

Αρμονική Ανάλυση

Μάθημα 9

Μάρτιος 2024

Σειρές Fourier

- Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε τον k -οστό συντελεστή Fourier της f μέσω της

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (1)$$

Σειρές Fourier

- Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε τον k -οστό συντελεστή Fourier της f μέσω της

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (1)$$

- Παρατηρούμε ότι

$$|\widehat{f}(k)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx = \|f\|_1,$$

χρησιμοποιώντας και το γεγονός ότι $|e^{-ikx}| = 1$.

Σειρές Fourier

- Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε τον k -οστό συντελεστή Fourier της f μέσω της

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (1)$$

- Παρατηρούμε ότι

$$|\widehat{f}(k)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx = \|f\|_1,$$

χρησιμοποιώντας και το γεγονός ότι $|e^{-ikx}| = 1$.

- Η σειρά Fourier της f είναι η σειρά συναρτήσεων

$$S(f, x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{ikx}.$$

Σειρές Fourier

- Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε τον k -οστό συντελεστή Fourier της f μέσω της

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (1)$$

- Παρατηρούμε ότι

$$|\widehat{f}(k)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx = \|f\|_1,$$

χρησιμοποιώντας και το γεγονός ότι $|e^{-ikx}| = 1$.

- Η σειρά Fourier της f είναι η σειρά συναρτήσεων

$$S(f, x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{ikx}.$$

- Το n -οστό μερικό άθροισμα της σειράς Fourier της f είναι το μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο

$$s_n(f, x) = \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{ikx}.$$

- Θα χρησιμοποιούμε συχνά την εξής παρατήρηση: Αν

$$p(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$$

είναι ένα τριγωνομετρικό πολώνυμο βαθμού n τότε για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ έχουμε

$$\widehat{p}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(x) e^{-ikx} dx = \sum_{s=-n}^n c_s \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(s-k)x} dx = \begin{cases} c_k & \text{αν } |k| \leq n, \\ 0 & \text{αν } |k| > n \end{cases}, \quad (2)$$

διότι το ολοκλήρωμα της $e^{i(s-k)x}$ είναι ίσο με 2π αν $s = k$ και με 0 για όλα τα υπόλοιπα s .

Πρόταση 2

Έστω $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\widehat{f}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Τότε, $f \equiv 0$.

Πρόταση 2

Έστω $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\widehat{f}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Τότε, $f \equiv 0$.

- Για την απόδειξη χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι πυκνά στον $(\mathcal{C}(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$.

- Απόδειξη: Από την υπόθεση και από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος έπεται ότι για κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο $p(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$ ισχύει ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)p(x) dx = \sum_{k=-n}^n c_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx} dx = \sum_{k=-n}^n c_k \cdot 2\pi \hat{f}(-k) = 0. \quad (3)$$

- Απόδειξη: Από την υπόθεση και από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος έπεται ότι για κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο $p(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$ ισχύει ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)p(x) dx = \sum_{k=-n}^n c_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx} dx = \sum_{k=-n}^n c_k \cdot 2\pi \hat{f}(-k) = 0. \quad (3)$$

- Έχουμε $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. Από το τριγωνομετρικό θεώρημα Weierstrass υπάρχει ακολουθία $\{p_m\}$ τριγωνομετρικών πολυωνύμων ώστε $\|f - p_m\|_{\infty} \rightarrow 0$.

- Απόδειξη: Από την υπόθεση και από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος έπεται ότι για κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο $p(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$ ισχύει ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)p(x) dx = \sum_{k=-n}^n c_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx} dx = \sum_{k=-n}^n c_k \cdot 2\pi \hat{f}(-k) = 0. \quad (3)$$

- Έχουμε $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. Από το τριγωνομετρικό θεώρημα Weierstrass υπάρχει ακολουθία $\{p_m\}$ τριγωνομετρικών πολυωνύμων ώστε $\|f - p_m\|_{\infty} \rightarrow 0$.
- Παρατηρήστε ότι οι $\overline{p_m}$ είναι επίσης τριγωνομετρικά πολυώνυμα και

$$\|\overline{f} - \overline{p_m}\|_{\infty} = \|f - p_m\|_{\infty} \rightarrow 0.$$

- Χρησιμοποιώντας και την (3) για το $\overline{p_m}$, για κάθε m έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{f(x)} dx - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{p_m(x)} dx \right| \\&= \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\overline{f(x)} - \overline{p_m(x)}) dx \right| \\&\leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| |\overline{f(x)} - \overline{p_m(x)}| dx \\&\leq \int_{-\pi}^{\pi} \|f\|_{\infty} \|\overline{f} - \overline{p_m}\|_{\infty} dx \\&= 2\pi \|f\|_{\infty} \|f - p_m\|_{\infty} \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

- Χρησιμοποιώντας και την (3) για το $\overline{p_m}$, για κάθε m έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{f(x)} dx - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{p_m(x)} dx \right| \\&= \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\overline{f(x)} - \overline{p_m(x)}) dx \right| \\&\leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| |\overline{f(x)} - \overline{p_m(x)}| dx \\&\leq \int_{-\pi}^{\pi} \|f\|_{\infty} \|\overline{f} - \overline{p_m}\|_{\infty} dx \\&= 2\pi \|f\|_{\infty} \|f - p_m\|_{\infty} \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

- Έπεται ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 0,$$

και, αφού η f είναι συνεχής, συμπεραίνουμε ότι $f \equiv 0$.

Λήμμα Riemann-Lebesgue

Λήμμα Riemann-Lebesgue

Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Τότε,

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} \widehat{f}(k) = 0.$$

Λήμμα Riemann-Lebesgue

Λήμμα Riemann-Lebesgue

Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Τότε,

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} \widehat{f}(k) = 0.$$

Για την απόδειξη του Λήμματος Riemann-Lebesgue χρησιμοποιούμε ένα λήμμα προσέγγισης.

Λήμμα 2

Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ και έστω $\varepsilon > 0$. Τότε, υπάρχει $g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\|g\|_{\infty} \leq \sqrt{2}\|f\|_{\infty}$ και $\|f - g\|_1 \leq \varepsilon$.

Λήμμα Riemann-Lebesgue

- Απόδειξη του Λήμματος Riemann-Lebesgue: Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο p ώστε

$$\|f - p\|_1 \leq \varepsilon.$$

Λήμμα Riemann-Lebesgue

- Απόδειξη του Λήμματος Riemann-Lebesgue: Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο p ώστε

$$\|f - p\|_1 \leq \varepsilon.$$

- Πράγματι, αυτό είναι άμεσο από το Λήμμα 2 και το τριγωνομετρικό θεώρημα Weierstrass: βρίσκουμε αρχικά $g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\|f - g\|_1 \leq \varepsilon/2$ και στη συνέχεια τριγωνομετρικό πολυώνυμο p τέτοιο ώστε $\|g - p\|_\infty \leq \varepsilon/2$.

Λήμμα Riemann-Lebesgue

- Απόδειξη του Λήμματος Riemann-Lebesgue: Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο p ώστε

$$\|f - p\|_1 \leq \varepsilon.$$

- Πράγματι, αυτό είναι άμεσο από το Λήμμα 2 και το τριγωνομετρικό θεώρημα Weierstrass: βρίσκουμε αρχικά $g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\|f - g\|_1 \leq \varepsilon/2$ και στη συνέχεια τριγωνομετρικό πολυώνυμο p τέτοιο ώστε $\|g - p\|_\infty \leq \varepsilon/2$.
- Τότε, $\|g - p\|_1 \leq \|g - p\|_\infty \leq \varepsilon/2$, και από την τριγωνική ανισότητα για την $\|\cdot\|_1$ έπεται ότι

$$\|f - p\|_1 \leq \|f - g\|_1 + \|g - p\|_1 \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Λήμμα Riemann-Lebesgue

- Απόδειξη του Λήμματος Riemann-Lebesgue: Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο p ώστε

$$\|f - p\|_1 \leq \varepsilon.$$

- Πράγματι, αυτό είναι άμεσο από το Λήμμα 2 και το τριγωνομετρικό θεώρημα Weierstrass: βρίσκουμε αρχικά $g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\|f - g\|_1 \leq \varepsilon/2$ και στη συνέχεια τριγωνομετρικό πολυώνυμο p τέτοιο ώστε $\|g - p\|_\infty \leq \varepsilon/2$.
- Τότε, $\|g - p\|_1 \leq \|g - p\|_\infty \leq \varepsilon/2$, και από την τριγωνική ανισότητα για την $\|\cdot\|_1$ έπεται ότι

$$\|f - p\|_1 \leq \|f - g\|_1 + \|g - p\|_1 \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

- Έστω $n = n(p)$ ο βαθμός του p . Για κάθε $|k| > n$ ισχύει

$$\widehat{f}(k) = \widehat{f - p}(k) + \widehat{p}(k) = \widehat{f - p}(k),$$

διότι $\widehat{p}(k) = 0$ από την (2).

Λήμμα Riemann-Lebesgue

- Απόδειξη του Λήμματος Riemann-Lebesgue: Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο p ώστε

$$\|f - p\|_1 \leq \varepsilon.$$

- Πράγματι, αυτό είναι άμεσο από το Λήμμα 2 και το τριγωνομετρικό θεώρημα Weierstrass: βρίσκουμε αρχικά $g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\|f - g\|_1 \leq \varepsilon/2$ και στη συνέχεια τριγωνομετρικό πολυώνυμο p τέτοιο ώστε $\|g - p\|_\infty \leq \varepsilon/2$.
- Τότε, $\|g - p\|_1 \leq \|g - p\|_\infty \leq \varepsilon/2$, και από την τριγωνική ανισότητα για την $\|\cdot\|_1$ έπεται ότι

$$\|f - p\|_1 \leq \|f - g\|_1 + \|g - p\|_1 \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

- Έστω $n = n(p)$ ο βαθμός του p . Για κάθε $|k| > n$ ισχύει

$$\widehat{f}(k) = \widehat{f - p}(k) + \widehat{p}(k) = \widehat{f - p}(k),$$

διότι $\widehat{p}(k) = 0$ από την (2).

- Συνεπώς,

$$|\widehat{f}(k)| = |\widehat{f - p}(k)| \leq \|f - p\|_1 \leq \varepsilon$$

για κάθε $|k| > n$.

Λήμμα Riemann-Lebesgue

- Απόδειξη του Λήμματος Riemann-Lebesgue: Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο p ώστε

$$\|f - p\|_1 \leq \varepsilon.$$

- Πράγματι, αυτό είναι άμεσο από το Λήμμα 2 και το τριγωνομετρικό θεώρημα Weierstrass: βρίσκουμε αρχικά $g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\|f - g\|_1 \leq \varepsilon/2$ και στη συνέχεια τριγωνομετρικό πολυώνυμο p τέτοιο ώστε $\|g - p\|_\infty \leq \varepsilon/2$.
- Τότε, $\|g - p\|_1 \leq \|g - p\|_\infty \leq \varepsilon/2$, και από την τριγωνική ανισότητα για την $\|\cdot\|_1$ έπεται ότι

$$\|f - p\|_1 \leq \|f - g\|_1 + \|g - p\|_1 \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

- Έστω $n = n(p)$ ο βαθμός του p . Για κάθε $|k| > n$ ισχύει

$$\widehat{f}(k) = \widehat{f - p}(k) + \widehat{p}(k) = \widehat{f - p}(k),$$

διότι $\widehat{p}(k) = 0$ από την (2).

- Συνεπώς,

$$|\widehat{f}(k)| = |\widehat{f - p}(k)| \leq \|f - p\|_1 \leq \varepsilon$$

για κάθε $|k| > n$.

- Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $\lim_{|k| \rightarrow \infty} \widehat{f}(k) = 0$.

Σειρές Fourier C^m -συναρτήσεων

- Έστω $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Για κάθε $k \neq 0$, ολοκληρώνοντας κατά μέρη γράφουμε

$$\begin{aligned} 2\pi \widehat{f}(k) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = f(x) \frac{-e^{-ikx}}{ik} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{ik} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{ik} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-ikx} dx, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι, αφού η f είναι 2π -περιοδική,

$$f(x) \frac{-e^{-ikx}}{ik} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Σειρές Fourier C^m -συναρτήσεων

- Έστω $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Για κάθε $k \neq 0$, ολοκληρώνοντας κατά μέρη γράφουμε

$$\begin{aligned} 2\pi \widehat{f}(k) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = f(x) \frac{-e^{-ikx}}{ik} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{ik} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{ik} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-ikx} dx, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι, αφού η f είναι 2π -περιοδική,

$$f(x) \frac{-e^{-ikx}}{ik} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

- Με άλλα λόγια,

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{ik} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{ik} \widehat{f'}(k)$$

για κάθε $k \neq 0$.

Σειρές Fourier C^m -συναρτήσεων

- Έστω $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Για κάθε $k \neq 0$, ολοκληρώνοντας κατά μέρη γράφουμε

$$\begin{aligned} 2\pi \widehat{f}(k) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = f(x) \frac{-e^{-ikx}}{ik} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{ik} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{ik} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-ikx} dx, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποίησαμε το γεγονός ότι, αφού η f είναι 2π -περιοδική,

$$f(x) \frac{-e^{-ikx}}{ik} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

- Με άλλα λόγια,

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{ik} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{ik} \widehat{f'}(k)$$

για κάθε $k \neq 0$.

- Από την περιοδικότητα της f είναι φανερό ότι

$$2\pi \widehat{f'}(0) = \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) = f(\pi) - f(-\pi) = 0.$$

Σειρές Fourier C^m -συναρτήσεων

- Έστω $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Για κάθε $k \neq 0$, ολοκληρώνοντας κατά μέρη γράφουμε

$$\begin{aligned} 2\pi \widehat{f}(k) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = f(x) \frac{-e^{-ikx}}{ik} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{ik} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{ik} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-ikx} dx, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποίησαμε το γεγονός ότι, αφού η f είναι 2π -περιοδική,

$$f(x) \frac{-e^{-ikx}}{ik} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

- Με άλλα λόγια,

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{ik} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{ik} \widehat{f'}(k)$$

για κάθε $k \neq 0$.

- Από την περιοδικότητα της f είναι φανερό ότι

$$2\pi \widehat{f'}(0) = \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) = f(\pi) - f(-\pi) = 0.$$

- Συνεπώς,

$$\widehat{f'}(k) = ik \widehat{f}(k), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

Σειρές Fourier C^m -συναρτήσεων

- Ομοίως, αν η $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, τότε

$$\widehat{f''}(k) = (ik)\widehat{f'}(k) = (ik)^2\widehat{f}(k)$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Σειρές Fourier C^m -συναρτήσεων

- Ομοίως, αν η $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, τότε

$$\widehat{f''}(k) = (ik)\widehat{f'}(k) = (ik)^2\widehat{f}(k)$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

- Επαγωγικά, παίρνουμε την ακόλουθη πρόταση.

Σειρές Fourier C^m -συναρτήσεων

- Ομοίως, αν η $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, τότε

$$\widehat{f''}(k) = (ik)\widehat{f'}(k) = (ik)^2\widehat{f}(k)$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

- Επαγωγικά, παίρνουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3

Έστω $f \in C^m(\mathbb{T})$, δηλαδή η f είναι m φορές συνεχώς παραγωγίσιμη. Τότε,

$$\widehat{f^{(m)}}(k) = (ik)^m \widehat{f}(k)$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, και

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} [k^m \widehat{f}(k)] = 0.$$

Ειδικότερα, υπάρχει $C > 0$ ώστε, για κάθε $k \neq 0$,

$$|\widehat{f}(k)| \leq \frac{C}{|k|^m}.$$

Σειρές Fourier C^m -συναρτήσεων

- Ομοίως, αν η $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, τότε

$$\widehat{f''}(k) = (ik)\widehat{f'}(k) = (ik)^2\widehat{f}(k)$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

- Επαγωγικά, παίρνουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3

Έστω $f \in C^m(\mathbb{T})$, δηλαδή η f είναι m φορές συνεχώς παραγωγίσιμη. Τότε,

$$\widehat{f^{(m)}}(k) = (ik)^m \widehat{f}(k)$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, και

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} [k^m \widehat{f}(k)] = 0.$$

Ειδικότερα, υπάρχει $C > 0$ ώστε, για κάθε $k \neq 0$,

$$|\widehat{f}(k)| \leq \frac{C}{|k|^m}.$$

Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια της (4), την οποία εφαρμόζουμε, διαδοχικά, m φορές. Ο τελευταίος ισχυρισμός προκύπτει από το λήμμα Riemann-Lebesgue το οποίο εφαρμόζουμε για την $f^{(m)}$.

Σειρές Fourier C^m -συναρτήσεων

- Θα εκμεταλλευτούμε την Πρόταση 3 για να δείξουμε ότι η σειρά Fourier μιας συνάρτησης $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο συγκλίνει ομοιόμορφα στην f .

Σειρές Fourier C^m -συναρτήσεων

- Θα εκμεταλλευτούμε την Πρόταση 3 για να δείξουμε ότι η σειρά Fourier μιας συνάρτησης $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο συγκλίνει ομοιόμορφα στην f .
- Ξεκινάμε με την επόμενη πρόταση, η οποία δείχνει ότι αν τα μερικά αθροίσματα s_n μιας τριγωνομετρικής σειράς

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

συγκλίνουν σε μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση f ως προς την $\|\cdot\|_1$, τότε $c_k = \hat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Σειρές Fourier C^m -συναρτήσεων

- Θα εκμεταλλευτούμε την Πρόταση 3 για να δείξουμε ότι η σειρά Fourier μιας συνάρτησης $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο συγκλίνει ομοιόμορφα στην f .
- Ξεκινάμε με την επόμενη πρόταση, η οποία δείχνει ότι αν τα μερικά αθροίσματα s_n μιας τριγωνομετρικής σειράς

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

συγκλίνουν σε μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση f ως προς την $\|\cdot\|_1$, τότε $c_k = \widehat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Πρόταση 4

Έστω $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ μια τριγωνομετρική σειρά και έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Αν $\|s_n - f\|_1 \rightarrow 0$ καθώς το $n \rightarrow \infty$, τότε

$$c_k = \widehat{f}(k) \quad \text{για κάθε } k \in \mathbb{Z}.$$

Σειρές Fourier C^m -συναρτήσεων

- Σταθεροποιούμε $k \in \mathbb{Z}$ και γράφουμε

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - s_n(x)) e^{-ikx} dx + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_n(x) e^{-ikx} dx.$$

Σειρές Fourier C^m -συναρτήσεων

- Σταθεροποιούμε $k \in \mathbb{Z}$ και γράφουμε

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - s_n(x)) e^{-ikx} dx + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_n(x) e^{-ikx} dx.$$

- Για κάθε $n \geq |k|$ έχουμε ότι

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_n(x) e^{-ikx} dx = c_k.$$

Σειρές Fourier C^m -συναρτήσεων

- Σταθεροποιούμε $k \in \mathbb{Z}$ και γράφουμε

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - s_n(x)) e^{-ikx} dx + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_n(x) e^{-ikx} dx.$$

- Για κάθε $n \geq |k|$ έχουμε ότι

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_n(x) e^{-ikx} dx = c_k.$$

- Επομένως, για κάθε $n \geq |k|$ έχουμε

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(k) - c_k| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - s_n(x)) e^{-ikx} dx \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - s_n(x)| dx = \|f - s_n\|_1 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

καθώς το $n \rightarrow \infty$.

Σειρές Fourier C^m -συναρτήσεων

- Σταθεροποιούμε $k \in \mathbb{Z}$ και γράφουμε

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - s_n(x)) e^{-ikx} dx + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_n(x) e^{-ikx} dx.$$

- Για κάθε $n \geq |k|$ έχουμε ότι

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_n(x) e^{-ikx} dx = c_k.$$

- Επομένως, για κάθε $n \geq |k|$ έχουμε

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(k) - c_k| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - s_n(x)) e^{-ikx} dx \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - s_n(x)| dx = \|f - s_n\|_1 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

καθώς το $n \rightarrow \infty$.

- Έπεται ότι $c_k = \widehat{f}(k)$.

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 4 και το θεώρημα μοναδικότητας μπορούμε να δώσουμε καταφατική απάντηση στο ερώτημα της σημειακής σύγκλισης της $s_n(f)$ στην f αν η f είναι συνεχής και η σειρά των συντελεστών Fourier της f συγκλίνει απολύτως.

Σειρές Fourier C^m -συναρτήσεων

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 4 και το θεώρημα μοναδικότητας μπορούμε να δώσουμε καταφατική απάντηση στο ερώτημα της σημειακής σύγκλισης της $s_n(f)$ στην f αν η f είναι συνεχής και η σειρά των συντελεστών Fourier της f συγκλίνει απολύτως.

Θεώρημα 1

Έστω $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. Υποθέτουμε ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)| < +\infty.$$

Τότε, η σειρά Fourier της f συγκλίνει ομοιόμορφα στην f . Δηλαδή,

$$s_n(f) \longrightarrow f \text{ ομοιόμορφα.}$$

Σειρές Fourier C^m -συναρτήσεων

- Απόδειξη: Από την υπόθεση ότι $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)| < +\infty$ βλέπουμε ότι η ακολουθία συναρτήσεων

$$s_n(f, x) = \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e^{ikx}$$

είναι ομοιόμορφα βασική: πράγματι, για κάθε $m > n$ έχουμε

$$\|s_m(f) - s_n(f)\|_{\infty} = \max_{x \in \mathbb{T}} |s_m(f, x) - s_n(f, x)| \leq \sum_{n < |k| \leq m} |\hat{f}(k)| \rightarrow 0$$

όταν $m, n \rightarrow \infty$.

Σειρές Fourier C^m -συναρτήσεων

- Απόδειξη: Από την υπόθεση ότι $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)| < +\infty$ βλέπουμε ότι η ακολουθία συναρτήσεων

$$s_n(f, x) = \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e^{ikx}$$

είναι ομοιόμορφα βασική: πράγματι, για κάθε $m > n$ έχουμε

$$\|s_m(f) - s_n(f)\|_{\infty} = \max_{x \in \mathbb{T}} |s_m(f, x) - s_n(f, x)| \leq \sum_{n < |k| \leq m} |\hat{f}(k)| \rightarrow 0$$

όταν $m, n \rightarrow \infty$.

- Συνεπώς, η $\{s_n(f)\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση $g \in C(\mathbb{T})$.

Σειρές Fourier C^m -συναρτήσεων

- Απόδειξη: Από την υπόθεση ότι $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)| < +\infty$ βλέπουμε ότι η ακολουθία συναρτήσεων

$$s_n(f, x) = \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e^{ikx}$$

είναι ομοιόμορφα βασική: πράγματι, για κάθε $m > n$ έχουμε

$$\|s_m(f) - s_n(f)\|_{\infty} = \max_{x \in \mathbb{T}} |s_m(f, x) - s_n(f, x)| \leq \sum_{n < |k| \leq m} |\hat{f}(k)| \rightarrow 0$$

όταν $m, n \rightarrow \infty$.

- Συνεπώς, η $\{s_n(f)\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση $g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$.
- Ειδικότερα,

$$\|s_n(f) - g\|_1 \leq \|s_n(f) - g\|_{\infty} \rightarrow 0,$$

οπότε η Πρόταση 4 μας εξασφαλίζει ότι

$$\hat{f}(k) = \hat{g}(k)$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Σειρές Fourier C^m -συναρτήσεων

- Απόδειξη: Από την υπόθεση ότι $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)| < +\infty$ βλέπουμε ότι η ακολουθία συναρτήσεων

$$s_n(f, x) = \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e^{ikx}$$

είναι ομοιόμορφα βασική: πράγματι, για κάθε $m > n$ έχουμε

$$\|s_m(f) - s_n(f)\|_{\infty} = \max_{x \in \mathbb{T}} |s_m(f, x) - s_n(f, x)| \leq \sum_{n < |k| \leq m} |\hat{f}(k)| \rightarrow 0$$

όταν $m, n \rightarrow \infty$.

- Συνεπώς, η $\{s_n(f)\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση $g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$.
- Ειδικότερα,

$$\|s_n(f) - g\|_1 \leq \|s_n(f) - g\|_{\infty} \rightarrow 0,$$

οπότε η Πρόταση 4 μας εξασφαλίζει ότι

$$\hat{f}(k) = \hat{g}(k)$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

- Αφού οι συνεχείς συναρτήσεις f και g έχουν τους ίδιους συντελεστές Fourier, από το Πόρισμα 1 συμπεραίνουμε ότι $g \equiv f$. Συνεπώς, $s_n(f) \rightarrow f$ ομοιόμορφα.

- Η υπόθεση $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| < \infty$ του Θεωρήματος 1 εξασφαλίζεται, για παράδειγμα, αν η f έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο.

- Η υπόθεση $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| < \infty$ του Θεωρήματος 1 εξασφαλίζεται, για παράδειγμα, αν η f έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο.
- Αυτό προκύπτει από την Πρόταση 4, αφού υπάρχει $C > 0$ ώστε, για κάθε $k \neq 0$,

$$|\widehat{f}(k)| \leq \frac{C}{|k|^2}.$$

Συνεπώς, έχουμε άμεσα την ακόλουθη πρόταση.

Σειρές Fourier C^m -συναρτήσεων

- Η υπόθεση $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| < \infty$ του Θεωρήματος 1 εξασφαλίζεται, για παράδειγμα, αν η f έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο.
- Αυτό προκύπτει από την Πρόταση 4, αφού υπάρχει $C > 0$ ώστε, για κάθε $k \neq 0$,

$$|\widehat{f}(k)| \leq \frac{C}{|k|^2}.$$

Συνεπώς, έχουμε άμεσα την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 5

Έστω $f \in C^2(\mathbb{T})$, δηλαδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και η f'' είναι συνεχής. Τότε, η σειρά Fourier της f συγκλίνει ομοιόμορφα στην f .

- Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Ένα φυσιολογικό ερώτημα που προκύπτει από το Θεώρημα 1 είναι να δοθούν ικανές συνθήκες ώστε η σειρά $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|$ να συγκλίνει: αυτό εξασφαλίζει, όπως είδαμε, την ομοιόμορφη σύγκλιση της $S(f)$ στην f .

- Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Ένα φυσιολογικό ερώτημα που προκύπτει από το Θεώρημα 1 είναι να δοθούν ικανές συνθήκες ώστε η σειρά $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|$ να συγκλίνει: αυτό εξασφαλίζει, όπως είδαμε, την ομοιόμορφη σύγκλιση της $S(f)$ στην f .
- Είδαμε ότι αρκεί η συνέχεια της f'' .

Σειρές Fourier C^m -συναρτήσεων

- Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Ένα φυσιολογικό ερώτημα που προκύπτει από το Θεώρημα 1 είναι να δοθούν ικανές συνθήκες ώστε η σειρά $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|$ να συγκλίνει: αυτό εξασφαλίζει, όπως είδαμε, την ομοιόμορφη σύγκλιση της $S(f)$ στην f .
- Είδαμε ότι αρκεί η συνέχεια της f'' .
- Όπως θα δούμε αργότερα, η σύγκλιση της σειράς $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|$ εξασφαλίζεται και με ασθενέστερες υποθέσεις για την f . Αρκεί να υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη.

Σειρές Fourier C^m -συναρτήσεων

- Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Ένα φυσιολογικό ερώτημα που προκύπτει από το Θεώρημα 1 είναι να δοθούν ικανές συνθήκες ώστε η σειρά $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|$ να συγκλίνει: αυτό εξασφαλίζει, όπως είδαμε, την ομοιόμορφη σύγκλιση της $S(f)$ στην f .
- Είδαμε ότι αρκεί η συνέχεια της f'' .
- Όπως θα δούμε αργότερα, η σύγκλιση της σειράς $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|$ εξασφαλίζεται και με ασθενέστερες υποθέσεις για την f . Αρκεί να υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη.
- Ακόμα ασθενέστερη συνθήκη για την f είναι να ικανοποιεί *συνθήκη Hölder τάξης* $\alpha > 1/2$: δηλαδή, να υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 1

Ορίζουμε $f(x) = \pi - x$ αν $0 < x < 2\pi$, $f(0) = f(2\pi) = 0$, και επεκτείνουμε την f σε μια 2π -περιοδική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η σειρά Fourier της f είναι η

$$S(f, x) \sim 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}.$$

Παράδειγμα 1

Ορίζουμε $f(x) = \pi - x$ αν $0 < x < 2\pi$, $f(0) = f(2\pi) = 0$, και επεκτείνουμε την f σε μια 2π -περιοδική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η σειρά Fourier της f είναι η

$$S(f, x) \sim 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}.$$

- Είναι πιο βολικό να θεωρήσουμε την f στο $[-\pi, \pi]$.

Παράδειγμα 1

Ορίζουμε $f(x) = \pi - x$ αν $0 < x < 2\pi$, $f(0) = f(2\pi) = 0$, και επεκτείνουμε την f σε μια 2π -περιοδική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η σειρά Fourier της f είναι η

$$S(f, x) \sim 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}.$$

- Είναι πιο βολικό να θεωρήσουμε την f στο $[-\pi, \pi]$.
- Έχουμε $f(x) = \pi - x$ αν $0 < x < \pi$ και $f(x) = f(x + 2\pi) = -\pi - x$ αν $-\pi < x < 0$.

Παράδειγμα 1

Ορίζουμε $f(x) = \pi - x$ αν $0 < x < 2\pi$, $f(0) = f(2\pi) = 0$, και επεκτείνουμε την f σε μια 2π -περιοδική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η σειρά Fourier της f είναι η

$$S(f, x) \sim 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}.$$

- Είναι πιο βολικό να θεωρήσουμε την f στο $[-\pi, \pi]$.
- Έχουμε $f(x) = \pi - x$ αν $0 < x < \pi$ και $f(x) = f(x + 2\pi) = -\pi - x$ αν $-\pi < x < 0$.
- Παρατηρούμε ότι

$$f(-x) = -\pi + x = -(\pi - x) = -f(x)$$

για κάθε $0 < x < \pi$, δηλαδή η f είναι περιττή στο $[-\pi, \pi]$.

Παράδειγμα 1

Ορίζουμε $f(x) = \pi - x$ αν $0 < x < 2\pi$, $f(0) = f(2\pi) = 0$, και επεκτείνουμε την f σε μια 2π -περιοδική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η σειρά Fourier της f είναι η

$$S(f, x) \sim 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}.$$

- Είναι πιο βολικό να θεωρήσουμε την f στο $[-\pi, \pi]$.
- Έχουμε $f(x) = \pi - x$ αν $0 < x < \pi$ και $f(x) = f(x + 2\pi) = -\pi - x$ αν $-\pi < x < 0$.
- Παρατηρούμε ότι

$$f(-x) = -\pi + x = -(\pi - x) = -f(x)$$

για κάθε $0 < x < \pi$, δηλαδή η f είναι περιττή στο $[-\pi, \pi]$.

- Συνεπώς,

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = 0$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Ομοίως, $a_0(f) = 0$.

- Υπολογίζουμε τους συντελεστές $b_k(f)$: αφού η $f(x) \sin kx$ είναι άρτια, έχουμε

$$\begin{aligned} b_k(f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) \sin kx \, dx \\ &= \left[-2 \frac{(\pi - x) \cos kx}{\pi k} \right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos kx}{k} \, dx \\ &= \frac{2\pi}{\pi k} - \left[\frac{2 \sin kx}{\pi k^2} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{k}. \end{aligned}$$

- Υπολογίζουμε τους συντελεστές $b_k(f)$: αφού η $f(x) \sin kx$ είναι άρτια, έχουμε

$$\begin{aligned} b_k(f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) \sin kx \, dx \\ &= \left[-2 \frac{(\pi - x) \cos kx}{\pi k} \right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos kx}{k} \, dx \\ &= \frac{2\pi}{\pi k} - \left[\frac{2 \sin kx}{\pi k^2} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{k}. \end{aligned}$$

- Έπεται ότι

$$S(f, x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}.$$

Παράδειγμα 2

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (\pi - x)^2$ στο $[0, 2\pi]$ και την επεκτείνουμε σε μια 2π -περιοδική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι

$$S(f, x) \sim \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}.$$

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω, αποδείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Παράδειγμα 2

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (\pi - x)^2$ στο $[0, 2\pi]$ και την επεκτείνουμε σε μια 2π -περιοδική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι

$$S(f, x) \sim \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}.$$

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω, αποδείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

- Παρατηρούμε ότι $f(0) = f(2\pi)$, άρα η f επεκτείνεται σε συνεχή 2π -περιοδική συνάρτηση.

Παράδειγμα 2

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (\pi - x)^2$ στο $[0, 2\pi]$ και την επεκτείνουμε σε μια 2π -περιοδική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι

$$S(f, x) \sim \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}.$$

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω, αποδείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

- Παρατηρούμε ότι $f(0) = f(2\pi)$, άρα η f επεκτείνεται σε συνεχή 2π -περιοδική συνάρτηση.
- Είναι πιο βολικό να θεωρήσουμε την f στο $[-\pi, \pi]$.

Παράδειγμα 2

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (\pi - x)^2$ στο $[0, 2\pi]$ και την επεκτείνουμε σε μια 2π -περιοδική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι

$$S(f, x) \sim \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}.$$

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω, αποδείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

- Παρατηρούμε ότι $f(0) = f(2\pi)$, άρα η f επεκτείνεται σε συνεχή 2π -περιοδική συνάρτηση.
- Είναι πιο βολικό να θεωρήσουμε την f στο $[-\pi, \pi]$.
- Έχουμε $f(x) = (\pi - x)^2$ αν $0 < x < \pi$ και $f(x) = f(x + 2\pi) = (-\pi - x)^2 = (\pi + x)^2$ αν $-\pi < x < 0$.

- Παρατηρήστε ότι

$$f(-x) = (\pi - x)^2 = f(x)$$

για κάθε $0 < x < \pi$, δηλαδή η f είναι άρτια στο $[-\pi, \pi]$.

- Παρατηρήστε ότι

$$f(-x) = (\pi - x)^2 = f(x)$$

για κάθε $0 < x < \pi$, δηλαδή η f είναι άρτια στο $[-\pi, \pi]$.

- Συνεπώς,

$$b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = 0$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

- Παρατηρήστε ότι

$$f(-x) = (\pi - x)^2 = f(x)$$

για κάθε $0 < x < \pi$, δηλαδή η f είναι άρτια στο $[-\pi, \pi]$.

- Συνεπώς,

$$b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = 0$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

- Για τον $a_0(f)$ γράφουμε

$$\frac{a_0(f)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - x)^2 \, dx = \left[\frac{-(\pi - x)^3}{6\pi} \right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi^3}{6\pi} = \frac{\pi^2}{3}.$$

Παραδείγματα

- Υπολογίζουμε τους συντελεστές $a_k(f)$, $k \geq 1$: αφού η $f(x) \cos kx$ είναι άρτια, έχουμε

$$\begin{aligned} a_k(f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x)^2 \cos kx \, dx \\ &= \left[\frac{2(\pi - x)^2 \sin kx}{\pi k} \right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{2(\pi - x) \sin kx}{k} \, dx \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x) \sin kx}{k} \, dx \\ &= \left[-\frac{4(\pi - x) \cos kx}{\pi k^2} \right]_0^{\pi} - \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos kx}{k^2} \, dx \\ &= \frac{4\pi}{\pi k^2} = \frac{4}{k^2}. \end{aligned}$$

Παραδείγματα

- Υπολογίζουμε τους συντελεστές $a_k(f)$, $k \geq 1$: αφού η $f(x) \cos kx$ είναι άρτια, έχουμε

$$\begin{aligned} a_k(f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x)^2 \cos kx \, dx \\ &= \left[\frac{2(\pi - x)^2 \sin kx}{\pi k} \right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{2(\pi - x) \sin kx}{k} \, dx \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x) \sin kx}{k} \, dx \\ &= \left[-\frac{4(\pi - x) \cos kx}{\pi k^2} \right]_0^{\pi} - \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos kx}{k^2} \, dx \\ &= \frac{4\pi}{\pi k^2} = \frac{4}{k^2}. \end{aligned}$$

- Έπεται ότι

$$S(f, x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}.$$

Παραδείγματα

- Αφού

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k(f)| + |b_k(f)|) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty,$$

η σειρά Fourier της f συγκλίνει ομοιόμορφα στην f .

Παραδείγματα

- Αφού

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k(f)| + |b_k(f)|) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty,$$

η σειρά Fourier της f συγκλίνει ομοιόμορφα στην f .

- Δηλαδή,

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Παραδείγματα

- Αφού

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k(f)| + |b_k(f)|) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty,$$

η σειρά Fourier της f συγκλίνει ομοιόμορφα στην f .

- Δηλαδή,

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- Ειδικότερα,

$$f(0) = \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$

απ' όπου παίρνουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{4} \left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{3} \right) = \frac{\pi^2}{6}.$$