

Αρμονική Ανάλυση

Μάθημα 10

Μάρτιος 2024

Τοπικό θεώρημα μοναδικότητας

- Από το θεώρημα μοναδικότητας γνωρίζουμε ότι αν μια συνεχής 2π -περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ έχει όλους τους συντελεστές Fourier $\widehat{f}(k)$ ίσους με μηδέν, τότε $f \equiv 0$.

Τοπικό θεώρημα μοναδικότητας

- Από το θεώρημα μοναδικότητας γνωρίζουμε ότι αν μια συνεχής 2π -περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ έχει όλους τους συντελεστές Fourier $\widehat{f}(k)$ ίσους με μηδέν, τότε $f \equiv 0$.
- Θα δείξουμε το ακόλουθο ισχυρότερο θεώρημα μοναδικότητας.

Τοπικό θεώρημα μοναδικότητας

- Από το θεώρημα μοναδικότητας γνωρίζουμε ότι αν μια συνεχής 2π -περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ έχει όλους τους συντελεστές Fourier $\widehat{f}(k)$ ίσους με μηδέν, τότε $f \equiv 0$.
- Θα δείξουμε το ακόλουθο ισχυρότερο θεώρημα μοναδικότητας.

Τοπικό θεώρημα μοναδικότητας

Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\widehat{f}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Αν η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 \in \mathbb{T}$ τότε $f(x_0) = 0$.

Τοπικό θεώρημα μοναδικότητας

- Υποθέτουμε πρώτα ότι η f παίρνει πραγματικές τιμές. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_0 = 0$.

Τοπικό θεώρημα μοναδικότητας

- Υποθέτουμε πρώτα ότι η f παίρνει πραγματικές τιμές. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_0 = 0$.
- Πράγματι, υποθέτοντας ότι το ζητούμενο ισχύει με αυτήν την πρόσθετη υπόθεση, αν η f είναι συνεχής στο x_0 , θεωρούμε την $g(x) = f(x + x_0)$ η οποία είναι συνεχής στο 0 και παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} 2\pi \widehat{g}(k) &= \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-ikx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x + x_0) e^{-ikx} dx \\ &= \int_{-\pi+x_0}^{\pi+x_0} f(y) e^{-ik(y-x_0)} dy = e^{ikx_0} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iky} dy \\ &= e^{ikx_0} 2\pi \widehat{f}(k) = 0 \end{aligned}$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Τοπικό θεώρημα μοναδικότητας

- Υποθέτουμε πρώτα ότι η f παίρνει πραγματικές τιμές. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_0 = 0$.
- Πράγματι, υποθέτοντας ότι το ζητούμενο ισχύει με αυτήν την πρόσθετη υπόθεση, αν η f είναι συνεχής στο x_0 , θεωρούμε την $g(x) = f(x + x_0)$ η οποία είναι συνεχής στο 0 και παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} 2\pi \widehat{g}(k) &= \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-ikx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x + x_0) e^{-ikx} dx \\ &= \int_{-\pi+x_0}^{\pi+x_0} f(y) e^{-ik(y-x_0)} dy = e^{ikx_0} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iky} dy \\ &= e^{ikx_0} 2\pi \widehat{f}(k) = 0 \end{aligned}$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

- Αφού η g είναι συνεχής στο 0, έχουμε ότι $g(0) = 0$, δηλαδή $f(x_0) = 0$.

Τοπικό θεώρημα μοναδικότητας

- Θα υποθέσουμε ότι $f(0) > 0$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο (τελείως ανάλογα αποκλείουμε την περίπτωση $f(0) < 0$).

Τοπικό θεώρημα μοναδικότητας

- Θα υποθέσουμε ότι $f(0) > 0$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο (τελείως ανάλογα αποκλείουμε την περίπτωση $f(0) < 0$).
- Η ιδέα είναι να ορίσουμε κατάλληλη ακολουθία $\{p_m\}$ τριγωνομετρικών πολυωνύμων τα οποία παρουσιάζουν «κορυφή» στο σημείο 0 και από αυτήν τους την ιδιότητα να συμπεράνουμε ότι

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} p_m(x) f(x) dx = +\infty.$$

Τοπικό θεώρημα μοναδικότητας

- Θα υποθέσουμε ότι $f(0) > 0$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο (τελείως ανάλογα αποκλείουμε την περίπτωση $f(0) < 0$).
- Η ιδέα είναι να ορίσουμε κατάλληλη ακολουθία $\{p_m\}$ τριγωνομετρικών πολυωνύμων τα οποία παρουσιάζουν «κορυφή» στο σημείο 0 και από αυτήν τους την ιδιότητα να συμπεράνουμε ότι

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} p_m(x) f(x) dx = +\infty.$$

- Αυτό είναι προφανώς άτοπο, αφού η υπόθεση ότι $\hat{f}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ δείχνει ότι όλα τα παραπάνω ολοκληρώματα είναι ίσα με 0.

Τοπικό θεώρημα μοναδικότητας

- Αρχικά, αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, είναι φραγμένη συνάρτηση: υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$.

Τοπικό θεώρημα μοναδικότητας

- Αρχικά, αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, είναι φραγμένη συνάρτηση: υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$.
- Εφαρμόζοντας τον ορισμό της συνέχειας για την f στο σημείο 0, βρίσκουμε $0 < \delta < \pi/2$ ώστε $f(x) > f(0)/2$ για κάθε $x \in (-\delta, \delta)$.

Τοπικό θεώρημα μοναδικότητας

- Αρχικά, αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, είναι φραγμένη συνάρτηση: υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$.
- Εφαρμόζοντας τον ορισμό της συνέχειας για την f στο σημείο 0, βρίσκουμε $0 < \delta < \pi/2$ ώστε $f(x) > f(0)/2$ για κάθε $x \in (-\delta, \delta)$.
- Παρατηρούμε ότι $\cos x \leq \cos \delta < 1$ αν $\delta \leq |x| \leq \pi$. Συνεπώς, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε

$$|\varepsilon + \cos x| < 1 - \varepsilon/2$$

για κάθε $\delta \leq |x| \leq \pi$. Αρκεί να επιλέξουμε $0 < \varepsilon < \frac{2(1-\cos \delta)}{3}$.

Τοπικό θεώρημα μοναδικότητας

- Αρχικά, αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, είναι φραγμένη συνάρτηση: υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$.
- Εφαρμόζοντας τον ορισμό της συνέχειας για την f στο σημείο 0, βρίσκουμε $0 < \delta < \pi/2$ ώστε $f(x) > f(0)/2$ για κάθε $x \in (-\delta, \delta)$.
- Παρατηρούμε ότι $\cos x \leq \cos \delta < 1$ αν $\delta \leq |x| \leq \pi$. Συνεπώς, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε

$$|\varepsilon + \cos x| < 1 - \varepsilon/2$$

για κάθε $\delta \leq |x| \leq \pi$. Αρκεί να επιλέξουμε $0 < \varepsilon < \frac{2(1-\cos \delta)}{3}$.

- Πράγματι, τότε, αν $\varepsilon + \cos x \geq 0$ έχουμε
 $|\varepsilon + \cos x| = \varepsilon + \cos x \leq \varepsilon + \cos \delta < 1 - \varepsilon/2$ από την επιλογή του ε , ενώ αν $\varepsilon + \cos x < 0$ έχουμε $|\varepsilon + \cos x| = -\cos x - \varepsilon \leq 1 - \varepsilon < 1 - \varepsilon/2$.

Τοπικό θεώρημα μοναδικότητας

- Ορίζουμε

$$p(x) = \varepsilon + \cos x.$$

Τοπικό θεώρημα μοναδικότητας

- Ορίζουμε

$$p(x) = \varepsilon + \cos x.$$

- Τότε, $p(0) = 1 + \varepsilon$, συνεπώς υπάρχει $0 < \eta < \delta$ ώστε

$$p(x) \geq 1 + \varepsilon/2, \quad x \in (-\eta, \eta).$$

Τοπικό θεώρημα μοναδικότητας

- Ορίζουμε

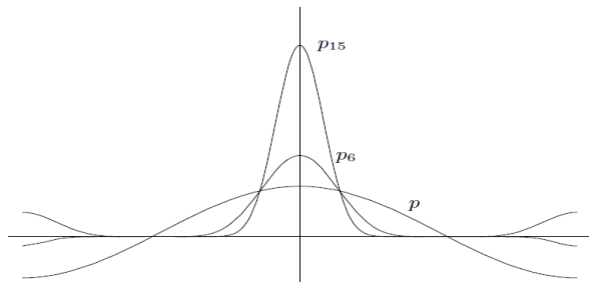
$$p(x) = \varepsilon + \cos x.$$

- Τότε, $p(0) = 1 + \varepsilon$, συνεπώς υπάρχει $0 < \eta < \delta$ ώστε

$$p(x) \geq 1 + \varepsilon/2, \quad x \in (-\eta, \eta).$$

- Τώρα, για κάθε $m = 1, 2, \dots$, ορίζουμε

$$p_m(x) = [p(x)]^m = (\varepsilon + \cos x)^m.$$



Τοπικό θεώρημα μοναδικότητας

- Παρατηρούμε ότι κάθε p_m είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο.

Τοπικό θεώρημα μοναδικότητας

- Παρατηρούμε ότι κάθε p_m είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο.
- Αφού $\widehat{f}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} p_m(x) f(x) dx = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Τοπικό θεώρημα μοναδικότητας

- Παρατηρούμε ότι κάθε p_m είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο.
- Αφού $\hat{f}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} p_m(x) f(x) dx = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

- Γράφουμε

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} p_m(x) f(x) dx &= \int_{\delta \leq |x| \leq \pi} p_m(x) f(x) dx + \int_{\eta \leq |x| < \delta} p_m(x) f(x) dx \\ &\quad + \int_{|x| < \eta} p_m(x) f(x) dx. \end{aligned}$$

Τοπικό θεώρημα μοναδικότητας

- Τώρα, παρατηρούμε ότι:

Τοπικό θεώρημα μοναδικότητας

- Τώρα, παρατηρούμε ότι:

❶ Για το πρώτο ολοκλήρωμα έχουμε

$$\left| \int_{\delta \leq |x| \leq \pi} \rho_m(x) f(x) dx \right| \leq 2\pi M(1 - \varepsilon/2)^m \rightarrow 0$$

όταν $m \rightarrow \infty$.

Τοπικό θεώρημα μοναδικότητας

- Τώρα, παρατηρούμε ότι:

❶ Για το πρώτο ολοκλήρωμα έχουμε

$$\left| \int_{\delta \leq |x| \leq \pi} p_m(x) f(x) dx \right| \leq 2\pi M(1 - \varepsilon/2)^m \rightarrow 0$$

όταν $m \rightarrow \infty$.

❷ Για το δεύτερο ολοκλήρωμα έχουμε

$$\int_{\eta \leq |x| < \delta} p_m(x) f(x) dx \geq 0$$

διότι $p(x) \geq 0$ και $f(x) \geq 0$ στο $\{x : \eta \leq |x| < \delta\}$. Για την πρώτη ανισότητα παρατηρήστε ότι $p(x) = \varepsilon + \cos x \geq \varepsilon + \cos \delta > 0$ διότι $0 < \delta < \pi/2$.

Τοπικό θεώρημα μοναδικότητας

- Τώρα, παρατηρούμε ότι:

- 1 Για το πρώτο ολοκλήρωμα έχουμε

$$\left| \int_{\delta \leq |x| \leq \pi} p_m(x) f(x) dx \right| \leq 2\pi M(1 - \varepsilon/2)^m \rightarrow 0$$

όταν $m \rightarrow \infty$.

- 2 Για το δεύτερο ολοκλήρωμα έχουμε

$$\int_{\eta \leq |x| < \delta} p_m(x) f(x) dx \geq 0$$

διότι $p(x) \geq 0$ και $f(x) \geq 0$ στο $\{x : \eta \leq |x| < \delta\}$. Για την πρώτη ανισότητα παρατηρήστε ότι $p(x) = \varepsilon + \cos x \geq \varepsilon + \cos \delta > 0$ διότι $0 < \delta < \pi/2$.

- 3 Για το τρίτο ολοκλήρωμα ισχύει το κάτω φράγμα

$$\int_{|x| < \eta} p_m(x) f(x) dx \geq 2\eta \frac{f(0)}{2} (1 + \varepsilon/2)^m.$$

Τοπικό θεώρημα μοναδικότητας

- Τώρα, παρατηρούμε ότι:

- 1 Για το πρώτο ολοκλήρωμα έχουμε

$$\left| \int_{\delta \leq |x| \leq \pi} p_m(x) f(x) dx \right| \leq 2\pi M(1 - \varepsilon/2)^m \rightarrow 0$$

όταν $m \rightarrow \infty$.

- 2 Για το δεύτερο ολοκλήρωμα έχουμε

$$\int_{\eta \leq |x| < \delta} p_m(x) f(x) dx \geq 0$$

διότι $p(x) \geq 0$ και $f(x) \geq 0$ στο $\{x : \eta \leq |x| < \delta\}$. Για την πρώτη ανισότητα παρατηρήστε ότι $p(x) = \varepsilon + \cos x \geq \varepsilon + \cos \delta > 0$ διότι $0 < \delta < \pi/2$.

- 3 Για το τρίτο ολοκλήρωμα ισχύει το κάτω φράγμα

$$\int_{|x| < \eta} p_m(x) f(x) dx \geq 2\eta \frac{f(0)}{2} (1 + \varepsilon/2)^m.$$

- Αφού

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (1 + \varepsilon/2)^m = +\infty,$$

συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} p_m(x) f(x) dx = +\infty.$$

Τοπικό θεώρημα μοναδικότητας

- Τώρα, παρατηρούμε ότι:

- 1 Για το πρώτο ολοκλήρωμα έχουμε

$$\left| \int_{\delta \leq |x| \leq \pi} p_m(x) f(x) dx \right| \leq 2\pi M(1 - \varepsilon/2)^m \rightarrow 0$$

όταν $m \rightarrow \infty$.

- 2 Για το δεύτερο ολοκλήρωμα έχουμε

$$\int_{\eta \leq |x| < \delta} p_m(x) f(x) dx \geq 0$$

διότι $p(x) \geq 0$ και $f(x) \geq 0$ στο $\{x : \eta \leq |x| < \delta\}$. Για την πρώτη ανισότητα παρατηρήστε ότι $p(x) = \varepsilon + \cos x \geq \varepsilon + \cos \delta > 0$ διότι $0 < \delta < \pi/2$.

- 3 Για το τρίτο ολοκλήρωμα ισχύει το κάτω φράγμα

$$\int_{|x| < \eta} p_m(x) f(x) dx \geq 2\eta \frac{f(0)}{2} (1 + \varepsilon/2)^m.$$

- Αφού

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (1 + \varepsilon/2)^m = +\infty,$$

συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} p_m(x) f(x) dx = +\infty.$$

- Έτσι, οδηγούμαστε σε άτοπο στην περίπτωση που η f παίρνει πραγματικές τιμές.

Τοπικό θεώρημα μοναδικότητας

- Στη γενική περίπτωση που η f παίρνει τιμές στο $\mathbb{C}$, γράφουμε $f(x) = u(x) + iv(x)$, όπου οι u και v είναι ολοκληρώσιμες πραγματικές συναρτήσεις.

Τοπικό θεώρημα μοναδικότητας

- Στη γενική περίπτωση που η f παίρνει τιμές στο $\mathbb{C}$, γράφουμε $f(x) = u(x) + iv(x)$, όπου οι u και v είναι ολοκληρώσιμες πραγματικές συναρτήσεις.
- Αν θέσουμε $g(x) = \overline{f(x)}$, έχουμε

$$u(x) = \frac{f(x) + g(x)}{2} \quad \text{και} \quad v(x) = \frac{f(x) - g(x)}{2i}.$$

Τοπικό θεώρημα μοναδικότητας

- Στη γενική περίπτωση που η f παίρνει τιμές στο $\mathbb{C}$, γράφουμε $f(x) = u(x) + iv(x)$, όπου οι u και v είναι ολοκληρώσιμες πραγματικές συναρτήσεις.
- Αν θέσουμε $g(x) = \overline{f(x)}$, έχουμε

$$u(x) = \frac{f(x) + g(x)}{2} \quad \text{και} \quad v(x) = \frac{f(x) - g(x)}{2i}.$$

- Παρατηρούμε ότι

$$\widehat{g}(k) = \overline{\widehat{f}(k)} = 0, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Τοπικό θεώρημα μοναδικότητας

- Στη γενική περίπτωση που η f παίρνει τιμές στο $\mathbb{C}$, γράφουμε $f(x) = u(x) + iv(x)$, όπου οι u και v είναι ολοκληρώσιμες πραγματικές συναρτήσεις.
- Αν θέσουμε $g(x) = \overline{f(x)}$, έχουμε

$$u(x) = \frac{f(x) + g(x)}{2} \quad \text{και} \quad v(x) = \frac{f(x) - g(x)}{2i}.$$

- Παρατηρούμε ότι

$$\widehat{g}(k) = \overline{\widehat{f}(k)} = 0, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- Έπεται ότι

$$\widehat{u}(k) = \frac{\widehat{f}(k) + \widehat{g}(k)}{2} = 0 \quad \text{και} \quad \widehat{v}(k) = \frac{\widehat{f}(k) - \widehat{g}(k)}{2i} = 0$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Τοπικό θεώρημα μοναδικότητας

- Στη γενική περίπτωση που η f παίρνει τιμές στο $\mathbb{C}$, γράφουμε $f(x) = u(x) + iv(x)$, όπου οι u και v είναι ολοκληρώσιμες πραγματικές συναρτήσεις.
- Αν θέσουμε $g(x) = \overline{f(x)}$, έχουμε

$$u(x) = \frac{f(x) + g(x)}{2} \quad \text{και} \quad v(x) = \frac{f(x) - g(x)}{2i}.$$

- Παρατηρούμε ότι

$$\widehat{g}(k) = \overline{\widehat{f}(k)} = 0, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- Έπεται ότι

$$\widehat{u}(k) = \frac{\widehat{f}(k) + \widehat{g}(k)}{2} = 0 \quad \text{και} \quad \widehat{v}(k) = \frac{\widehat{f}(k) - \widehat{g}(k)}{2i} = 0$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

- Έστω ότι η f είναι συνεχής στο x_0 . Από τη συνέχεια των u και v στο x_0 , από το γεγονός ότι οι συντελεστές Fourier των u και v μηδενίζονται και από το αποτέλεσμα στην πραγματική περίπτωση, συμπεραίνουμε ότι $u(x_0) = v(x_0) = 0$. Άρα, $f(x_0) = u(x_0) + iv(x_0) = 0$.

Τοπικό θεώρημα μοναδικότητας

- Στη γενική περίπτωση που η f παίρνει τιμές στο $\mathbb{C}$, γράφουμε $f(x) = u(x) + iv(x)$, όπου οι u και v είναι ολοκληρώσιμες πραγματικές συναρτήσεις.
- Αν θέσουμε $g(x) = \overline{f(x)}$, έχουμε

$$u(x) = \frac{f(x) + g(x)}{2} \quad \text{και} \quad v(x) = \frac{f(x) - g(x)}{2i}.$$

- Παρατηρούμε ότι

$$\widehat{g}(k) = \overline{\widehat{f}(k)} = 0, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- Έπεται ότι

$$\widehat{u}(k) = \frac{\widehat{f}(k) + \widehat{g}(k)}{2} = 0 \quad \text{και} \quad \widehat{v}(k) = \frac{\widehat{f}(k) - \widehat{g}(k)}{2i} = 0$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

- Έστω ότι η f είναι συνεχής στο x_0 . Από τη συνέχεια των u και v στο x_0 , από το γεγονός ότι οι συντελεστές Fourier των u και v μηδενίζονται και από το αποτέλεσμα στην πραγματική περίπτωση, συμπεραίνουμε ότι $u(x_0) = v(x_0) = 0$. Άρα, $f(x_0) = u(x_0) + iv(x_0) = 0$.

Σημείωση: Άμεση συνέπεια του τοπικού θεωρήματος μοναδικότητας είναι το θεώρημα μοναδικότητας: Αν $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ και $\widehat{f}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, τότε $f \equiv 0$.

Συνέλιξη

- Έστω $f, g \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$.

Συνέλιξη

- Έστω $f, g \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$.
- Η συνέλιξη $f * g$ των f και g ορίζεται στο $\mathbb{R}$ μέσω της

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x - y) dy.$$

Συνέλιξη

- Έστω $f, g \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$.
- Η συνέλιξη $f * g$ των f και g ορίζεται στο $\mathbb{R}$ μέσω της

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x - y) dy.$$

- Η τιμή της συνάρτησης είναι καλά ορισμένη για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αφού η $y \mapsto f(y)g(x - y)$ ως γινόμενο ολοκληρώσιμων συναρτήσεων είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

- Έστω $f, g \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$.
- Η συνέλιξη $f * g$ των f και g ορίζεται στο $\mathbb{R}$ μέσω της

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x - y) dy.$$

- Η τιμή της συνάρτησης είναι καλά ορισμένη για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αφού η $y \mapsto f(y)g(x - y)$ ως γινόμενο ολοκληρώσιμων συναρτήσεων είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση.
- Η συνέλιξη μπορεί να ιδωθεί σαν «σταθμισμένος μέσος». Για παράδειγμα, αν $g \equiv 1$ τότε η $f * g$ είναι σταθερή, με τιμή

$$(f * 1)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) dy.$$

Δηλαδή, ισούται με τη μέση τιμή της f στο $[-\pi, \pi]$.

- Έστω $f, g \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$.
- Η συνέλιξη $f * g$ των f και g ορίζεται στο $\mathbb{R}$ μέσω της

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y) dy.$$

- Η τιμή της συνάρτησης είναι καλά ορισμένη για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αφού η $y \mapsto f(y)g(x-y)$ ως γινόμενο ολοκληρώσιμων συναρτήσεων είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση.
- Η συνέλιξη μπορεί να ιδωθεί σαν «σταθμισμένος μέσος». Για παράδειγμα, αν $g \equiv 1$ τότε η $f * g$ είναι σταθερή, με τιμή

$$(f * 1)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) dy.$$

Δηλαδή, ισούται με τη μέση τιμή της f στο $[-\pi, \pi]$.

- Από μια άλλη οπτική γωνία, η συνέλιξη $(f * g)(x)$ συχνά αντικαθιστά, υπό μία έννοια, το κατά σημείο γινόμενο $f(x)g(x)$ των f και g .

Στην επόμενη πρόταση παραθέτουμε τις βασικές ιδιότητες των συνελίξεων, τις οποίες θα αποδείξουμε στο επόμενο μάθημα.

Ιδιότητες της συνέλιξης

Έστω f, g και $h \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Τότε:

Στην επόμενη πρόταση παραθέτουμε τις βασικές ιδιότητες των συνελίξεων, τις οποίες θα αποδείξουμε στο επόμενο μάθημα.

Ιδιότητες της συνέλιξης

Έστω f, g και $h \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Τότε:

$$\textcircled{1} \quad f * (g + h) = (f * g) + (f * h).$$

Στην επόμενη πρόταση παραθέτουμε τις βασικές ιδιότητες των συνελίξεων, τις οποίες θα αποδείξουμε στο επόμενο μάθημα.

Ιδιότητες της συνέλιξης

Έστω f, g και $h \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Τότε:

- ❶ $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$.
- ❷ $(cf) * g = c(f * g) = f * (cg)$ για κάθε $c \in \mathbb{C}$.

Στην επόμενη πρόταση παραθέτουμε τις βασικές ιδιότητες των συνελίξεων, τις οποίες θα αποδείξουμε στο επόμενο μάθημα.

Ιδιότητες της συνέλιξης

Έστω f, g και $h \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Τότε:

- ❶ $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$.
- ❷ $(cf) * g = c(f * g) = f * (cg)$ για κάθε $c \in \mathbb{C}$.
- ❸ $f * g = g * f$.

Στην επόμενη πρόταση παραθέτουμε τις βασικές ιδιότητες των συνελίξεων, τις οποίες θα αποδείξουμε στο επόμενο μάθημα.

Ιδιότητες της συνέλιξης

Έστω f, g και $h \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Τότε:

- ❶ $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$.
- ❷ $(cf) * g = c(f * g) = f * (cg)$ για κάθε $c \in \mathbb{C}$.
- ❸ $f * g = g * f$.
- ❹ $(f * g) * h = f * (g * h)$.

Στην επόμενη πρόταση παραθέτουμε τις βασικές ιδιότητες των συνελίξεων, τις οποίες θα αποδείξουμε στο επόμενο μάθημα.

Ιδιότητες της συνέλιξης

Έστω f, g και $h \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Τότε:

- 1 $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$.
- 2 $(cf) * g = c(f * g) = f * (cg)$ για κάθε $c \in \mathbb{C}$.
- 3 $f * g = g * f$.
- 4 $(f * g) * h = f * (g * h)$.
- 5 Η $f * g$ είναι συνεχής.

Στην επόμενη πρόταση παραθέτουμε τις βασικές ιδιότητες των συνελίξεων, τις οποίες θα αποδείξουμε στο επόμενο μάθημα.

Ιδιότητες της συνέλιξης

Έστω f, g και $h \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Τότε:

- ❶ $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$.
- ❷ $(cf) * g = c(f * g) = f * (cg)$ για κάθε $c \in \mathbb{C}$.
- ❸ $f * g = g * f$.
- ❹ $(f * g) * h = f * (g * h)$.
- ❺ Η $f * g$ είναι συνεχής.
- ❻ $\widehat{f * g}(k) = \widehat{f}(k)\widehat{g}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

- Οι συνελίξεις μπαίνουν στη μελέτη μας μέσω της παρατήρησης ότι τα μερικά αθροίσματα της σειράς Fourier μιας συνάρτησης f αναπαρίστανται ως εξής:

- Οι συνελίξεις μπαίνουν στη μελέτη μας μέσω της παρατήρησης ότι τα μερικά αθροίσματα της σειράς Fourier μιας συνάρτησης f αναπαρίστανται ως εξής:

$$\begin{aligned} s_n(f, x) &= \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e^{ikx} = \sum_{k=-n}^n \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iky} dy \right) e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left(\sum_{k=-n}^n e^{ik(x-y)} \right) dy = (f * D_n)(x), \end{aligned}$$

όπου D_n είναι ο n -οστός πυρήνας του Dirichlet, που ορίζεται από τη σχέση

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx}.$$

- Οι συνελίξεις μπαίνουν στη μελέτη μας μέσω της παρατήρησης ότι τα μερικά αθροίσματα της σειράς Fourier μιας συνάρτησης f αναπαρίστανται ως εξής:

$$\begin{aligned} s_n(f, x) &= \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e^{ikx} = \sum_{k=-n}^n \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iky} dy \right) e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left(\sum_{k=-n}^n e^{ik(x-y)} \right) dy = (f * D_n)(x), \end{aligned}$$

όπου D_n είναι ο n -οστός πυρήνας του Dirichlet, που ορίζεται από τη σχέση

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx}.$$

- Παρατηρούμε λοιπόν ότι για την κατανόηση των μερικών αθροισμάτων $s_n(f)$ αρκεί να μελετήσουμε τη συνέλιξη $f * D_n$.

Πυρήνας Dirichlet

- Έστω $n \geq 0$. Όπως είπαμε, ο n -οστός πυρήνας *Dirichlet* είναι το τριγωνομετρικό πολυώνυμο

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Πυρήνας Dirichlet

- Έστω $n \geq 0$. Όπως είπαμε, ο n -οστός πυρήνας *Dirichlet* είναι το τριγωνομετρικό πολυώνυμο

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Παρατηρούμε ότι $D_n(0) = 2n + 1$. Θα δείξουμε ότι: αν $0 < |x| \leq \pi$,

$$D_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin(x/2)}.$$

Πυρήνας Dirichlet

- Έστω $n \geq 0$. Όπως είπαμε, ο n -οστός πυρήνας *Dirichlet* είναι το τριγωνομετρικό πολυώνυμο

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Παρατηρούμε ότι $D_n(0) = 2n + 1$. Θα δείξουμε ότι: αν $0 < |x| \leq \pi$,

$$D_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin(x/2)}.$$

- Για τον σκοπό αυτό, θέτουμε $\omega = e^{ix}$ και γράφουμε

$$D_n(x) = \sum_{k=0}^n \omega^k + \sum_{k=-n}^{-1} \omega^k = \sum_{k=0}^n \omega^k + \sum_{k=1}^n (1/\omega)^k.$$

Πυρήνας Dirichlet

- Έστω $n \geq 0$. Όπως είπαμε, ο n -οστός πυρήνας *Dirichlet* είναι το τριγωνομετρικό πολυώνυμο

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Παρατηρούμε ότι $D_n(0) = 2n + 1$. Θα δείξουμε ότι: αν $0 < |x| \leq \pi$,

$$D_n(x) = \frac{\sin\left((n + \frac{1}{2})x\right)}{\sin(x/2)}.$$

- Για τον σκοπό αυτό, θέτουμε $\omega = e^{ix}$ και γράφουμε

$$D_n(x) = \sum_{k=0}^n \omega^k + \sum_{k=-n}^{-1} \omega^k = \sum_{k=0}^n \omega^k + \sum_{k=1}^n (1/\omega)^k.$$

- Παρατηρούμε ότι

$$\sum_{k=0}^n \omega^k = \frac{1 - \omega^{n+1}}{1 - \omega},$$

και

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\omega}\right)^k = \frac{1}{\omega} \frac{1 - \omega^{-n}}{1 - \frac{1}{\omega}} = \frac{\omega^{-n} - 1}{1 - \omega}.$$

- Συνεπώς,

$$D_n(x) = \frac{\omega^{-n} - \omega^{n+1}}{1 - \omega} = \frac{e^{-inx} - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} = \frac{e^{ix/2}}{e^{ix/2}} \frac{e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)x} - e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}}{e^{-ix/2} - e^{ix/2}},$$

απ' όπου προκύπτει η

$$D_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin(x/2)}.$$

- Συνεπώς,

$$D_n(x) = \frac{\omega^{-n} - \omega^{n+1}}{1 - \omega} = \frac{e^{-inx} - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} = \frac{e^{ix/2}}{e^{ix/2}} \frac{e^{-i(n+\frac{1}{2})x} - e^{i(n+\frac{1}{2})x}}{e^{-ix/2} - e^{ix/2}},$$

απ' όπου προκύπτει η

$$D_n(x) = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})x)}{\sin(x/2)}.$$

- Από την $\sin y \geq \frac{2}{\pi}y$, $y \in [0, \frac{\pi}{2}]$ βλέπουμε ότι $|\sin(x/2)| \geq \frac{|x|}{\pi}$ για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$. Τότε, για κάθε $0 < |x| \leq \pi$ παίρνουμε

$$|D_n(x)| = \frac{|\sin((n + \frac{1}{2})x)|}{|\sin(x/2)|} \leq \frac{1}{|\sin(x/2)|} \leq \frac{\pi}{|x|}.$$

- Συνεπώς,

$$D_n(x) = \frac{\omega^{-n} - \omega^{n+1}}{1 - \omega} = \frac{e^{-inx} - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} = \frac{e^{ix/2}}{e^{ix/2}} \frac{e^{-i(n+\frac{1}{2})x} - e^{i(n+\frac{1}{2})x}}{e^{-ix/2} - e^{ix/2}},$$

απ' όπου προκύπτει η

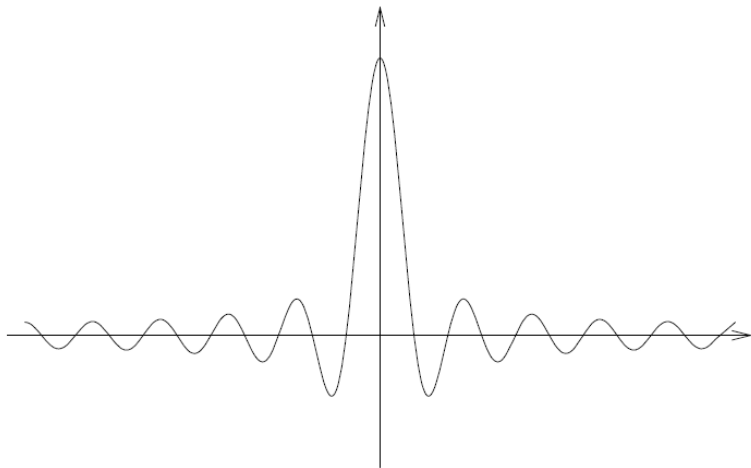
$$D_n(x) = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})x)}{\sin(x/2)}.$$

- Από την $\sin y \geq \frac{2}{\pi}y$, $y \in [0, \frac{\pi}{2}]$ βλέπουμε ότι $|\sin(x/2)| \geq \frac{|x|}{\pi}$ για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$. Τότε, για κάθε $0 < |x| \leq \pi$ παίρνουμε

$$|D_n(x)| = \frac{|\sin((n + \frac{1}{2})x)|}{|\sin(x/2)|} \leq \frac{1}{|\sin(x/2)|} \leq \frac{\pi}{|x|}.$$

- Παρατηρούμε επίσης ότι η D_n μηδενίζεται στα σημεία $x \in [-\pi, \pi]$ για τα οποία $(n + \frac{1}{2})x = k\pi$ όπου k ακέραιος, και αλλάζει πρόσημο αριστερά και δεξιά από καθένα από αυτά τα σημεία.

Πυρήνας Dirichlet



Σχήμα: Ο πυρήνας Dirichlet για μεγάλες τιμές του N

Παράδειγμα 3

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η 2π -περιοδική συνάρτηση με $f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ για $|x| \leq \pi$.
Υπολογίστε τη σειρά Fourier της f και χρησιμοποιώντας την υπολογίστε το $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}$.

Παράδειγμα 3

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η 2π -περιοδική συνάρτηση με $f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ για $|x| \leq \pi$. Υπολογίστε τη σειρά Fourier της f και χρησιμοποιώντας την υπολογίστε το $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}$.

- Υπολογίζουμε τους συντελεστές Fourier της f . Με (απλές) πράξεις βλέπουμε ότι $\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}(e^{\pi} - e^{-\pi})$, ενώ αν $k \neq 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}\hat{f}(k) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (e^{(1-ik)x} + e^{-(1+ik)x}) dx \\&= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{1-ik} e^{(1-ik)x} - \frac{1}{1+ik} e^{-(1+ik)x} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) \\&= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{(-1)^k}{1-ik} (e^{\pi} - e^{-\pi}) + \frac{(-1)^k}{1+ik} (e^{\pi} - e^{-\pi}) \right) \\&= \frac{(-1)^k (e^{\pi} - e^{-\pi})}{4\pi} \left(\frac{1}{1-ik} + \frac{1}{1+ik} \right) \\&= \frac{1}{k^2+1} \frac{(-1)^k (e^{\pi} - e^{-\pi})}{2\pi}.\end{aligned}$$

- Συνεπώς, η σειρά Fourier της f είναι η

$$S(f, x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 1} \frac{(-1)^k (e^{\pi} - e^{-\pi})}{2\pi} e^{ikx},$$

η οποία συγκλίνει απολύτως.

- Συνεπώς, η σειρά Fourier της f είναι η

$$S(f, x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 1} \frac{(-1)^k (e^{\pi} - e^{-\pi})}{2\pi} e^{ikx},$$

η οποία συγκλίνει απολύτως.

- Έπεται ότι $f(x) = S(f, x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και θέτοντας $x = \pi$ παίρνουμε

$$f(\pi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 1} \frac{(-1)^k (e^{\pi} - e^{-\pi})}{2\pi} (-1)^k = \frac{(e^{\pi} - e^{-\pi})}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 1},$$

απ' όπου υπολογίζουμε το $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 1}$.

Παράδειγμα 4

Έστω $\alpha \notin \mathbb{Z}$ και $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η 2π -περιοδική συνάρτηση με $f(x) = \cos(\alpha x)$ για $|x| \leq \pi$. Υπολογίστε τη σειρά Fourier της f και χρησιμοποιώντας την αποδείξτε ότι

$$\pi \cot(\pi\alpha) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N \frac{1}{\alpha + k}.$$

Παράδειγμα 4

Έστω $\alpha \notin \mathbb{Z}$ και $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η 2π -περιοδική συνάρτηση με $f(x) = \cos(\alpha x)$ για $|x| \leq \pi$. Υπολογίστε τη σειρά Fourier της f και χρησιμοποιώντας την αποδείξτε ότι

$$\pi \cot(\pi\alpha) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N \frac{1}{\alpha + k}.$$

- Παρατηρούμε ότι $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, διότι $f(\pi) = f(-\pi)$.

Παράδειγμα 4

Έστω $\alpha \notin \mathbb{Z}$ και $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η 2π -περιοδική συνάρτηση με $f(x) = \cos(\alpha x)$ για $|x| \leq \pi$. Υπολογίστε τη σειρά Fourier της f και χρησιμοποιώντας την αποδείξτε ότι

$$\pi \cot(\pi\alpha) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N \frac{1}{\alpha + k}.$$

- Παρατηρούμε ότι $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, διότι $f(\pi) = f(-\pi)$.
- Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ υπολογίζουμε τον συντελεστή Fourier

$$\begin{aligned}\hat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\alpha x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x}) e^{-ikx} dx \\&= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{e^{i(\alpha-k)x}}{i(\alpha-k)} \Big|_{x=-\pi}^{\pi} - \frac{e^{-i(\alpha+k)x}}{i(\alpha+k)} \Big|_{x=-\pi}^{\pi} \right) \\&= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{e^{i(\alpha-k)\pi} - e^{-i(\alpha-k)\pi}}{i(\alpha-k)} + \frac{e^{i(\alpha+k)\pi} - e^{-i(\alpha+k)\pi}}{i(\alpha+k)} \right) \\&= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin(\alpha-k)\pi}{\alpha-k} + \frac{\sin(\alpha+k)\pi}{\alpha+k} \right) \\&= \frac{(-1)^k \sin \pi\alpha}{2\pi} \left(\frac{1}{\alpha-k} + \frac{1}{\alpha+k} \right) = \frac{(-1)^k \alpha \sin \pi\alpha}{\pi(\alpha^2 - k^2)}.\end{aligned}$$

Παραδείγματα

- Συνεπώς, η σειρά Fourier της f είναι η

$$\begin{aligned} S(f, x) &\sim \frac{\alpha \sin \pi \alpha}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k e^{ikx}}{\alpha^2 - k^2} \\ &= \frac{\alpha \sin \pi \alpha}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (e^{ikx} + e^{-ikx})}{\alpha^2 - k^2} \right) \\ &= \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos kx}{\alpha^2 - k^2} \right). \end{aligned}$$

Παραδείγματα

- Συνεπώς, η σειρά Fourier της f είναι η

$$\begin{aligned} S(f, x) &\sim \frac{\alpha \sin \pi \alpha}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k e^{ikx}}{\alpha^2 - k^2} \\ &= \frac{\alpha \sin \pi \alpha}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (e^{ikx} + e^{-ikx})}{\alpha^2 - k^2} \right) \\ &= \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos kx}{\alpha^2 - k^2} \right). \end{aligned}$$

- Παρατηρούμε ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| = \frac{|\alpha \sin \pi \alpha|}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\alpha^2 - k^2|} \leq \frac{|\alpha|}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha^2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\alpha^2 - k^2|} \right) < +\infty$$

αφού $|\alpha^2 - k^2| > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|k^2 - \alpha^2|}$ συγκλίνει.

Παραδείγματα

- Συνεπώς, η σειρά Fourier της f είναι η

$$\begin{aligned} S(f, x) &\sim \frac{\alpha \sin \pi \alpha}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k e^{ikx}}{\alpha^2 - k^2} \\ &= \frac{\alpha \sin \pi \alpha}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (e^{ikx} + e^{-ikx})}{\alpha^2 - k^2} \right) \\ &= \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos kx}{\alpha^2 - k^2} \right). \end{aligned}$$

- Παρατηρούμε ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)| = \frac{|\alpha \sin \pi \alpha|}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\alpha^2 - k^2|} \leq \frac{|\alpha|}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha^2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\alpha^2 - k^2|} \right) < +\infty$$

αφού $|\alpha^2 - k^2| > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|k^2 - \alpha^2|}$ συγκλίνει.

- Έπεται ότι $s_n(f) \rightarrow f$ ομοιόμορφα, άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$f(x) = S(f, x) = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos kx}{\alpha^2 - k^2} \right).$$

Παραδείγματα

- Θέτοντας $x = \pi$ παίρνουμε

$$\cos \pi\alpha = S(f, \pi) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - k^2} \right),$$

άρα

$$\frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - k^2} = \pi \cot \pi\alpha.$$

Παραδείγματα

- Θέτοντας $x = \pi$ παίρνουμε

$$\cos \pi\alpha = S(f, \pi) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - k^2} \right),$$

άρα

$$\frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - k^2} = \pi \cot \pi\alpha.$$

- Τέλος, παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N \frac{1}{\alpha + k} &= \frac{1}{\alpha} + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{\alpha + k} + \frac{1}{\alpha - k} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \frac{1}{\alpha^2 - k^2} \\ &= \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - k^2} \\ &= \pi \cot \pi\alpha. \end{aligned}$$

Άσκηση 5.3.

Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν η f είναι άρτια, τότε $\widehat{f}(-k) = \widehat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και η $S(f)$ είναι σειρά συνημιτόνων.

Άσκηση 5.3.

Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν η f είναι άρτια, τότε $\widehat{f}(-k) = \widehat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και η $S(f)$ είναι σειρά συνημιτόνων.

- (α) Κάνοντας την αντικατάσταση $y = -x$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}\widehat{f}(-k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i(-k)x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(-y) e^{-iky} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iky} dy = \widehat{f}(k).\end{aligned}$$

Άσκηση 5.3.

Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν η f είναι άρτια, τότε $\widehat{f}(-k) = \widehat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και η $S(f)$ είναι σειρά συνημιτόνων.

- (α) Κάνοντας την αντικατάσταση $y = -x$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}\widehat{f}(-k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i(-k)x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(-y) e^{-iky} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iky} dy = \widehat{f}(k).\end{aligned}$$

- Έπεται ότι $b_k(f) = i(\widehat{f}(k) - \widehat{f}(-k)) = 0$ για κάθε $k \geq 1$, άρα η $S(f)$ είναι σειρά συνημιτόνων.

Άσκηση 5.3.

Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι:

(β) Αν η f είναι περιττή, τότε $\widehat{f}(-k) = -\widehat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και η $S(f)$ είναι σειρά ημιτόνων.

Άσκηση 5.3.

Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι:

(β) Αν η f είναι περιττή, τότε $\widehat{f}(-k) = -\widehat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και η $S(f)$ είναι σειρά ημιτόνων.

- (β) Κάνοντας την αντικατάσταση $y = -x$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}\widehat{f}(-k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i(-k)x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(-y) e^{-iky} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (-f(y)) e^{-iky} dy = -\widehat{f}(k).\end{aligned}$$

Άσκηση 5.3.

Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι:

(β) Αν η f είναι περιττή, τότε $\widehat{f}(-k) = -\widehat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και η $S(f)$ είναι σειρά ημιτόνων.

- (β) Κάνοντας την αντικατάσταση $y = -x$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}\widehat{f}(-k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i(-k)x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(-y) e^{-iky} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (-f(y)) e^{-iky} dy = -\widehat{f}(k).\end{aligned}$$

- Έπεται ότι $a_k(f) = \widehat{f}(k) + \widehat{f}(-k) = 0$ για κάθε $k \geq 1$, άρα η $S(f)$ είναι σειρά ημιτόνων.

Άσκηση 5.3.

Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι:

(γ) Αν $f(x + \pi) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε $\hat{f}(k) = 0$ για κάθε περιττό ακέραιο k .

Άσκηση 5.3.

Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι:

(γ) Αν $f(x + \pi) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε $\widehat{f}(k) = 0$ για κάθε περιττό ακέραιο k .

- (γ) Γράφουμε

$$\begin{aligned} 2\pi\widehat{f}(k) &= \int_{-\pi}^0 f(x)e^{-ikx} dx + \int_0^{\pi} f(x)e^{-ikx} dx \\ &= \int_0^{\pi} f(y - \pi)e^{-ik(y - \pi)} dy + \int_0^{\pi} f(x)e^{-ikx} dx \\ &= e^{ik\pi} \int_0^{\pi} f(y)e^{-iky} dy + \int_0^{\pi} f(x)e^{-ikx} dx \\ &= - \int_0^{\pi} f(x)e^{-ikx} dx + \int_0^{\pi} f(x)e^{-ikx} dx \\ &= 0, \end{aligned}$$

διότι $f(y - \pi) = f(y)$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$ από την υπόθεση, και $e^{ik\pi} = -1$ αν ο k είναι περιττός.

Άσκηση 5.3.

Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι:

(δ) Αν η f παίρνει πραγματικές τιμές τότε $\overline{\hat{f}(k)} = \hat{f}(-k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Αν, επιπλέον, υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής, τότε ισχύει και το αντίστροφο.

Άσκηση 5.3.

Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι:

(δ) Αν η f παίρνει πραγματικές τιμές τότε $\overline{\widehat{f}(k)} = \widehat{f}(-k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Αν, επιπλέον, υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής, τότε ισχύει και το αντίστροφο.

- (δ) Γράφουμε

$$\begin{aligned}\overline{\widehat{f}(k)} &= \overline{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x) e^{-ikx}} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i(-k)x} dx = \widehat{f}(-k).\end{aligned}$$

- Αντίστροφα, αν υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής και $\widehat{\overline{f(k)}} = \widehat{f(-k)}$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, τότε από την

$$\widehat{\overline{f}}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)} e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x) e^{ikx}} dx = \overline{\widehat{f(-k)}} = \widehat{f}(k)$$

βλέπουμε ότι η συνεχής συνάρτηση $g = f - \overline{f}$ έχει συντελεστές Fourier

$$\widehat{g}(k) = \widehat{f}(k) - \widehat{\overline{f}}(k) = \widehat{f}(k) - \widehat{f}(k) = 0,$$

συνεπώς $g \equiv 0$.

- Αντίστροφα, αν υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής και $\widehat{\overline{f(k)}} = \widehat{f(-k)}$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, τότε από την

$$\widehat{\overline{f}}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)} e^{-ikx} dx = \overline{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{ikx} dx} = \overline{\widehat{f}(-k)} = \widehat{f}(k)$$

βλέπουμε ότι η συνεχής συνάρτηση $g = f - \overline{f}$ έχει συντελεστές Fourier

$$\widehat{g}(k) = \widehat{f}(k) - \widehat{\overline{f}}(k) = \widehat{f}(k) - \widehat{f}(k) = 0,$$

συνεπώς $g \equiv 0$.

- Έπεται ότι $f = \overline{f}$, άρα $f(x) \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 5.9.

Έστω $0 < \alpha \leq 1$ και έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -περιοδική συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι: υπάρχει σταθερά $C > 0$ ώστε, για κάθε k ,

$$|a_k(f)| \leq \frac{C}{k^\alpha} \quad \text{και} \quad |b_k(f)| \leq \frac{C}{k^\alpha}.$$

Άσκηση 5.9.

Έστω $0 < \alpha \leq 1$ και έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -περιοδική συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι: υπάρχει σταθερά $C > 0$ ώστε, για κάθε k ,

$$|a_k(f)| \leq \frac{C}{k^\alpha} \quad \text{και} \quad |b_k(f)| \leq \frac{C}{k^\alpha}.$$

- Έστω $k \in \mathbb{N}$. Κάνοντας την αντικατάσταση $y = x + \pi/k$, έχουμε

$$\begin{aligned} a_k(f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi+\pi/k}^{\pi+\pi/k} f(x - \pi/k) \cos(kx - \pi) dx \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi+\pi/k}^{\pi+\pi/k} f(x - \pi/k) \cos(kx) dx = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x - \pi/k) \cos(kx) dx, \end{aligned}$$

λόγω της 2π -περιοδικότητας της f .

- Τότε, μπορούμε να γράψουμε

$$a_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f(x - \pi/k)] \cos(kx) dx,$$

και χρησιμοποιώντας την υπόθεση παίρνουμε

$$|a_k(f)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f(x - \pi/k)| |\cos(kx)| dx \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} M |\pi/k|^\alpha dx = \frac{C}{k^\alpha},$$

όπου $C = M\pi^\alpha$. Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι $|b_k(f)| \leq C/k^\alpha$.