκιμές του συντελεστή τριβών f):

1. Έστω $f^{[i]}$ η τρέχουσα εκτίμηση του συντελεστή τριβών (τυπική αρχική τιμή $f^{[0]} = 0.020$):
2. Επιλύουμε την εξίσωση Darcy-Weisbach ως προς τη διάμετρο:

$$D^{[i]} = \left(f^{[i]} \frac{1}{h_f} \frac{8LQ^2}{\pi^2 g} \right)^{1/5}$$

3. Εκτιμούμε την ταχύτητα και τον αριθμό Reynolds συναρτήσει του $D^{[i]}$:

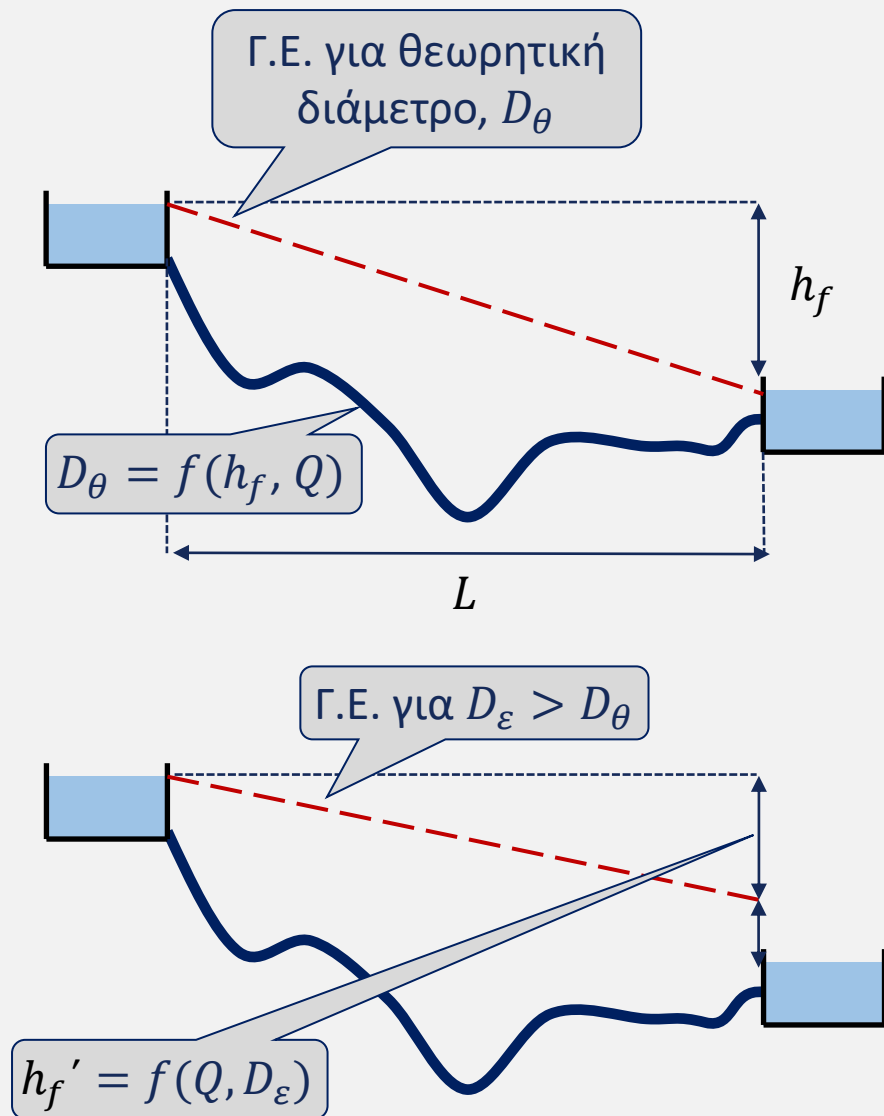
$$V^{[i]} = \frac{4Q}{\pi D^{[i]2}} \Rightarrow Re^{[i]} = \frac{V^{[i]} D^{[i]}}{\nu}$$

4. Υπολογίζουμε μια νέα τιμή f , μέσω της σχέσης Colebrook-White, μέχρι να επέλθει σύγκλιση:

$$\frac{1}{\sqrt{f^{[i+1]}}} = -2.0 \log \left(\frac{k_s/D^{[i]}}{3.71} + \frac{2.51}{Re^{[i]} \sqrt{f^{[i]}}} \right)$$

Παρατηρήσεις για το 3^ο τυπικό πρόβλημα

- Η εκτίμηση της απαιτούμενης διαμέτρου προκειμένου να διοχετεύεται μια δεδομένη παροχή για ενεργειακές απώλειες αφορά στο πρόβλημα **διαστασιολόγησης αγωγών**, το οποίο αποτελεί τμήμα της ευρύτερης διαδικασίας σχεδιασμού συστημάτων υδραυλικών έργων (γενική διάταξη, χάραξη σε οριζοντιογραφία και μηκοτομή, επιλογή υλικών και διαστάσεων, τοποθέτηση ειδικών συσκευών, έλεγχοι πιέσεων και ταχυτήτων).
- Η επίλυση του 3^{ου} τυπικού προβλήματος καταλήγει σε μια **θεωρητική διάμετρο D_θ** , που δεν μπορεί να υλοποιηθεί (στην πράξη εφαρμόζονται τυποποιημένες **διάμετροι εμπορίου**).
- Στον σχεδιασμό επιλέγεται η **αμέσως μεγαλύτερη διαθέσιμη διάμετρος εμπορίου D_ε** , σε σχέση με τη θεωρητική. Για τη διάμετρο αυτή, υπολογίζονται εκ νέου οι υδραυλικές απώλειες ή/και η παροχетеυτικότητα, με επίλυση του 1^{ου} και 2^{ου} τυπικού προβλήματος, αντίστοιχα.



Τοπικές απώλειες: Βασικές έννοιες

- Εκτός από τις γραμμικές απώλειες, που οφείλονται στις τριβές, κατά μήκος της ροής εμφανίζονται και **τοπικές απώλειες** (local/minor losses, h_L), σε όλες τις θέσεις γεωμετρικών μεταβολών (αναφέρονται και ως *δευτερεύουσες απώλειες* ή *απώλειες σχήματος*).
- **Γεωμετρικές μεταβολές, απότομες ή βαθμιαίες:**
 - Έξοδος/είσοδος αγωγού από/σε δεξαμενή
 - Αποκλίνουσα ή συγκλίνουσα ροή (διαστολή, συστολή)
 - Αλλαγή κατεύθυνσης της ροής (στροφές, γωνίες)
 - Συμβολές και διακλαδώσεις αγωγών (δίκτυα αγωγών)
 - Ειδικά τεμάχια (καμπύλες, ταυ, συναρμογές, κλπ.)
 - Ειδικές συσκευές ελέγχου ροής και πίεσης (δικλείδες, βαλβίδες, μειωτές πίεσης)
- Οι γεωμετρικές μεταβολές προκαλούν στροβίλους (**αποκόλληση ροής**), με αποτέλεσμα την αύξηση της έντασης της **τύρβης**, συνεπώς οι τοπικές απώλειες οφείλονται στην παραγωγή τύρβης (η κινητική ενέργεια του ρευστού μετατρέπεται σε θερμότητα λόγω συνεκτικότητας) και όχι σε τριβές.

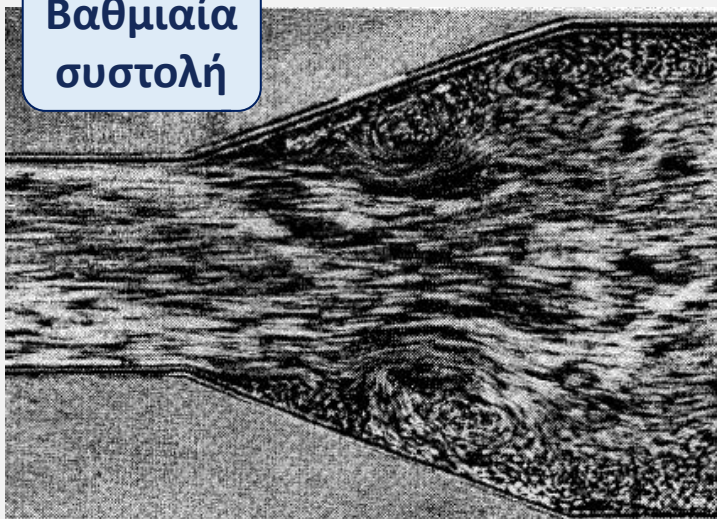
Τυπικές τοπικές απώλειες

Επίδραση γεωμετρικών μεταβολών στο πεδίο ροής

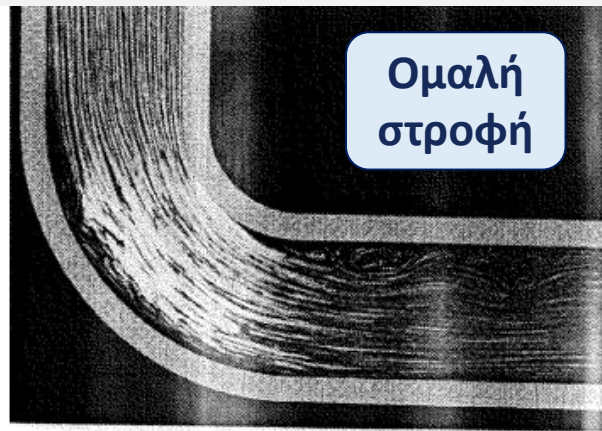
Απότομη
συστολή



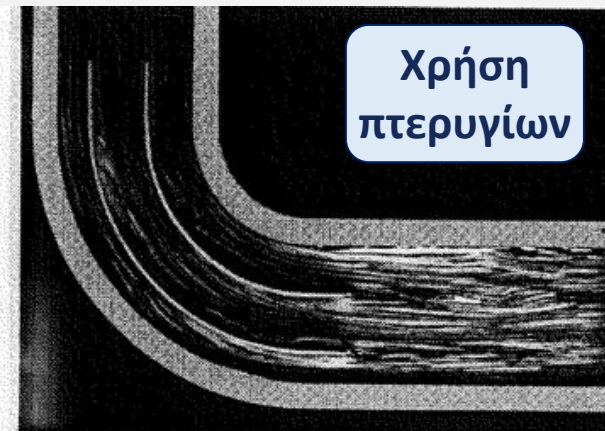
Βαθμιαία
συστολή



Ομαλή
στροφή



Χρήση
πτερυγίων



Figs. 108 and 109. Flow through a turning passage with and without guide vanes (water, velocity = 10 cm/s, passage width = 20 mm, $Re = 2 \times 10^3$, surface tracer method).

Απότομη
στροφή



Χρήση
πτερυγίων



Τοπικές απώλειες: Υδραυλικοί υπολογισμοί

- Επειδή οι τοπικές απώλειες πραγματοποιούνται σε σχετικά μικρά μήκη, για απλούστευση θεωρείται ότι προκαλούν σημειακή πτώση της γραμμής ενέργειας κατά:

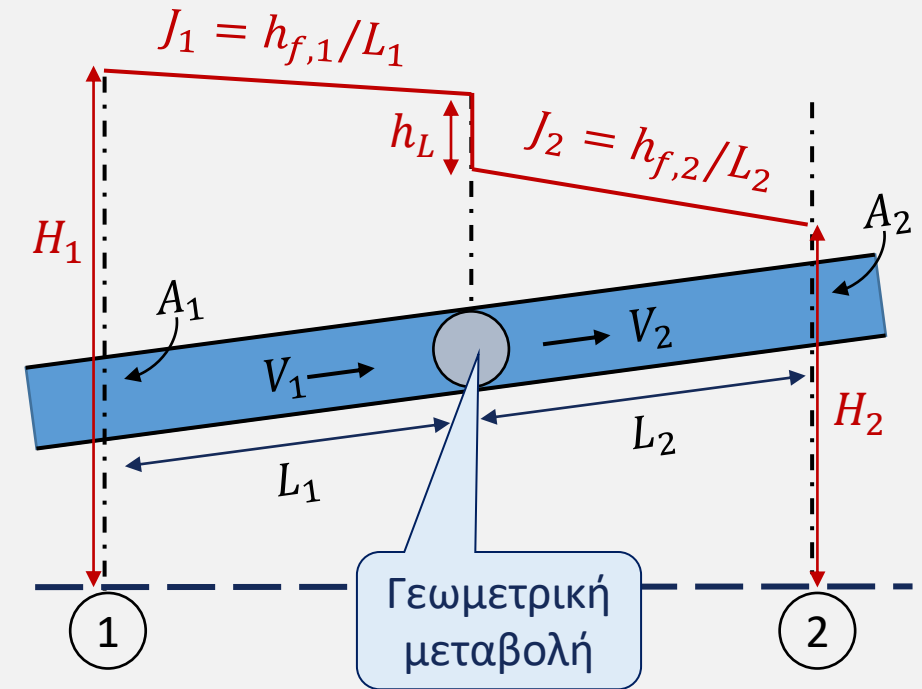
$$h_L = K V^2 / 2g$$

όπου K συντελεστής τοπικών απωλειών και V η **μεγαλύτερη ταχύτητα από τις εκατέρωθεν ροές**.

- Στην τυρβώδη ροή, ο συντελεστής K εξαρτάται μόνο από τη γεωμετρία του συστήματος, ενώ στη στρωτή εξαρτάται και από τον αριθμό Re .

- Οι **συνολικές απώλειες ενέργειας** σε έναν αγωγό δίνονται από τη σχέση:

$$\Delta H = \sum_i h_{f,i} + \sum_j h_{L,j} = \sum_i f_i \frac{L_i}{D_i} \frac{V_i^2}{2g} + \sum_j K_j \frac{V_j^2}{2g}$$



Ο συντελεστής K αυξάνει:

- με το μέγεθος των στροβίλων (στις διαστολές οι τοπικές απώλειες είναι υψηλότερες σε σχέση με τις συστολές)
- όσο πιο απότομη είναι η μεταβολή

Απότομη διαστολή (αποκλίνουσα ροή)

□ Γενική διάταξη και παραδοχές:

- Μετάβαση από τη A_1 , στη διατομή $A_2 > A_1$
- Μικρό μήκος \rightarrow αμελούνται οι απώλειες τριβών ($F_\tau = 0$)
- Οριζόντιο τμήμα ($z_1 = z_2$) $\rightarrow F_g = 0$ (συνιστώσα βάρους)

□ Εξίσωση συνέχειας: $A_1 V_1 = A_2 V_2 = Q$

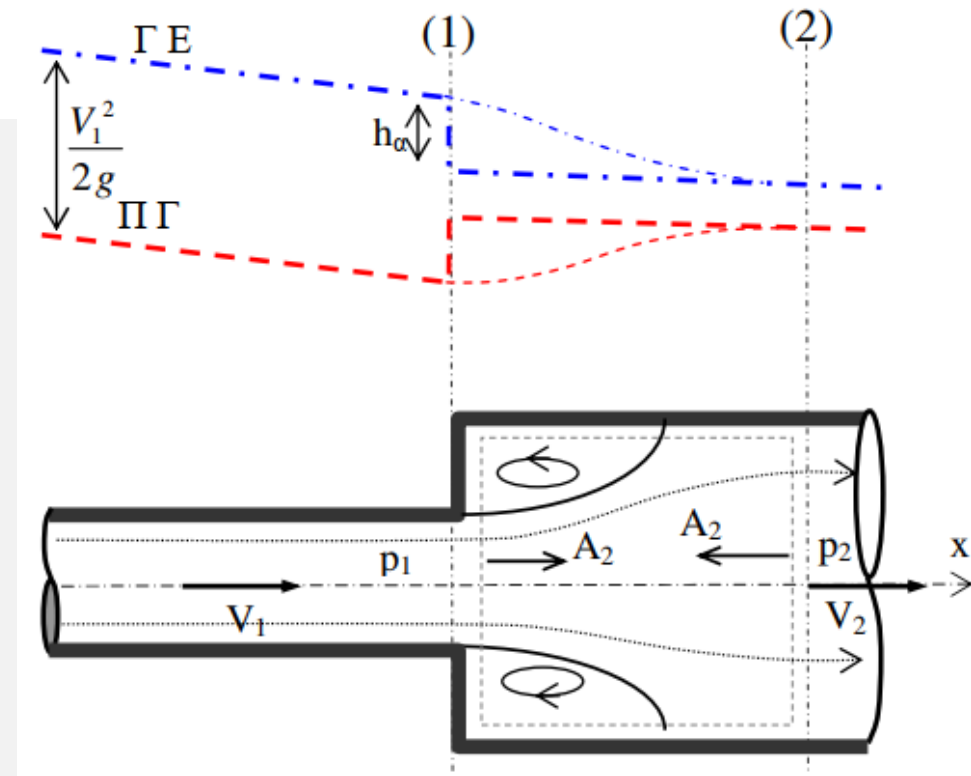
□ Εξίσωση διατήρησης ορμής:

$$\Sigma F = F_\tau + F_g + F_p \Rightarrow p_1 A_1 - p_2 A_2 = \rho Q (V_2 - V_1)$$

□ Εξίσωση ενέργειας:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + h_f + h_L \Rightarrow$$

$$h_L = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} + \frac{V_1^2 - V_2^2}{2g} = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g} = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \frac{V_1^2}{2g} \Rightarrow K = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2$$



Σημείωση: Η απότομη διαστολή είναι η μόνη περίπτωση που μπορεί να γίνει θεωρητική εκτίμηση του K .

Απότομη διαστολή: Κυκλικές διατομές & είσοδος σε δεξαμενή

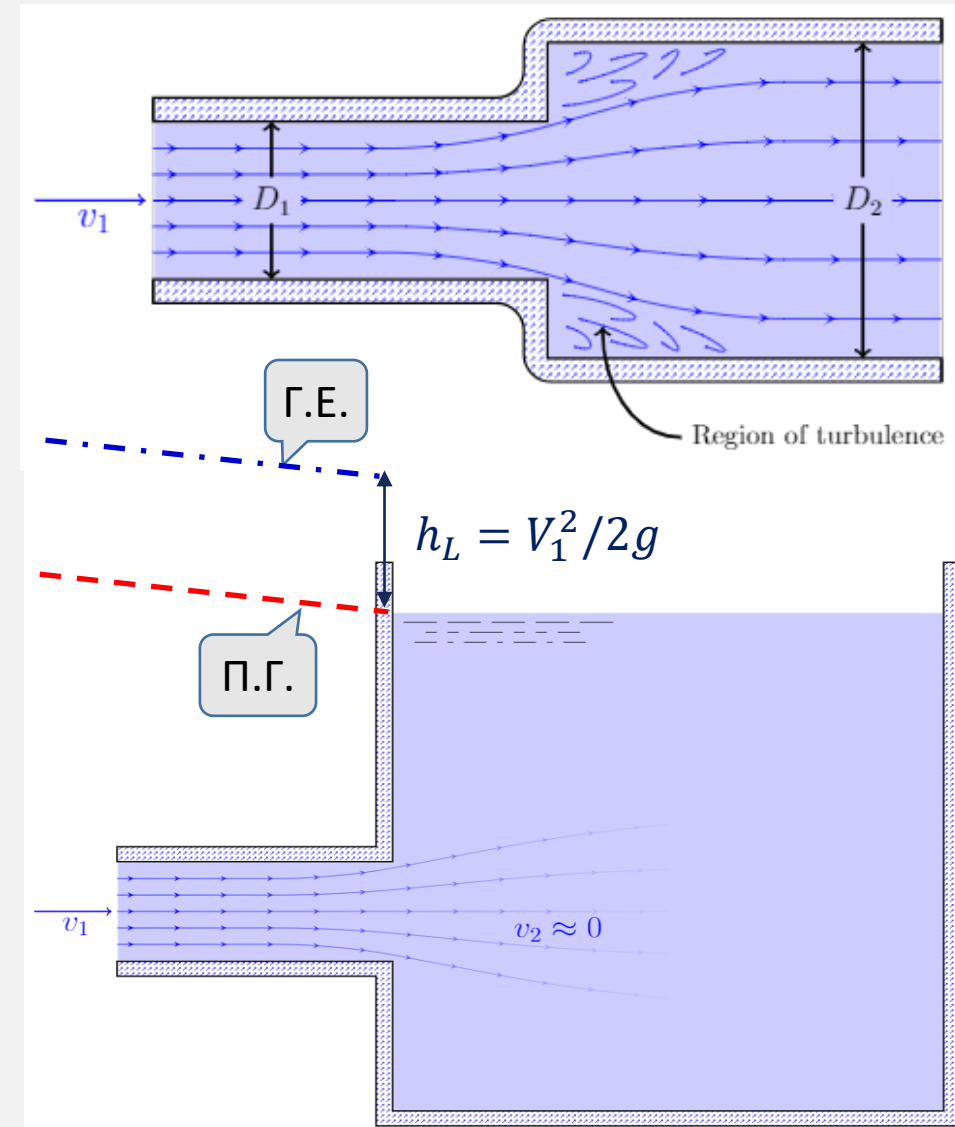
- Κυκλικές διατομές: Απότομη μετάβαση από αγωγό διαμέτρου D_1 σε μεγαλύτερη διάμετρο $D_2 > D_1$:

$$K = \left[1 - \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 \right]^2$$

- Είσοδος σε δεξαμενή: Ειδική μορφή διαστολής, όπου όλη η κινητική ενέργεια καταστρέφεται λόγω τυρβώδους ανάμιξης του νερού του αγωγού με αυτό της δεξαμενής, το οποίο τελικά ηρεμεί \rightarrow όλη η κινητική ενέργεια στην είσοδο μετατρέπεται σε τοπικές απώλειες:

$$h_L = V_1^2 / 2g$$

- Ισχύουν: $V_2 \approx 0, A_2 \gg A_1 \rightarrow K = 1$
- Στην τυρβώδη ροή, ο συντελεστής είναι μονάδα, ανεξαρτήτως της γεωμετρίας του έργου εισόδου (στρωτή ροή, $K = 2$).



Βαθμιαία διαστολή: Κωνικός διαχύτης

□ Επιβράδυνση ροής, με ελαχιστοποίηση των απωλειών ενέργειας, μέσω κατάλληλης διαμόρφωσης της **γωνίας συναρμογής θ** :

■ $\theta < 5^\circ$: Απώλειες λόγω τριβών

■ $5^\circ < \theta < 15^\circ$: Ελάχιστες απώλειες

■ $\theta = 7^\circ$: Βέλτιστη γωνία

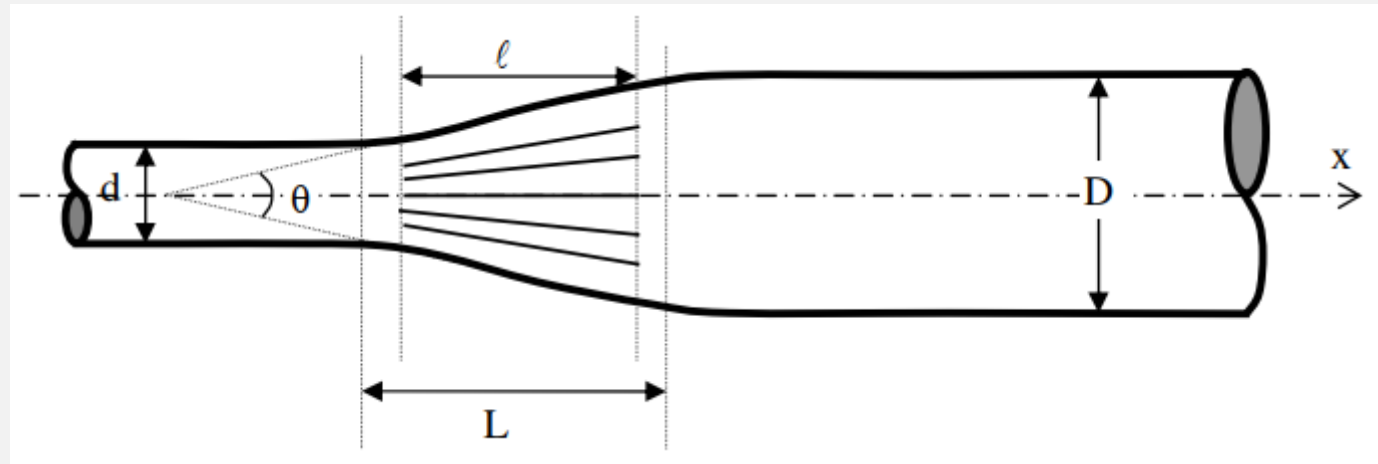
■ $\theta > 15^\circ$: Αποκόλληση ροής

□ Εμπειρική σχέση για $\theta < 45^\circ$:

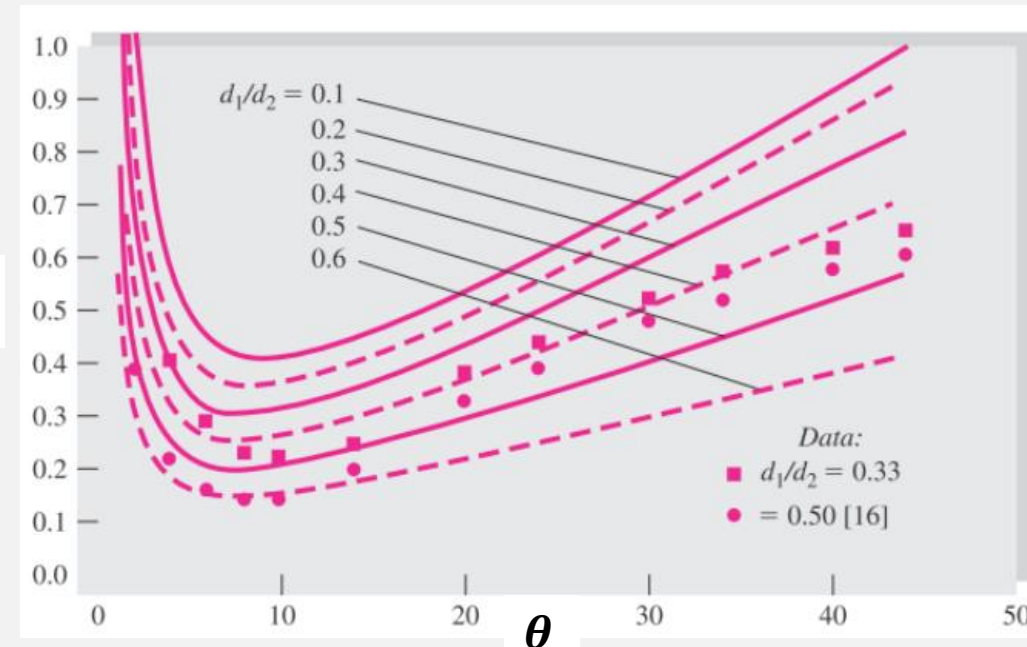
$$K = 2.61 \sin(\theta/2) [1 - (D_1/D_2)^2]^2$$

□ Για $\theta > 45^\circ$, εφαρμόζεται η θεωρητική σχέση της απότομης διαστολής.

□ Η χρήση **πτερυγίων** συμβάλλει στη μείωση της γωνίας θ . Το μήκος τους πρέπει να είναι μικρότερο από του διαχύτη.

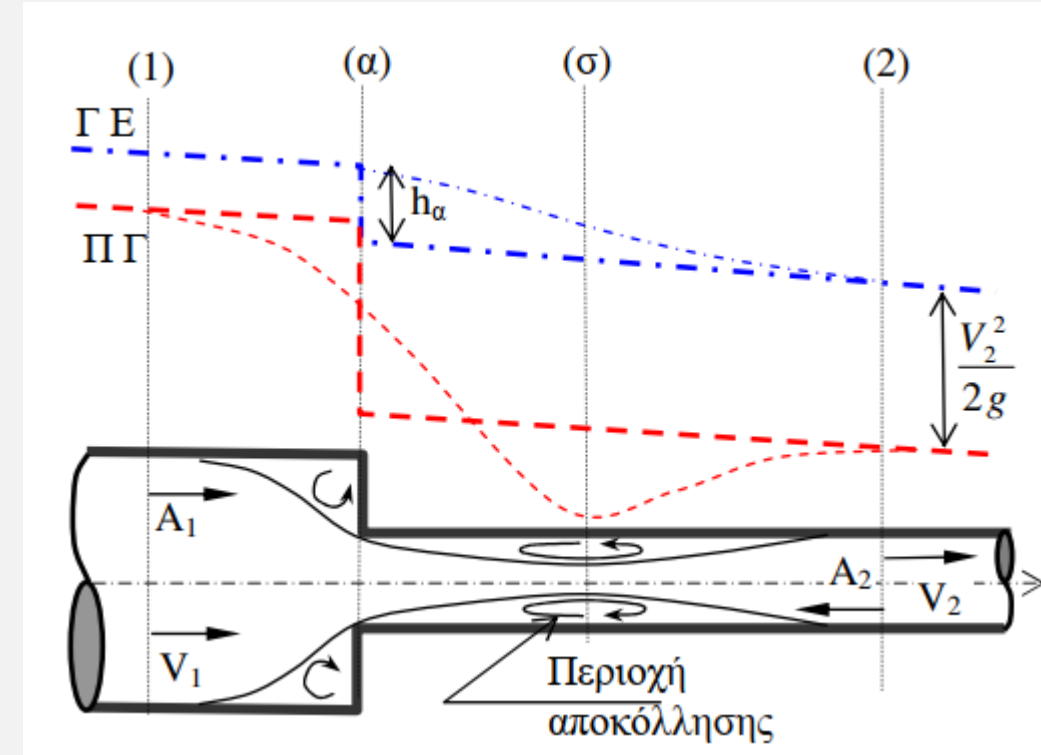


K



Απότομη συστολή (συγκλίνουσα ροή)

- ▣ **Απώλειες ενέργειας:** λόγω ανάπτυξης δευτερευουσών ροών, και λόγω παραγωγής τύρβης κατά την αποκόλληση της φλέβας κατάντη της διατομής συστολής (φαινόμενο «συνεσταλμένης διατομής», *vena contracta*).
- ▣ **Ανομοιόμορφη ροή μεταξύ των διατομών (1) και (2):**
 - Αποκόλληση στη διατομή συστολής (α)
 - Πλήρης συστολή στη διατομή (σ)
 - Συγκλίνουσα ροή από (1) έως (σ)
 - Αποκλίνουσα ροή από (σ) έως (2)



- ▣ **Εκτίμηση K από πειραματικά δεδομένα:**

| | | | | | |
|-----------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| D_2/D_1 | 0.00 | 0.10 | 0.20 | 0.30 | 0.40 |
| K | 0.50 | 0.45 | 0.42 | 0.39 | 0.36 |
| D_2/D_1 | 0.50 | 0.60 | 0.70 | 0.80 | 0.90 |
| K | 0.33 | 0.28 | 0.22 | 0.15 | 0.06 |

- ▣ Εμπειρική σχέση για $D_2/D_1 < 0.76$ (White, 1994):

$$K = 0.42 [1 - (D_2/D_1)^2]$$
- ▣ Για $D_2/D_1 > 0.76$, οι συντελεστές της απότομης συστολής και διαστολής σχεδόν ταυτίζονται.

Έξοδος νερού από δεξαμενή (υδροληψία) – Βαθμιαία συστολή

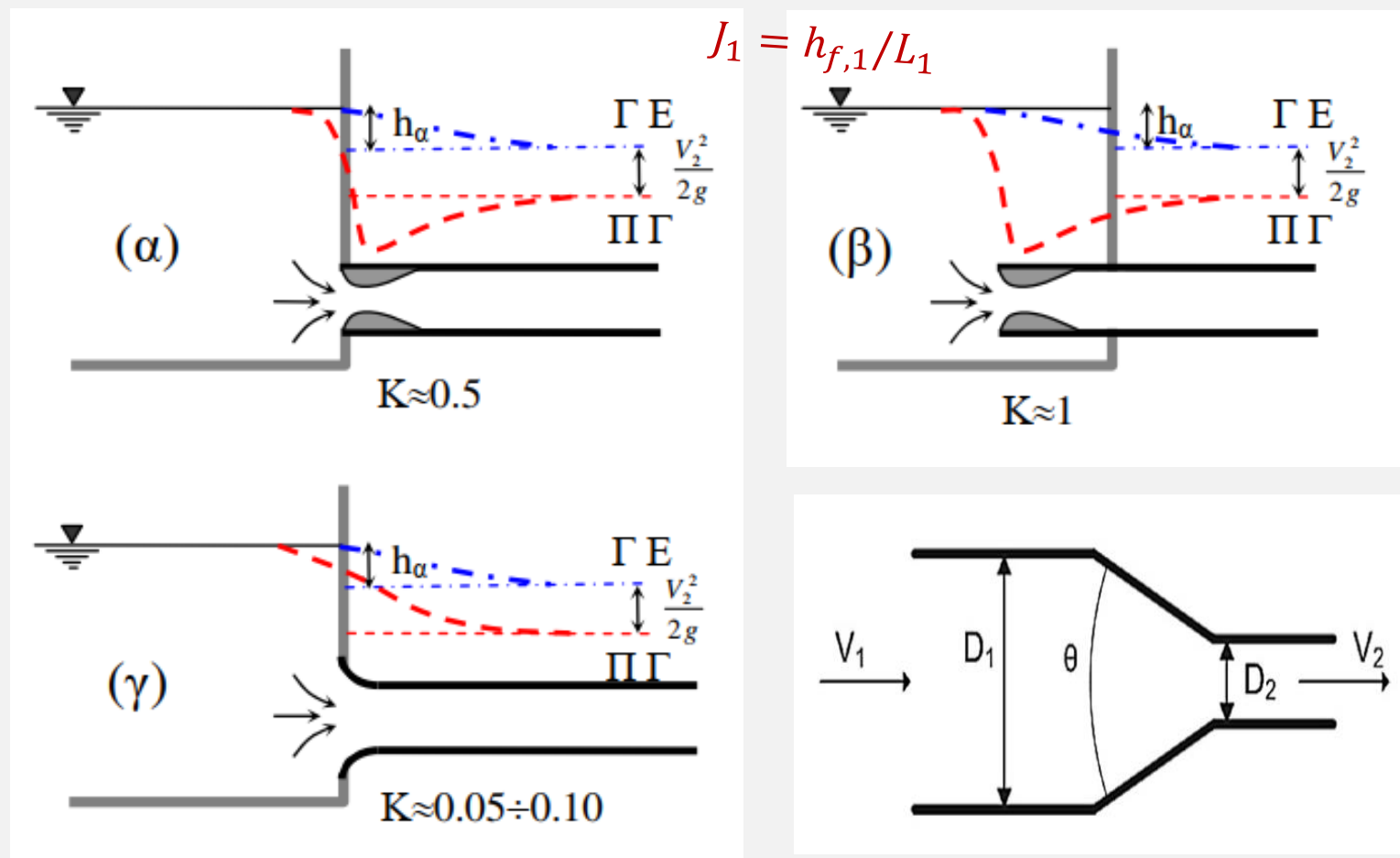
Μορφές υδροληψίας:

- Αγωγός με αιχμηρά χείλη $\rightarrow K \approx 0.50$, αφού $D_2/D_1 \approx 0$
- Αγωγός που εισέρχεται εντός της δεξαμενής $\rightarrow K \approx 1$
- Υδροληψία με στρογγυλεμένο στόμιο $\rightarrow K = 0.05 \div 0.10$ (εφαρμογή στην πράξη)

Βαθμιαία συστολή:

$$K = \alpha \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 \right]$$

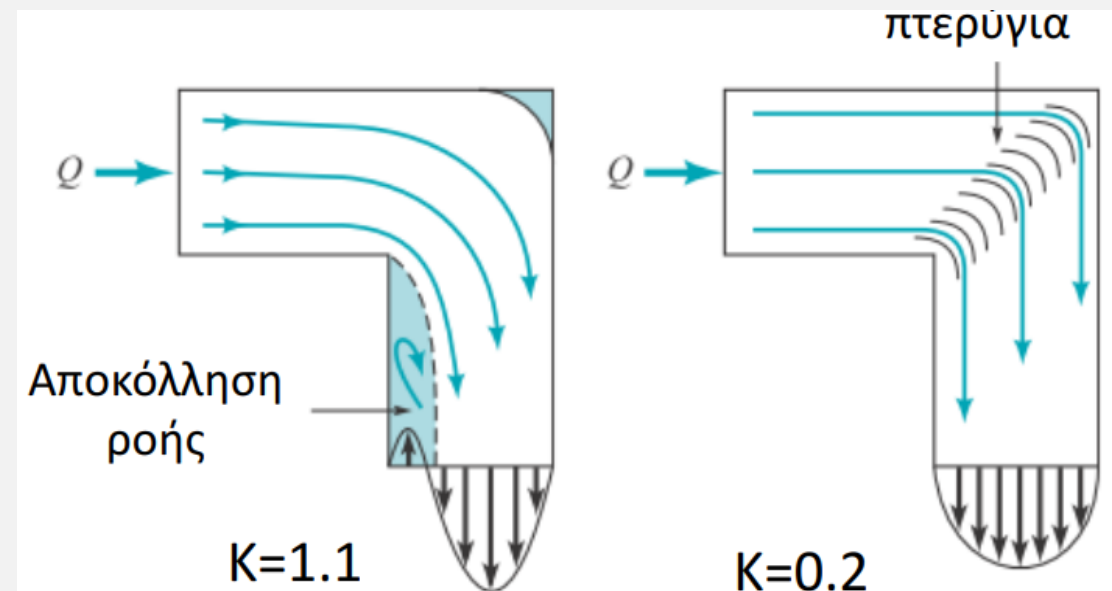
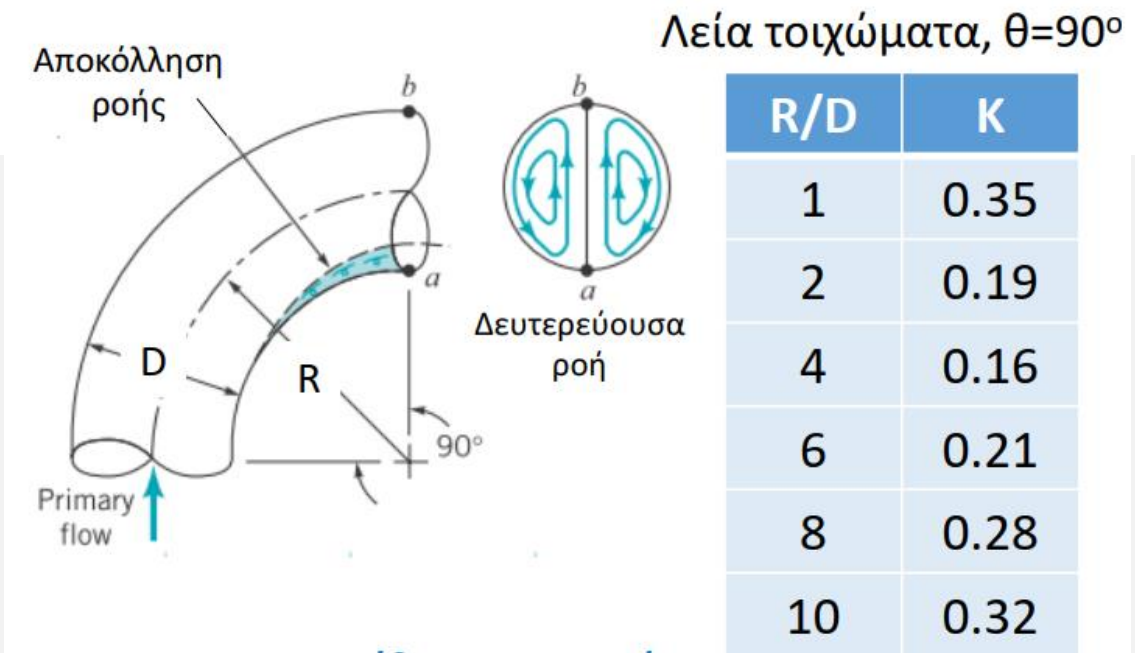
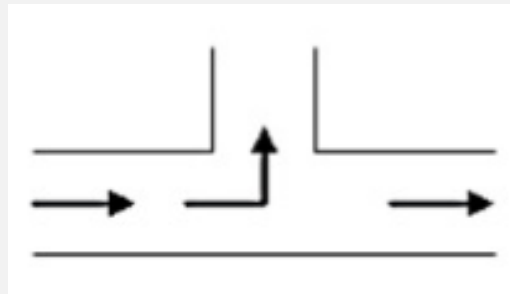
όπου $\alpha = 0.80$ για $\theta < 45^\circ$ και $\alpha = 0.50$ για $\theta > 45^\circ$



Βαθμιαία συστολή: Μικρές απώλειες, αναπτύσσεται μόνο ένα λεπτό οριακό στρώμα, χωρίς φαινόμενα αποκόλλησης της ροής

Αλλαγές κατεύθυνσης

- Χαρακτηριστικά ροής σε στροφή:** τριδιάστατη ροή, ελικοειδής κίνηση που συνεχίζεται μετά το πέρας της καμπύλης, αποκόλληση ροής στην εσωτερική παρειά, ανάπτυξη στροβιλώδους δευτερεύουσας ροής (λόγω κεντρομόλου επιτάχυνσης).
- Σε στροφές,** ο συντελεστής K εξαρτάται από τη γωνία θ και το λόγο της ακτίνας καμπυλότητας προς τη διάμετρο, R/D .
- Σημαντική μείωση του K** επιτυγχάνεται με την τοποθέτηση **καθοδηγητικών πτερυγίων**.
- Σε διακλαδώσεις** λαμβάνεται $K = 0.2 \div 1.7$, κατά την κύρια διεύθυνση της ροής, και $K = 1.0 \div 2.0$, κατά την κάθετη.

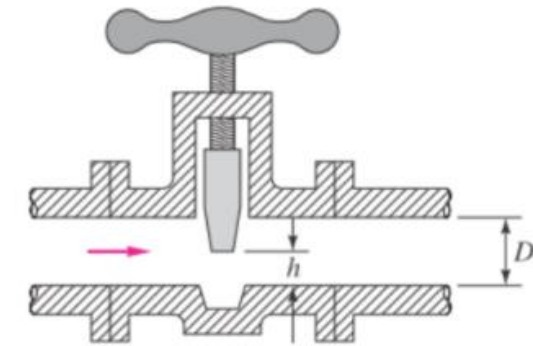


Συσκευές ελέγχου της ροής: Δικλίδες ή βάνες

- ❑ **Σχεδιασμός αγωγού:** Επιλογή επαρκούς διαμέτρου ώστε να μεταφέρεται η μέγιστη αναμενόμενη παροχή, για την δυσμενέστερη κατάσταση λειτουργίας του συστήματος ως το πέρας του χρόνου ζωής του.
- ❑ **Δυναμική λειτουργία αγωγού:** Ρύθμιση παροχής μέσω δικλίδας, προκαλώντας ελεγχόμενες τοπικές απώλειες (καταστροφή κινητικής ενέργειας):
 - **Πλήρως κλειστή:** $K \rightarrow \infty$, μηδενισμός παροχής, οριζόντια Γ.Ε.
 - **Μερικώς ανοιχτή:** Διοχετεύεται παροχή μικρότερη της μέγιστης, καθώς το διαθέσιμο ύψος τριβών (γραμμικές απώλειες) διαμορφώνεται σε:

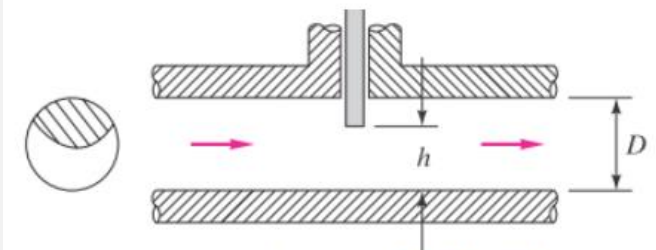
$$h_f = \Delta H - h_L = \Delta H - K V^2 / 2g$$

- **Πλήρως ανοικτή:** $K \rightarrow 0$, $h_f \approx \Delta H$ (μεγιστοποίηση παροχής)
- ❑ Η σχέση μεταβολής του K με το ποσοστό ανοίγματος της δικλίδας δίνεται από τον κατασκευαστή, και εξαρτάται επίσης από τον τύπο της δικλείδας και τον τρόπο σύνδεσής της στο σωλήνα (σπείρωμα, φλάντζα). Για πλήρως ανοιχτή δικλίδα, επιδιώκεται όσο το δυνατό μικρότερο K .



Συρταρωτή (gate)

$K=0.2$ (πλήρως ανοικτή)
 $K=0.3$ (1/4 κλειστή)
 $K=2.1$ (1/2 κλειστή)
 $K=17$ (3/4 κλειστή)



Σφαιρικές (ball)

$K=0.05$ (πλήρως ανοικτή)
 $K=5.5$ (1/3 κλειστή)

Πρακτικός χειρισμός τοπικών απωλειών

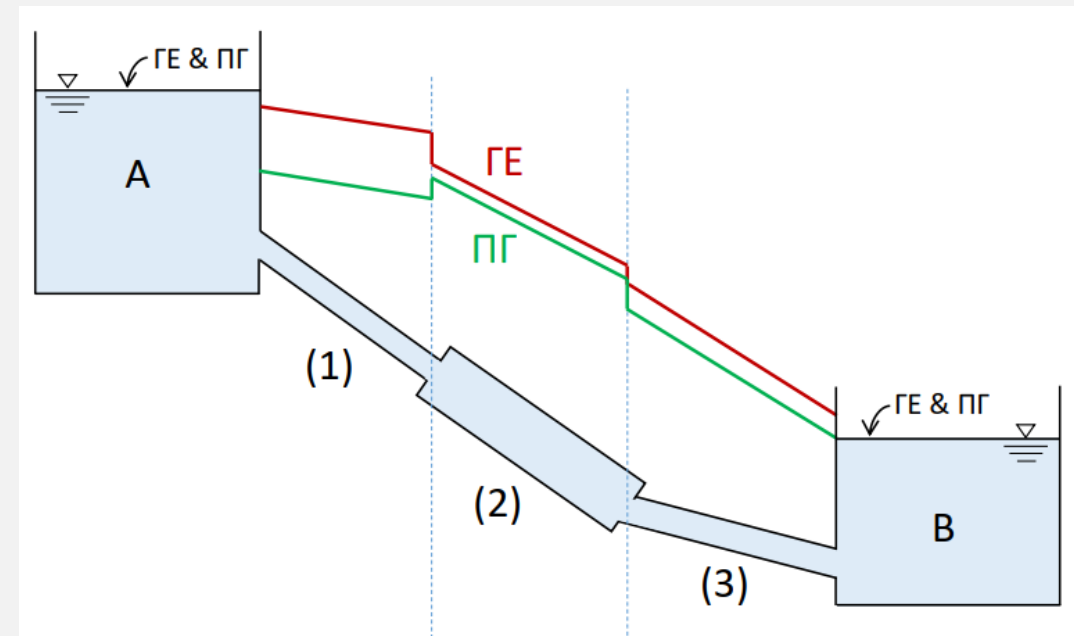
- ❑ Οι τοπικές απώλειες εισάγουν πολυπλοκότητα στους υδραυλικούς υπολογισμούς (2^ο και 3^ο πρόβλημα), αφού η ροή δεν καθορίζεται μόνο από την εξίσωση τριβών.
- ❑ Στις εφαρμογές της πράξης, οι **τυπικές τοπικές απώλειες**, που μεμονωμένα είναι αμελητέες (μικρά K), αλλά αθροιζόμενες γίνονται σημαντικές, αντιμετωπίζονται μακροσκοπικά, είτε με προσαύξηση του μήκους των αγωγών είτε (απλούστερα) με προσαύξηση του συντελεστή τραχύτητας.
- ❑ Ρητός υπολογισμός απαιτείται στις διατάξεις ελέγχου της ροής και πίεσης, και σε υδροενεργειακά συστήματα (π.χ. αγωγοί υδροηλεκτρικών έργων).

Η έννοια του **ισοδύναμου μήκους**:

- Ως ισοδύναμο μήκος L_e ενός ειδικού τεμαχίου αγωγού ορίζεται το μήκος ενός αγωγού ίδιας διαμέτρου D , που παράγει γραμμικές απώλειες ίσες με τις τοπικές:

$$h_f = h_L \Rightarrow f \frac{L_e V^2}{D 2g} = K \frac{V^2}{2g} \Rightarrow L_e = \frac{K D}{f}$$

- Πρακτικός κανόνας: Για $L > 1000 D$, $L_e \approx 0$, $h_L \approx 0$



Σύνθετα συστήματα: Αγωγοί σε σειρά

- Εξίσωση συνέχειας για n αγωγούς σε σειρά:

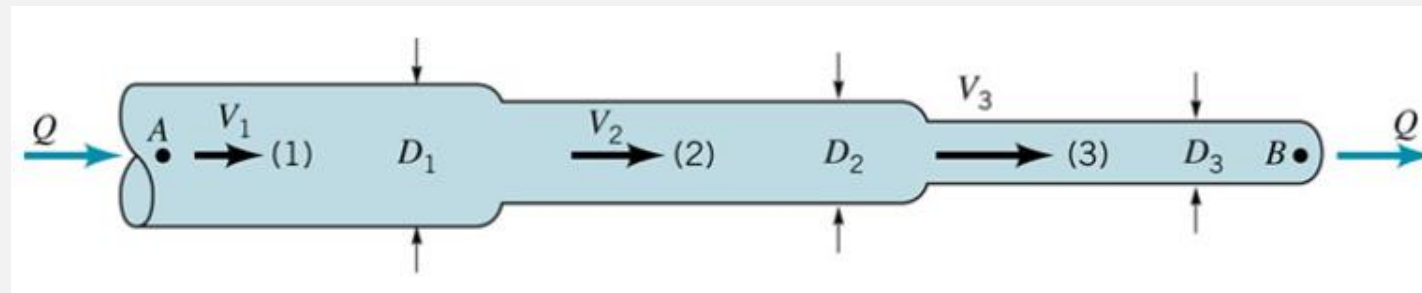
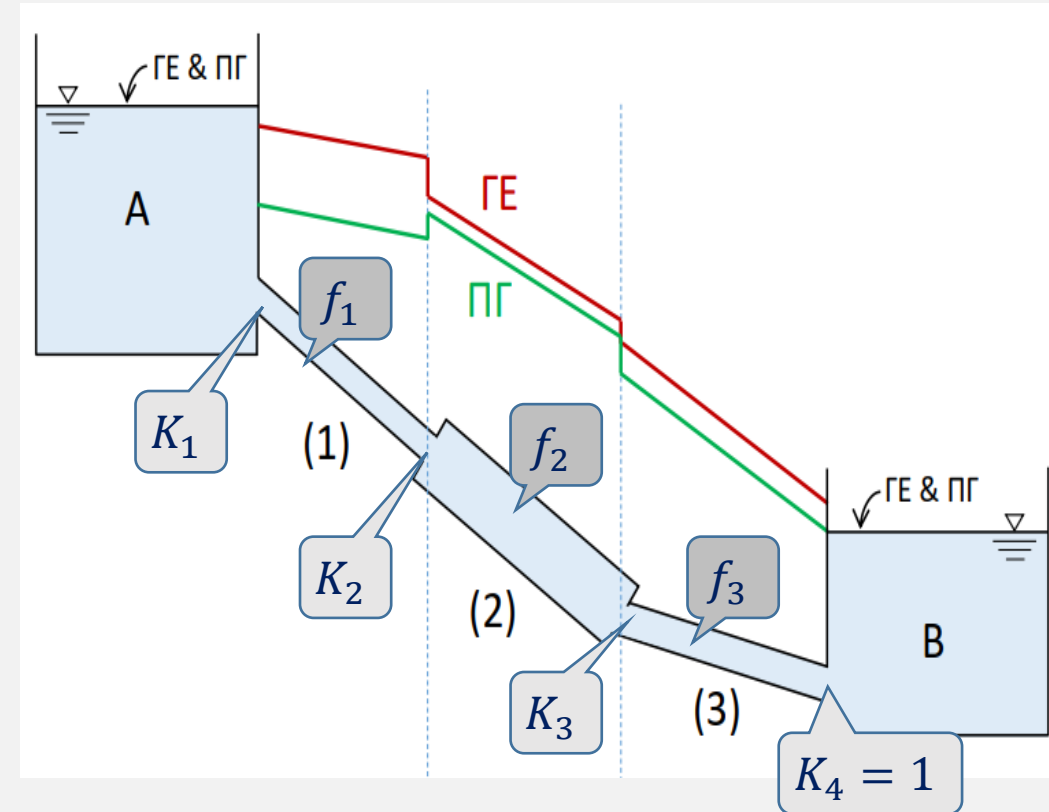
$$Q = Q_i = V_i \frac{\pi D_i^2}{4}$$

- Τοπικές απώλειες σε κάθε γεωμετρική μεταβολή, $n + 1$ μεταβολές (ανάντη κάθε αγωγού και στο πέρας)
- Εξίσωση ενέργειας (για εκροή σε δεξαμενή $K_{n+1} = 1$):

$$\Delta H = \sum_{i=1}^n h_{f,i} + \sum_{i=1}^{n+1} h_{L,i} = \sum_{i=1}^n \left(f_i \frac{L_i}{D_i} + K_i \right) \frac{V_i^2}{2g} + \frac{V_n^2}{2g}$$

- Επιλύοντας ως προς Q προκύπτει η αναδρομική σχέση:

$$Q^{[j+1]} = \frac{\pi \left(\frac{g \Delta H}{8} \right)^{1/2}}{\left[\sum_{i=1}^n \left(f_i^{[j]} \frac{L_i}{D_i^5} + \frac{K_i}{D_i^4} \right) + \frac{1}{D_n^4} \right]^{1/2}}$$



Υπολογιστικά προβλήματα σε αγωγούς σε σειρά

- **Εκτίμηση ενεργειακών απωλειών** (Q, D_i γνωστά):
 - Αναλυτική εκτίμηση γραμμικών απωλειών σε κάθε αγωγό (1^ο τυπικό πρόβλημα) και τοπικών απωλειών σε κάθε θέση γεωμετρικής μεταβολής
 - Πρακτικές εφαρμογές: Για δεδομένο ΔH εκτιμώνται το έλλειμμα που πρέπει καλυφθεί μέσω άντλησης (μανομετρικό ύψος) ή η περίσσεια ενέργειας που πρέπει να καταστραφεί μέσω δικλίδας, προκειμένου να διέλθει μια δεδομένη παροχή Q
- **Εκτίμηση παροχής** ($\Delta H, D_i$ γνωστά)
 - Γνωστές οι συνολικές απώλειες αλλά όχι η επιμέρους κατανομή τους
 - Επαναληπτική διαδικασία: $Q^{[j]} \rightarrow V_i^{[j]} \rightarrow \frac{k_{s,i}}{D_i}, Re_i^{[j]} \rightarrow f_i^{[j]} \rightarrow Q^{[j+1]}$ (υπόθεση: $Q^{[0]}$)
 - Εναλλακτικά: υπόθεση κοινού αρχικού συντελεστή τριβών $f_i^{[0]} = 0.020$
- **Εκτίμηση διαμέτρων** ($\Delta H, Q$ γνωστά)
 - Άπειροι συνδυασμοί διαμέτρων (αφορά στον σχεδιασμό, δεν έχει νόημα ως υπολογιστικό πρόβλημα)
 - Επιλογή βέλτιστου μίγματος τιμών D_i με βάση τεχνικά και οικονομικά κριτήρια

Σύνθετα συστήματα: Παράλληλοι αγωγοί

- Εξίσωση συνέχειας για n αγωγούς σε παράλληλη διάταξη:

$$Q = \sum_{i=1}^n Q_i$$

- Εξίσωση ενέργειας:

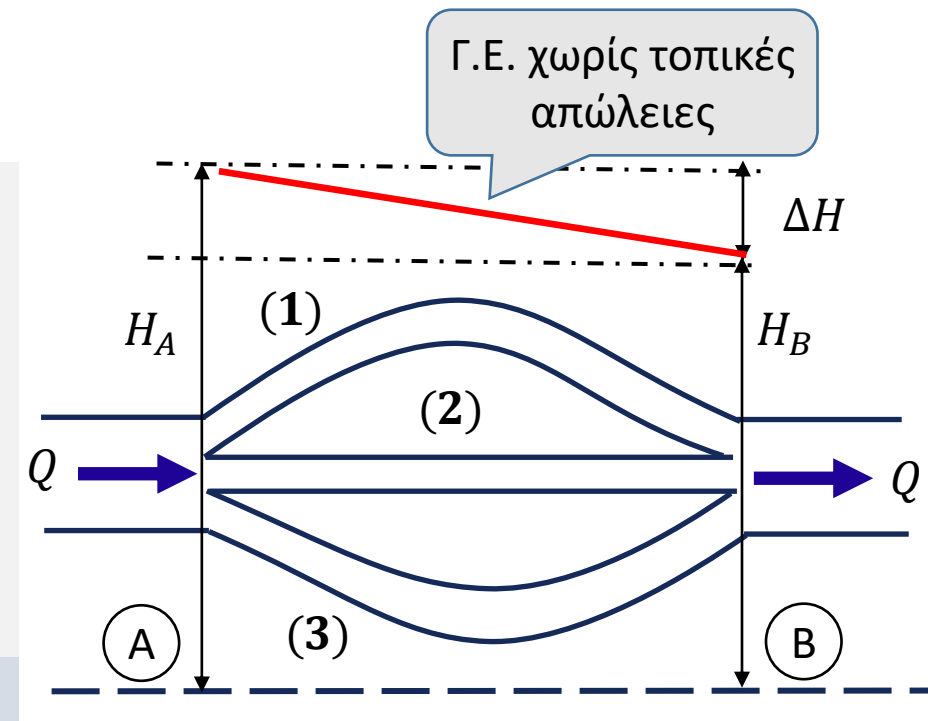
$$\Delta H = h_{f,i} + h_{L,i} = \left(f_i \frac{L_i}{D_i} + K_i \right) \frac{V_i^2}{2g} \Rightarrow V_i = \left[\frac{2g \Delta H}{\left(f_i \frac{L_i}{D_i} + K_i \right)} \right]^{1/2}$$

- Εκτίμηση και κατανομή συνολικής παροχής ($\Delta H, D_i$ γνωστά)

- Χωρίς τοπικές απώλειες: υπολογισμός Q_i από 2^ο τυπικό πρόβλημα για κάθε αγωγό
- Τοπικές απώλειες, δοκιμές: $f_i^{[j]} \rightarrow V_i^{[j]} \rightarrow \frac{k_{s,i}}{D_i}, Re_i^{[j]} \rightarrow f_i^{[j+1]}$ (έλεγχος σύγκλισης ως προς f)

- Εκτίμηση ΔH και κατανομής παροχών (Q, D_i γνωστά) \rightarrow δοκιμές (χωρίς τοπικές απώλειες):

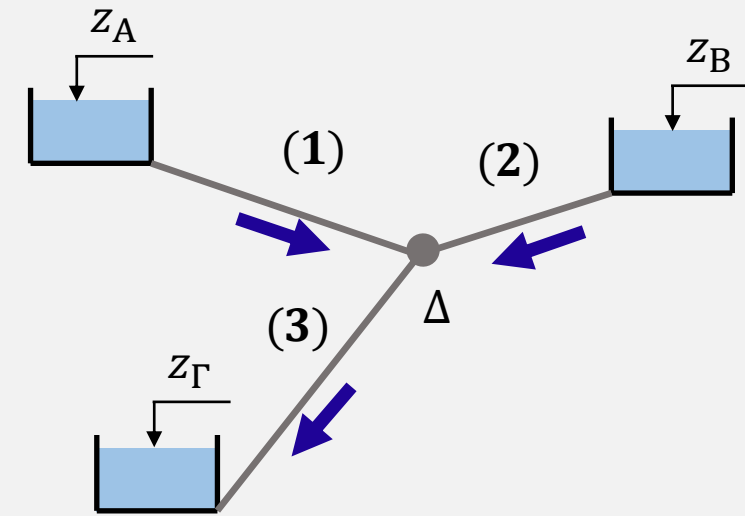
$$f_i^{[j]} \rightarrow Q_1^{[j+1]} = \frac{Q}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{f_1^{[j]} \lambda_1}{f_i^{[j]} \lambda_i} \right)^{1/2}} \rightarrow Q_i^{[j+1]} = Q_1^{[j+1]} \left(\frac{f_1^{[j]} \lambda_1}{f_i^{[j]} \lambda_i} \right)^{1/2} \rightarrow V_i^{[j+1]} \rightarrow f_i^{[j+1]}, \text{ όπου } \lambda_i = L_i/D_i^5$$



Σύνθετα συστήματα: Το πρόβλημα των τριών δεξαμενών

- Δεδομένα: στάθμες δεξαμενών και χαρακτηριστικά αγωγών
- Ζητούμενα: παροχές Q_1 , Q_2 και Q_3
- Προσδιορισμός **συμβατικής φοράς ροών**: θετικές παροχές όταν είναι προς τον κόμβο Δ , αρνητικές όταν απομακρύνονται από αυτόν
- Εξίσωση συνέχειας στον κόμβο Δ : $Q_1 + Q_2 - Q_3 = 0$
- Εξίσωση ενέργειας στον κόμβο Δ (το πρόσημο του h_f αντίθετα στη ροή):

$$H_{\Delta} = z_A - h_{f,1} = z_B - h_{f,2} = z_{\Gamma} + h_{f,3}$$



Επαναληπτική υπολογιστική διαδικασία (διατυπώνεται ως πρόβλημα εκτίμησης του H_{Δ}):

- Αρχική τιμή $H_{\Delta}^{[0]}$, με βάση τις στάθμες z_A , z_B και z_{Γ} , π.χ. μέσος όρος ή $H_{\Delta}^{[0]} = z_B$ (ροή από A προς Γ)
- Με γνωστό H_{Δ} , εκτίμηση $h_{f,i}$ και υπολογισμός Q_i από 2^ο τυπικό πρόβλημα (χωρίς τοπικές απώλειες)
- Αν $Q_1 + Q_2 - Q_3 > 0$, απαιτείται αύξηση του H_{Δ} , και αντίστροφα.
- Σύγκλιση όταν $Q_1 + Q_2 - Q_3 \approx 0$

Υδροδυναμικές μηχανές: Αντλίες – υδροστρόβιλοι

□ Αντλία:

- Τοπική προσθήκη ενέργειας στη ροή (**μανομετρικό ύψος, h_m**), με μετατροπή της ηλεκτρικής ενέργειας σε υδραυλική
- Εξίσωση ενέργειας (χωρίς τοπικές απώλειες):

$$z_2 = z_1 + h_{f,1} + h_{f,2} - h_m \Rightarrow h_m = \Delta z + h_f = \Delta z + J L$$

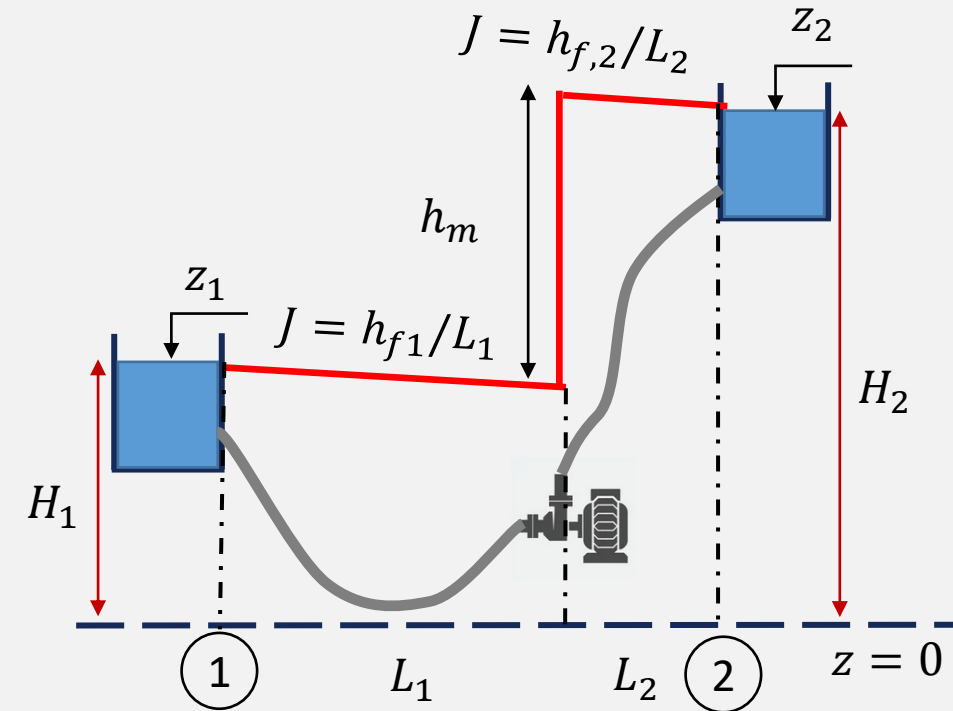
όπου $J = f(Q)$

- Εξίσωση ισχύος (η : βαθμός απόδοσης αντλίας):

$$P = \gamma Q h_m / \eta$$

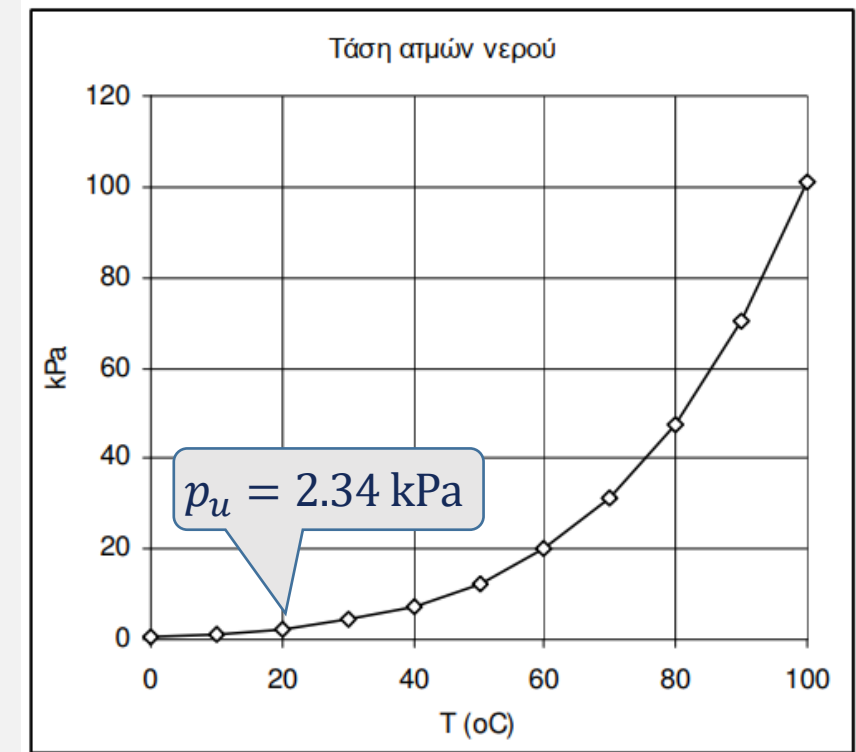
□ Υδροστρόβιλος:

- Τοπική αξιοποίηση της περίσσειας ενέργειας (**ύψος πτώσης, h_n**), με μετατροπή της σε ηλεκτρική (αντί για καταστροφή ενέργειας μέσω δικλίδας)
- Εξίσωση ενέργειας (χωρίς τοπικές απώλειες): $h_n = \Delta z - h_f = \Delta z - J L$
- Εξίσωση ισχύος (η : βαθμός απόδοσης στροβίλων): $P = \eta \gamma Q h_n$



Σπηλαιώση (cavitation)

- **Τάση ατμών, p_u :** Η πίεση (απόλυτη) στην οποία οι ατμοί και το υγρό βρίσκονται σε ισορροπία \rightarrow ταχύτητα εξάτμισης = ταχύτητα υγροποίησης (μεγάλη τάση ατμών \rightarrow ευκολία εξάτμισης)
- **Σπηλαιώση:** Όταν $p_a < p_u$, εμφανίζονται φυσαλίδες ατμού, με αποτέλεσμα την έναρξη βρασμού του υγρού. Διερχόμενες μετά από περιοχές υψηλότερων πιέσεων, επανέρχονται σε υγρή μορφή. Η απότομη καταστροφή των φυσαλίδων συνεπάγεται σημαντική αύξηση πίεσης, θόρυβο και κραδασμούς, που μπορεί να προκαλέσουν σημαντικές φθορές στον αγωγό και μείωση της απόδοσης των υδροδυναμικών μηχανών.
- **Έλεγχος σπηλαιώσης:** $p_a = p + p_{atm} \leq p_u \Rightarrow p \geq p_u - p_{atm}$
 - Για $T = 20 \text{ }^\circ\text{C} \rightarrow p_u = 2.34 \text{ kPa}$ (τυπική συνθήκη σε αγωγό)
 - $p_{atm} = 101.32 \text{ kPa}$
 - $p \geq -98.98 \text{ kPa} \Rightarrow p/\gamma \geq -10.1 \text{ m}$ (**γενικά: $p/\gamma \geq -8 \text{ m}$**)



Σημείωση: Ευάλωτες σε σπηλαιώση είναι οι περιοχές με χαμηλή πίεση: αυχένες, σίφωνες, ανάντη αντλιών, κατάντη υδροστροβίλων

Βιβλιογραφία

- Γαλάνη Κ., *Στοιχεία Εφαρμοσμένης Υδραυλικής*, Εκπαιδευτικές σημειώσεις, 2020.
- Κουτσογιάννης, Δ., *Σημειώσεις Υδραυλικής και Υδραυλικών Έργων: Επισκόπηση ρευστομηχανικής και υδραυλικής*, Τομέας Υδατικών Πόρων και Περιβάλλοντος – Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 2017 (<https://www.itia.ntua.gr/1743/>).
- Λαγγούσης, Α., και Ν. Φουρνιώτης, *Στοιχεία Σχεδιασμού Έργων Ύδρευσης και Αποχέτευσης*, Εκδόσεις Gotsis, Πάτρα, 2020.
- Νάνου-Γιάνναρου, Α., *Υδραυλική κλειστών αγωγών υπό πίεση*, Εκπαιδευτικές σημειώσεις ΕΜΠ, 2020.
- Παπακωνσταντής, Η., *Ροή σε αγωγούς υπό πίεση*, Εκπαιδευτικές σημειώσεις ΕΜΠ, 2021.
- Παπανικολάου, Π. Ν., *Στοιχεία μόνιμης ροής σε αγωγούς υπό πίεση & αγωγούς με ελεύθερη επιφάνεια*, 271 σ., Τομέας Υδατικών Πόρων και Περιβάλλοντος – Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2014 (<https://www.itia.ntua.gr/2145/>).
- Στάμου, Α., *Εφαρμοσμένη Υδραυλική – Ροή υπό πίεση και με ελεύθερη επιφάνεια*, 2η Έκδοση, Εκδόσεις Παπασωτηρίου, 2012.
- Τσακίρης, Γ., *Υδραυλικά Έργα, Σχεδιασμός & Διαχείριση, Τόμος Ι: Αστικά Υδραυλικά Έργα*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 2010.