

Αρμονική Ανάλυση

Μάθημα 8

Μάρτιος 2024

- Θεωρούμε συναρτήσεις με μιγαδικές τιμές. Κάθε συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ γράφεται στη μορφή $f = u + iv$, όπου $u(x) = \operatorname{Re}(f(x))$ και $v(x) = \operatorname{Im}(f(x))$, $x \in [a, b]$.

- Θεωρούμε συναρτήσεις με μιγαδικές τιμές. Κάθε συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ γράφεται στη μορφή $f = u + iv$, όπου $u(x) = \operatorname{Re}(f(x))$ και $v(x) = \operatorname{Im}(f(x))$, $x \in [a, b]$.
- Λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη αν οι u, v είναι ολοκληρώσιμες, και ορίζουμε

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b u(x) dx + i \int_a^b v(x) dx.$$

- Θεωρούμε συναρτήσεις με μιγαδικές τιμές. Κάθε συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ γράφεται στη μορφή $f = u + iv$, όπου $u(x) = \operatorname{Re}(f(x))$ και $v(x) = \operatorname{Im}(f(x))$, $x \in [a, b]$.
- Λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη αν οι u, v είναι ολοκληρώσιμες, και ορίζουμε

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b u(x) dx + i \int_a^b v(x) dx.$$

- Εύκολα ελέγχουμε ότι εξακολουθεί να ισχύει η γραμμικότητα: αν οι $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ είναι ολοκληρώσιμες και αν $t, s \in \mathbb{C}$ τότε

$$\int_a^b (tf(x) + sg(x)) dx = t \int_a^b f(x) dx + s \int_a^b g(x) dx.$$

Περιοδικές συναρτήσεις

- Θα χρησιμοποιούμε συχνά το εξής: αν η $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Περιοδικές συναρτήσεις

- Θα χρησιμοποιούμε συχνά το εξής: αν η $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

- Για την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού, γράφουμε

$$\int_a^b f(x) dx = R e^{ix_0}, \quad \text{όπου } R = \left| \int_a^b f(x) dx \right| \text{ και } x_0 \in \mathbb{R},$$

Περιοδικές συναρτήσεις

- Θα χρησιμοποιούμε συχνά το εξής: αν η $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

- Για την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού, γράφουμε

$$\int_a^b f(x) dx = R e^{ix_0}, \text{ όπου } R = \left| \int_a^b f(x) dx \right| \text{ και } x_0 \in \mathbb{R},$$

και παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx \right| &= e^{-ix_0} \int_a^b f(x) dx = \int_a^b e^{-ix_0} f(x) dx \\ &= \int_a^b \operatorname{Re}(e^{-ix_0} f(x)) dx \leq \int_a^b |e^{-ix_0} f(x)| dx = \int_a^b |f(x)| dx. \end{aligned}$$

Περιοδικές συναρτήσεις

- Θα χρησιμοποιούμε συχνά το εξής: αν η $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

- Για την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού, γράφουμε

$$\int_a^b f(x) dx = Re^{ix_0}, \text{ όπου } R = \left| \int_a^b f(x) dx \right| \text{ και } x_0 \in \mathbb{R},$$

και παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx \right| &= e^{-ix_0} \int_a^b f(x) dx = \int_a^b e^{-ix_0} f(x) dx \\ &= \int_a^b \operatorname{Re}(e^{-ix_0} f(x)) dx \leq \int_a^b |e^{-ix_0} f(x)| dx = \int_a^b |f(x)| dx. \end{aligned}$$

- Στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι αφού το ολοκλήρωμα της $e^{-ix_0} f(x)$ είναι πραγματικός αριθμός θα ισούται με το ολοκλήρωμα της $\operatorname{Re}(e^{-ix_0} f(x))$. Στην πρώτη ανισότητα, αμέσως μετά, χρησιμοποιούμε την ανισότητα $\operatorname{Re}(z) \leq |z|$, που ισχύει για κάθε $z \in \mathbb{C}$, και τη μονοτονία του ολοκληρώματος για πραγματικές συναρτήσεις.

- Συμβολίζουμε με $\mathbb{T}$ τον μοναδιαίο κύκλο

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{ix} : x \in \mathbb{R}\}.$$

- Συμβολίζουμε με $\mathbb{T}$ τον μοναδιαίο κύκλο

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{ix} : x \in \mathbb{R}\}.$$

- Αν $F : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ είναι συνάρτηση με μιγαδικές τιμές, ορίζουμε $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ με

$$f(x) = F(e^{ix}).$$

- Συμβολίζουμε με $\mathbb{T}$ τον μοναδιαίο κύκλο

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{ix} : x \in \mathbb{R}\}.$$

- Αν $F : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ είναι συνάρτηση με μιγαδικές τιμές, ορίζουμε $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ με

$$f(x) = F(e^{ix}).$$

- Παρατηρήστε ότι η f είναι 2π -περιοδική.

- Συμβολίζουμε με $\mathbb{T}$ τον μοναδιαίο κύκλο

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{ix} : x \in \mathbb{R}\}.$$

- Αν $F : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ είναι συνάρτηση με μιγαδικές τιμές, ορίζουμε $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ με

$$f(x) = F(e^{ix}).$$

- Παρατηρήστε ότι η f είναι 2π -περιοδική.
- Αντίστροφα, αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ είναι μια 2π -περιοδική συνάρτηση, τότε η $F : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ με $F(e^{ix}) = f(x)$ είναι καλά ορισμένη (πράγματι, αν $e^{ix_1} = e^{ix_2}$ για κάποιους $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ τότε $x_2 = x_1 + 2k\pi$ για κάποιον ακέραιο k , άρα $f(x_1) = f(x_2)$ από την 2π -περιοδικότητα της f).

- Συμβολίζουμε με $\mathbb{T}$ τον μοναδιαίο κύκλο

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{ix} : x \in \mathbb{R}\}.$$

- Αν $F : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ είναι συνάρτηση με μιγαδικές τιμές, ορίζουμε $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ με

$$f(x) = F(e^{ix}).$$

- Παρατηρήστε ότι η f είναι 2π -περιοδική.
- Αντίστροφα, αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ είναι μια 2π -περιοδική συνάρτηση, τότε η $F : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ με $F(e^{ix}) = f(x)$ είναι καλά ορισμένη (πράγματι, αν $e^{ix_1} = e^{ix_2}$ για κάποιους $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ τότε $x_2 = x_1 + 2k\pi$ για κάποιον ακέραιο k , άρα $f(x_1) = f(x_2)$ από την 2π -περιοδικότητα της f).
- Έχουμε λοιπόν μια 1-1 αντιστοιχία ανάμεσα στις συναρτήσεις $F : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ και τις 2π -περιοδικές συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.

- Αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ είναι μια 2π -περιοδική συνάρτηση, η οποία είναι ολοκληρώσιμη σε κάποιο διάστημα μήκους 2π , τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) Για κάθε $a < b$ στο $\mathbb{R}$ η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{a+2\pi}^{b+2\pi} f(x) dx = \int_{a-2\pi}^{b-2\pi} f(x) dx.$$

(ii) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+a) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(x) dx.$$

Η απόδειξη αυτών των ισχυρισμών αφήνεται ως άσκηση.

Περιοδικές συναρτήσεις

- Με βάση την αντιστοιχία των $F : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ και $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ που περιγράψαμε πιο πάνω, λέμε ότι η F είναι ολοκληρώσιμη αν η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάποιο (άρα σε κάθε) διάστημα μήκους 2π , η F είναι συνεχής αν η f είναι συνεχής, η F είναι παραγωγίσιμη αν η f είναι παραγωγίσιμη, η F είναι συνεχώς παραγωγίσιμη αν η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και ούτω καθεξής.

Περιοδικές συναρτήσεις

- Με βάση την αντιστοιχία των $F : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ και $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ που περιγράψαμε πιο πάνω, λέμε ότι η F είναι ολοκληρώσιμη αν η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάποιο (άρα σε κάθε) διάστημα μήκους 2π , η F είναι συνεχής αν η f είναι συνεχής, η F είναι παραγωγίσιμη αν η f είναι παραγωγίσιμη, η F είναι συνεχώς παραγωγίσιμη αν η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και ούτω καθεξής.
- Στο εξής θα ταυτίζουμε την F με την f και θα γράφουμε $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ αν η f είναι ολοκληρώσιμη, $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ αν η f είναι συνεχής, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T})$ αν η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και ούτω καθεξής.

Περιοδικές συναρτήσεις

- Με βάση την αντιστοιχία των $F : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ και $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ που περιγράψαμε πιο πάνω, λέμε ότι η F είναι ολοκληρώσιμη αν η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάποιο (άρα σε κάθε) διάστημα μήκους 2π , η F είναι συνεχής αν η f είναι συνεχής, η F είναι παραγωγίσιμη αν η f είναι παραγωγίσιμη, η F είναι συνεχώς παραγωγίσιμη αν η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και ούτω καθεξής.
- Στο εξής θα ταυτίζουμε την F με την f και θα γράφουμε $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ αν η f είναι ολοκληρώσιμη, $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ αν η f είναι συνεχής, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T})$ αν η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και ούτω καθεξής.

p -νόρμα

Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Για κάθε $1 \leq p < \infty$ ορίζουμε

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Γράφοντας $\mathbb{T}$ εννοούμε οποιοδήποτε διάστημα μήκους 2π , για παράδειγμα το $(-\pi, \pi]$. Ορίζουμε επίσης

$$\|f\|_{\infty} = \sup\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}\} = \lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p.$$

Σειρές Fourier

- Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε τον k -οστό συντελεστή Fourier της f μέσω της

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (1)$$

Σειρές Fourier

- Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε τον k -οστό συντελεστή Fourier της f μέσω της

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (1)$$

- Παρατηρούμε ότι

$$|\hat{f}(k)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx = \|f\|_1,$$

χρησιμοποιώντας και το γεγονός ότι $|e^{-ikx}| = 1$.

Σειρές Fourier

- Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε τον k -οστό συντελεστή Fourier της f μέσω της

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (1)$$

- Παρατηρούμε ότι

$$|\hat{f}(k)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx = \|f\|_1,$$

χρησιμοποιώντας και το γεγονός ότι $|e^{-ikx}| = 1$.

- Συνεπώς, η ακολουθία $\{\hat{f}(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ είναι φραγμένη.

Σειρές Fourier

- Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε τον k -οστό συντελεστή Fourier της f μέσω της

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (1)$$

- Παρατηρούμε ότι

$$|\widehat{f}(k)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx = \|f\|_1,$$

χρησιμοποιώντας και το γεγονός ότι $|e^{-ikx}| = 1$.

- Συνεπώς, η ακολουθία $\{\widehat{f}(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ είναι φραγμένη.
- Η σειρά Fourier της f είναι η σειρά συναρτήσεων

$$S(f, x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{ikx}.$$

Σειρές Fourier

- Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε τον k -οστό συντελεστή Fourier της f μέσω της

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (1)$$

- Παρατηρούμε ότι

$$|\widehat{f}(k)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx = \|f\|_1,$$

χρησιμοποιώντας και το γεγονός ότι $|e^{-ikx}| = 1$.

- Συνεπώς, η ακολουθία $\{\widehat{f}(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ είναι φραγμένη.
- Η σειρά Fourier της f είναι η σειρά συναρτήσεων

$$S(f, x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{ikx}.$$

- Το n -οστό μερικό άθροισμα της σειράς Fourier της f είναι το μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο

$$s_n(f, x) = \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{ikx}.$$

Σειρές Fourier

- Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε τον k -οστό συντελεστή Fourier της f μέσω της

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (1)$$

- Παρατηρούμε ότι

$$|\hat{f}(k)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx = \|f\|_1,$$

χρησιμοποιώντας και το γεγονός ότι $|e^{-ikx}| = 1$.

- Συνεπώς, η ακολουθία $\{\hat{f}(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ είναι φραγμένη.
- Η σειρά Fourier της f είναι η σειρά συναρτήσεων

$$S(f, x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx}.$$

- Το n -οστό μερικό άθροισμα της σειράς Fourier της f είναι το μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο

$$s_n(f, x) = \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e^{ikx}.$$

- Το βασικό πρόβλημα που θα μας απασχολήσει είναι το εξής: αν $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$, θα εξετάσουμε αν η ακολουθία $s_n(f, x) = \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e^{ikx}$ «συγκλίνει» στην f .

- Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Για κάθε $k \geq 0$ ορίζουμε

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx$$

και για κάθε $k \geq 1$ ορίζουμε

$$b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx.$$

- Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Για κάθε $k \geq 0$ ορίζουμε

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx$$

και για κάθε $k \geq 1$ ορίζουμε

$$b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx.$$

- Αν η f είναι άρτια, δηλαδή $f(-x) = f(x)$ για κάθε x , τότε όλοι οι συντελεστές b_k μηδενίζονται, και

$$a_k(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx \, dx.$$

- Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Για κάθε $k \geq 0$ ορίζουμε

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx$$

και για κάθε $k \geq 1$ ορίζουμε

$$b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx.$$

- Αν η f είναι άρτια, δηλαδή $f(-x) = f(x)$ για κάθε x , τότε όλοι οι συντελεστές b_k μηδενίζονται, και

$$a_k(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx \, dx.$$

- Αν η f είναι περιττή, δηλαδή $f(-x) = -f(x)$ για κάθε x , τότε όλοι οι συντελεστές a_k μηδενίζονται, και

$$b_k(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx \, dx.$$

- Παρατηρούμε ότι: αν $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ τότε

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx - i \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = \frac{a_k(f) - ib_k(f)}{2} \quad (2)$$

και

$$\hat{f}(-k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx + i \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = \frac{a_k(f) + ib_k(f)}{2}. \quad (3)$$

- Παρατηρούμε ότι: αν $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ τότε

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx - i \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = \frac{a_k(f) - ib_k(f)}{2} \quad (2)$$

και

$$\hat{f}(-k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx + i \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = \frac{a_k(f) + ib_k(f)}{2}. \quad (3)$$

- Επίσης,

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \frac{a_0(f)}{2}. \quad (4)$$

Συνοψίζουμε στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 1

Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Τότε, $a_0(f) = 2\hat{f}(0)$ και για κάθε $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ισχύουν οι

$$a_k(f) = \hat{f}(k) + \hat{f}(-k) \text{ και } b_k(f) = i(\hat{f}(k) - \hat{f}(-k)). \quad (5)$$

Επίσης, ισχύει ότι

$$s_n(f, x) = \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e^{ikx} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx) \quad (6)$$

και

$$S(f, x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx) \quad (7)$$

Σειρές Fourier

- Οι ισότητες $a_0(f) = 2\hat{f}(0)$, $a_k(f) = \hat{f}(k) + \hat{f}(-k)$ και $b_k(f) = i(\hat{f}(k) - \hat{f}(-k))$ προκύπτουν άμεσα από τις (2), (3) και (4).

Σειρές Fourier

- Οι ισότητες $a_0(f) = 2\hat{f}(0)$, $a_k(f) = \hat{f}(k) + \hat{f}(-k)$ και $b_k(f) = i(\hat{f}(k) - \hat{f}(-k))$ προκύπτουν άμεσα από τις (2), (3) και (4).
- Για την (6) γράφουμε

$$\begin{aligned} s_n(f, x) &= \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e^{ikx} \\ &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^n \hat{f}(k) e^{ikx} + \sum_{k=-n}^{-1} \hat{f}(k) e^{ikx} \\ &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^n \hat{f}(k) e^{ikx} + \sum_{k=1}^n \hat{f}(-k) e^{-ikx} \\ &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^n \hat{f}(k) (\cos kx + i \sin kx) + \sum_{k=1}^n \hat{f}(-k) (\cos kx - i \sin kx) \\ &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^n (\hat{f}(k) + \hat{f}(-k)) \cos kx + \sum_{k=1}^n i(\hat{f}(k) - \hat{f}(-k)) \sin kx \\ &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx), \end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας την (5).

Βασικές ιδιότητες των συντελεστών Fourier

Δίνουμε αρχικά κάποιες βασικές και χρήσιμες ιδιότητες των σειρών Fourier, οι οποίες προκύπτουν από τον ορισμό των συντελεστών Fourier με απευθείας υπολογισμό (η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση).

Λήμμα 1

Έστω $f, g \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Ισχύουν τα ακόλουθα:

(α) Για κάθε $a, b \in \mathbb{C}$ και για κάθε $k \in \mathbb{Z}$,

$$\widehat{(af + bg)}(k) = a\widehat{f}(k) + b\widehat{g}(k).$$

(β) Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$,

$$\widehat{\bar{g}}(k) = \overline{\widehat{g}(-k)}.$$

(γ) Αν $a \in \mathbb{R}$ και $f_a(x) = f(x + a)$ τότε για κάθε $k \in \mathbb{Z}$,

$$\widehat{f}_a(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t + a)e^{-ikt} dt = e^{ika}\widehat{f}(k).$$

(δ) Αν $n \in \mathbb{Z}$ και $g_n(x) = f(x)e^{inx}$ τότε για κάθε $k \in \mathbb{Z}$,

$$\widehat{g}_n(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{int}e^{-ikt} dt = \widehat{f}(k - n).$$

- Θα χρησιμοποιούμε συχνά την εξής παρατήρηση: Αν

$$p(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$$

είναι ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού n τότε για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ με $|k| \leq n$ έχουμε

$$\hat{p}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(x) e^{-ikx} dx = \sum_{s=-n}^n c_s \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(s-k)x} dx = c_k, \quad (8)$$

διότι το ολοκλήρωμα της $e^{i(s-k)x}$ είναι ίσο με 2π αν $s = k$ και με 0 για όλα τα υπόλοιπα s , ενώ αν $|k| > n$ τότε $\hat{p}(k) = 0$ διότι όλα τα ολοκληρώματα στην (8) είναι ίσα με 0.

- Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι αν μια συνεχής συνάρτηση $f \in C(\mathbb{T})$ έχει όλους τους συντελεστές Fourier ίσους με μηδέν, τότε είναι αναγκαστικά η μηδενική συνάρτηση.

- Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι αν μια συνεχής συνάρτηση $f \in C(\mathbb{T})$ έχει όλους τους συντελεστές Fourier ίσους με μηδέν, τότε είναι αναγκαστικά η μηδενική συνάρτηση.
- Για την απόδειξη χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι, όπως είδαμε στο προηγούμενο μάθημα, πυκνά στον $(C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$.

- Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι αν μια συνεχής συνάρτηση $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ έχει όλους τους συντελεστές Fourier ίσους με μηδέν, τότε είναι αναγκαστικά η μηδενική συνάρτηση.
- Για την απόδειξη χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι, όπως είδαμε στο προηγούμενο μάθημα, πυκνά στον $(\mathcal{C}(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$.

Πρόταση 2

Έστω $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\hat{f}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Τότε, $f \equiv 0$.

- Απόδειξη: Από την υπόθεση και από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος έπεται ότι για κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο $p(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$ ισχύει ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)p(x) dx = \sum_{k=-n}^n c_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx} dx = \sum_{k=-n}^n c_k \cdot 2\pi \hat{f}(-k) = 0. \quad (9)$$

- Απόδειξη: Από την υπόθεση και από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος έπεται ότι για κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο $p(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$ ισχύει ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)p(x) dx = \sum_{k=-n}^n c_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx} dx = \sum_{k=-n}^n c_k \cdot 2\pi \hat{f}(-k) = 0. \quad (9)$$

- Έχουμε $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. Από το τριγωνομετρικό θεώρημα Weierstrass υπάρχει ακολουθία $\{p_m\}$ τριγωνομετρικών πολυωνύμων ώστε $\|f - p_m\|_{\infty} \rightarrow 0$.

- Απόδειξη: Από την υπόθεση και από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος έπεται ότι για κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο $p(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$ ισχύει ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)p(x) dx = \sum_{k=-n}^n c_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx} dx = \sum_{k=-n}^n c_k \cdot 2\pi \hat{f}(-k) = 0. \quad (9)$$

- Έχουμε $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. Από το τριγωνομετρικό θεώρημα Weierstrass υπάρχει ακολουθία $\{p_m\}$ τριγωνομετρικών πολυωνύμων ώστε $\|f - p_m\|_{\infty} \rightarrow 0$.
- Παρατηρήστε ότι οι $\overline{p_m}$ είναι επίσης τριγωνομετρικά πολυώνυμα και

$$\|\overline{f} - \overline{p_m}\|_{\infty} = \|f - p_m\|_{\infty} \rightarrow 0.$$

- Χρησιμοποιώντας και την (9) για το $\overline{p_m}$, για κάθε m έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{f(x)} dx - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{p_m(x)} dx \right| \\&= \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\overline{f(x)} - \overline{p_m(x)}) dx \right| \\&\leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| |\overline{f(x)} - \overline{p_m(x)}| dx \\&\leq \int_{-\pi}^{\pi} \|f\|_{\infty} \|\overline{f} - \overline{p_m}\|_{\infty} dx \\&= 2\pi \|f\|_{\infty} \|f - p_m\|_{\infty} \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

- Χρησιμοποιώντας και την (9) για το $\overline{p_m}$, για κάθε m έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{f(x)} dx - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{p_m(x)} dx \right| \\ &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\overline{f(x)} - \overline{p_m(x)}) dx \right| \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| |\overline{f(x)} - \overline{p_m(x)}| dx \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} \|f\|_{\infty} \|\overline{f} - \overline{p_m}\|_{\infty} dx \\ &= 2\pi \|f\|_{\infty} \|f - p_m\|_{\infty} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

- Έπεται ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 0,$$

και, αφού η f είναι συνεχής, συμπεραίνουμε ότι $f \equiv 0$.

Άμεση συνέπεια της Πρότασης 2 είναι το εξής αποτέλεσμα «μοναδικότητας».

Πόρισμα 1

Έστω $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ τέτοιες ώστε $\widehat{f}(k) = \widehat{g}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Τότε, $f \equiv g$.

- Από το Λήμμα 1 έχουμε ότι

$$\widehat{f - g}(k) = \widehat{f}(k) - \widehat{g}(k) = 0$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Άμεση συνέπεια της Πρότασης 2 είναι το εξής αποτέλεσμα «μοναδικότητας».

Πόρισμα 1

Έστω $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ τέτοιες ώστε $\widehat{f}(k) = \widehat{g}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Τότε, $f \equiv g$.

- Από το Λήμμα 1 έχουμε ότι

$$\widehat{f - g}(k) = \widehat{f}(k) - \widehat{g}(k) = 0$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

- Αφού $f - g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, από την Πρόταση 2 συμπεραίνουμε ότι $f - g \equiv 0$.

- Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Όπως είδαμε, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$,

$$|\hat{f}(k)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx = \|f\|_1.$$

- Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Όπως είδαμε, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$,

$$|\hat{f}(k)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx = \|f\|_1.$$

- Με άλλα λόγια, η $\{\hat{f}(k)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ είναι φραγμένη.

Λήμμα Riemann-Lebesgue

- Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Όπως είδαμε, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$,

$$|\hat{f}(k)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx = \|f\|_1.$$

- Με άλλα λόγια, η $\{\hat{f}(k)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ είναι φραγμένη.
- Ισχύει όμως κάτι ισχυρότερο:

Λήμμα Riemann-Lebesgue

- Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Όπως είδαμε, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$,

$$|\hat{f}(k)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx = \|f\|_1.$$

- Με άλλα λόγια, η $\{\hat{f}(k)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ είναι φραγμένη.
- Ισχύει όμως κάτι ισχυρότερο:

Λήμμα Riemann-Lebesgue

Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Τότε,

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} \hat{f}(k) = 0.$$

Λήμμα Riemann-Lebesgue

Για την απόδειξη του Λήμματος Riemann-Lebesgue θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα προσέγγισης.

Λήμμα 2

Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ συνάρτηση με πραγματικές τιμές και έστω $\varepsilon > 0$. Τότε, υπάρχει $g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\|g\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ και $\|f - g\|_1 \leq \varepsilon$.

Λήμμα Riemann-Lebesgue

Για την απόδειξη του Λήμματος Riemann-Lebesgue θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα προσέγγισης.

Λήμμα 2

Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ συνάρτηση με πραγματικές τιμές και έστω $\varepsilon > 0$. Τότε, υπάρχει $g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\|g\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ και $\|f - g\|_1 \leq \varepsilon$.

- Απόδειξη: Θέτουμε $\delta = \pi\varepsilon$. Μπορούμε να βρούμε διαμέριση $P = \{-\pi = x_0 < x_1 < \dots < x_n = \pi\}$ του $[-\pi, \pi]$ ώστε $U(f, P) - L(f, P) \leq \delta$.

Λήμμα Riemann-Lebesgue

Για την απόδειξη του Λήμματος Riemann-Lebesgue θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα προσέγγισης.

Λήμμα 2

Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ συνάρτηση με πραγματικές τιμές και έστω $\varepsilon > 0$. Τότε, υπάρχει $g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\|g\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ και $\|f - g\|_1 \leq \varepsilon$.

- Απόδειξη: Θέτουμε $\delta = \pi\varepsilon$. Μπορούμε να βρούμε διαμέριση $P = \{-\pi = x_0 < x_1 < \dots < x_n = \pi\}$ του $[-\pi, \pi]$ ώστε $U(f, P) - L(f, P) \leq \delta$.
- Συμβολίζουμε με f^* την κλιμακωτή συνάρτηση που ορίζεται ως εξής:

$$f^*(x) = \sup_{x_k \leq y \leq x_{k+1}} f(y), \quad x \in [x_k, x_{k+1}), \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

Λήμμα Riemann-Lebesgue

Για την απόδειξη του Λήμματος Riemann-Lebesgue θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα προσέγγισης.

Λήμμα 2

Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ συνάρτηση με πραγματικές τιμές και έστω $\varepsilon > 0$. Τότε, υπάρχει $g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\|g\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ και $\|f - g\|_1 \leq \varepsilon$.

- Απόδειξη: Θέτουμε $\delta = \pi\varepsilon$. Μπορούμε να βρούμε διαμέριση $P = \{-\pi = x_0 < x_1 < \dots < x_n = \pi\}$ του $[-\pi, \pi]$ ώστε $U(f, P) - L(f, P) \leq \delta$.
- Συμβολίζουμε με f^* την κλιμακωτή συνάρτηση που ορίζεται ως εξής:

$$f^*(x) = \sup_{x_k \leq y \leq x_{k+1}} f(y), \quad x \in [x_k, x_{k+1}), \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

- Από τον τρόπο ορισμού της f^* έχουμε $|f^*| \leq \|f\|_\infty$. Επιπλέον,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f^*(x) - f(x)| dx = \int_{-\pi}^{\pi} (f^*(x) - f(x)) dx \leq \delta,$$

διότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f^*(x) - f(x)) dx = U(f, P) - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \leq U(f, P) - L(f, P) \leq \delta.$$

- Τροποποιούμε τώρα την f^* ώστε να πάρουμε μια συνεχή συνάρτηση g με $g(-\pi) = g(\pi)$ η οποία να προσεγγίζει κι αυτή την f ως προς την $\|\cdot\|_1$.

- Τροποποιούμε τώρα την f^* ώστε να πάρουμε μια συνεχή συνάρτηση g με $g(-\pi) = g(\pi)$ η οποία να προσεγγίζει κι αυτή την f ως προς την $\|\cdot\|_1$.
- Για αρκετά μικρό $\eta > 0$, θέτουμε $g(x) = f^*(x)$ αν η απόσταση του x από καθένα από τα σημεία $x_0, \dots, x_N$ είναι $\geq \eta$.

- Τροποποιούμε τώρα την f^* ώστε να πάρουμε μια συνεχή συνάρτηση g με $g(-\pi) = g(\pi)$ η οποία να προσεγγίζει κι αυτή την f ως προς την $\|\cdot\|_1$.
- Για αρκετά μικρό $\eta > 0$, θέτουμε $g(x) = f^*(x)$ αν η απόσταση του x από καθένα από τα σημεία $x_0, \dots, x_N$ είναι $\geq \eta$.
- Στην η -περιοχή του x_k για $k = 1, \dots, n-1$, ορίζουμε την g να είναι η γραμμική συνάρτηση που ικανοποιεί τις $g(x_k \pm \eta) = f^*(x_k \pm \eta)$.

- Τροποποιούμε τώρα την f^* ώστε να πάρουμε μια συνεχή συνάρτηση g με $g(-\pi) = g(\pi)$ η οποία να προσεγγίζει κι αυτή την f ως προς την $\|\cdot\|_1$.
- Για αρκετά μικρό $\eta > 0$, θέτουμε $g(x) = f^*(x)$ αν η απόσταση του x από καθένα από τα σημεία $x_0, \dots, x_N$ είναι $\geq \eta$.
- Στην η -περιοχή του x_k για $k = 1, \dots, n-1$, ορίζουμε την g να είναι η γραμμική συνάρτηση που ικανοποιεί τις $g(x_k \pm \eta) = f^*(x_k \pm \eta)$.
- Κοντά στο $x_0 = -\pi$, παίρνουμε την g γραμμική με $g(-\pi) = 0$ και $g(-\pi + \eta) = f^*(-\pi + \eta)$.

- Τροποποιούμε τώρα την f^* ώστε να πάρουμε μια συνεχή συνάρτηση g με $g(-\pi) = g(\pi)$ η οποία να προσεγγίζει κι αυτή την f ως προς την $\|\cdot\|_1$.
- Για αρκετά μικρό $\eta > 0$, θέτουμε $g(x) = f^*(x)$ αν η απόσταση του x από καθένα από τα σημεία $x_0, \dots, x_N$ είναι $\geq \eta$.
- Στην η -περιοχή του x_k για $k = 1, \dots, n-1$, ορίζουμε την g να είναι η γραμμική συνάρτηση που ικανοποιεί τις $g(x_k \pm \eta) = f^*(x_k \pm \eta)$.
- Κοντά στο $x_0 = -\pi$, παίρνουμε την g γραμμική με $g(-\pi) = 0$ και $g(-\pi + \eta) = f^*(-\pi + \eta)$.
- Όμοια, κοντά στο $x_n = \pi$, παίρνουμε την g γραμμική με $g(\pi) = 0$ και $g(\pi - \eta) = f^*(\pi - \eta)$.

Λήμμα Riemann-Lebesgue

- Αφού $g(-\pi) = g(\pi) = 0$, μπορούμε να επεκτείνουμε την g σε μια συνεχή περιοδική συνάρτηση σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$.

Λήμμα Riemann-Lebesgue

- Αφού $g(-\pi) = g(\pi) = 0$, μπορούμε να επεκτείνουμε την g σε μια συνεχή περιοδική συνάρτηση σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$.
- Η απόλυτη τιμή αυτής της επέκτασης παραμένει φραγμένη από $\|f\|_\infty$.

Λήμμα Riemann-Lebesgue

- Αφού $g(-\pi) = g(\pi) = 0$, μπορούμε να επεκτείνουμε την g σε μια συνεχή περιοδική συνάρτηση σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$.
- Η απόλυτη τιμή αυτής της επέκτασης παραμένει φραγμένη από $\|f\|_\infty$.
- Επιπλέον, η g διαφέρει από την f^* μόνο στα $n - 1$ διαστήματα μήκους 2η και τα δύο διαστήματα μήκους η γύρω από τα $x_0, \dots, x_n$ και $|f^*(x) - g(x)| \leq 2\|f\|_\infty$ για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$.

Λήμμα Riemann-Lebesgue

- Αφού $g(-\pi) = g(\pi) = 0$, μπορούμε να επεκτείνουμε την g σε μια συνεχή περιοδική συνάρτηση σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$.
- Η απόλυτη τιμή αυτής της επέκτασης παραμένει φραγμένη από $\|f\|_\infty$.
- Επιπλέον, η g διαφέρει από την f^* μόνο στα $n - 1$ διαστήματα μήκους 2η και τα δύο διαστήματα μήκους η γύρω από τα $x_0, \dots, x_n$ και $|f^*(x) - g(x)| \leq 2\|f\|_\infty$ για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$.
- Συνεπώς,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f^*(x) - g(x)| dx \leq 2\|f\|_\infty \cdot 2\eta n.$$

Λήμμα Riemann-Lebesgue

- Αφού $g(-\pi) = g(\pi) = 0$, μπορούμε να επεκτείνουμε την g σε μια συνεχή περιοδική συνάρτηση σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$.
- Η απόλυτη τιμή αυτής της επέκτασης παραμένει φραγμένη από $\|f\|_\infty$.
- Επιπλέον, η g διαφέρει από την f^* μόνο στα $n - 1$ διαστήματα μήκους 2η και τα δύο διαστήματα μήκους η γύρω από τα $x_0, \dots, x_n$ και $|f^*(x) - g(x)| \leq 2\|f\|_\infty$ για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$.

- Συνεπώς,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f^*(x) - g(x)| dx \leq 2\|f\|_\infty \cdot 2\eta n.$$

- Αν επιλέξουμε το η αρκετά μικρό, παίρνουμε

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f^*(x) - g(x)| dx \leq \delta.$$

Λήμμα Riemann-Lebesgue

- Αφού $g(-\pi) = g(\pi) = 0$, μπορούμε να επεκτείνουμε την g σε μια συνεχή περιοδική συνάρτηση σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$.
- Η απόλυτη τιμή αυτής της επέκτασης παραμένει φραγμένη από $\|f\|_\infty$.
- Επιπλέον, η g διαφέρει από την f^* μόνο στα $n - 1$ διαστήματα μήκους 2η και τα δύο διαστήματα μήκους η γύρω από τα $x_0, \dots, x_n$ και $|f^*(x) - g(x)| \leq 2\|f\|_\infty$ για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$.

- Συνεπώς,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f^*(x) - g(x)| dx \leq 2\|f\|_\infty \cdot 2\eta n.$$

- Αν επιλέξουμε το η αρκετά μικρό, παίρνουμε

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f^*(x) - g(x)| dx \leq \delta.$$

- Τότε, η τριγωνική ανισότητα μας δίνει

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)| dx \leq 2\delta,$$

άρα $\|f - g\|_1 \leq \delta/\pi = \varepsilon$.

Λήμμα Riemann-Lebesgue

- Το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει για συναρτήσεις $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ με μιγαδικές τιμές.

- Το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει για συναρτήσεις $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ με μιγαδικές τιμές.
- Γράφουμε $f = u + iv$, όπου $u, v \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ είναι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της f .

Λήμμα Riemann-Lebesgue

- Το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει για συναρτήσεις $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ με μιγαδικές τιμές.
- Γράφουμε $f = u + iv$, όπου $u, v \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ είναι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της f .
- Παρατηρήστε ότι $|u| \leq |f|$ και $|v| \leq |f|$, άρα $\|u\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ και $\|v\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.

- Το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει για συναρτήσεις $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ με μιγαδικές τιμές.
- Γράφουμε $f = u + iv$, όπου $u, v \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ είναι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της f .
- Παρατηρήστε ότι $|u| \leq |f|$ και $|v| \leq |f|$, άρα $\|u\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ και $\|v\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.
- Για τυχόν $\varepsilon > 0$ βρίσκουμε πραγματικές συναρτήσεις $g_1, g_2 \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ τέτοιες ώστε $\|g_1\|_\infty \leq \|u\|_\infty$, $\|g_2\|_\infty \leq \|v\|_\infty$, $\|u - g_1\|_1 \leq \varepsilon/2$ και $\|v - g_2\|_1 \leq \varepsilon/2$.

- Το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει για συναρτήσεις $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ με μιγαδικές τιμές.
- Γράφουμε $f = u + iv$, όπου $u, v \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ είναι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της f .
- Παρατηρήστε ότι $|u| \leq |f|$ και $|v| \leq |f|$, άρα $\|u\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ και $\|v\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.
- Για τυχόν $\varepsilon > 0$ βρίσκουμε πραγματικές συναρτήσεις $g_1, g_2 \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ τέτοιες ώστε $\|g_1\|_\infty \leq \|u\|_\infty$, $\|g_2\|_\infty \leq \|v\|_\infty$, $\|u - g_1\|_1 \leq \varepsilon/2$ και $\|v - g_2\|_1 \leq \varepsilon/2$.
- Τότε, η $g = g_1 + ig_2 \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ και

$$\|f - g\|_1 = \|(u - g_1) + i(v - g_2)\|_1 \leq \|u - g_1\|_1 + \|v - g_2\|_1 \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

- Το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει για συναρτήσεις $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ με μιγαδικές τιμές.
- Γράφουμε $f = u + iv$, όπου $u, v \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ είναι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της f .
- Παρατηρήστε ότι $|u| \leq |f|$ και $|v| \leq |f|$, άρα $\|u\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ και $\|v\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.
- Για τυχόν $\varepsilon > 0$ βρίσκουμε πραγματικές συναρτήσεις $g_1, g_2 \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ τέτοιες ώστε $\|g_1\|_\infty \leq \|u\|_\infty$, $\|g_2\|_\infty \leq \|v\|_\infty$, $\|u - g_1\|_1 \leq \varepsilon/2$ και $\|v - g_2\|_1 \leq \varepsilon/2$.
- Τότε, η $g = g_1 + ig_2 \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ και

$$\|f - g\|_1 = \|(u - g_1) + i(v - g_2)\|_1 \leq \|u - g_1\|_1 + \|v - g_2\|_1 \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

- Επίσης, για κάθε $x \in \mathbb{T}$ έχουμε

$$|g(x)|^2 = |u(x)|^2 + |v(x)|^2 \leq \|u\|_\infty^2 + \|v\|_\infty^2 \leq 2\|f\|_\infty^2,$$

$$\text{άρα } \|g\|_\infty \leq \sqrt{2}\|f\|_\infty.$$

Λήμμα Riemann-Lebesgue

- Απόδειξη του Λήμματος Riemann-Lebesgue: Έστω $\varepsilon > 0$. Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι πυκνά στον $\mathcal{R}(\mathbb{T})$: υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο p ώστε

$$\|f - p\|_1 \leq \varepsilon.$$

Λήμμα Riemann-Lebesgue

- Απόδειξη του Λήμματος Riemann-Lebesgue: Έστω $\varepsilon > 0$. Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι πυκνά στον $\mathcal{R}(\mathbb{T})$: υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο p ώστε

$$\|f - p\|_1 \leq \varepsilon.$$

- Πράγματι, αυτό είναι άμεσο από το Λήμμα 2 και το τριγωνομετρικό θεώρημα Weierstrass: βρίσκουμε αρχικά $g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\|f - g\|_1 \leq \varepsilon/2$ και στη συνέχεια τριγωνομετρικό πολυώνυμο p τέτοιο ώστε $\|g - p\|_\infty \leq \varepsilon/2$.

Λήμμα Riemann-Lebesgue

- Απόδειξη του Λήμματος Riemann-Lebesgue: Έστω $\varepsilon > 0$. Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι πυκνά στον $\mathcal{R}(\mathbb{T})$: υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο p ώστε

$$\|f - p\|_1 \leq \varepsilon.$$

- Πράγματι, αυτό είναι άμεσο από το Λήμμα 2 και το τριγωνομετρικό θεώρημα Weierstrass: βρίσκουμε αρχικά $g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\|f - g\|_1 \leq \varepsilon/2$ και στη συνέχεια τριγωνομετρικό πολυώνυμο p τέτοιο ώστε $\|g - p\|_\infty \leq \varepsilon/2$.
- Τότε, $\|g - p\|_1 \leq \|g - p\|_\infty \leq \varepsilon/2$, και από την τριγωνική ανισότητα για την $\|\cdot\|_1$ έπεται ότι

$$\|f - p\|_1 \leq \|f - g\|_1 + \|g - p\|_1 \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Λήμμα Riemann-Lebesgue

- Απόδειξη του Λήμματος Riemann-Lebesgue: Έστω $\varepsilon > 0$. Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι πυκνά στον $\mathcal{R}(\mathbb{T})$: υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο p ώστε

$$\|f - p\|_1 \leq \varepsilon.$$

- Πράγματι, αυτό είναι άμεσο από το Λήμμα 2 και το τριγωνομετρικό θεώρημα Weierstrass: βρίσκουμε αρχικά $g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\|f - g\|_1 \leq \varepsilon/2$ και στη συνέχεια τριγωνομετρικό πολυώνυμο p τέτοιο ώστε $\|g - p\|_\infty \leq \varepsilon/2$.
- Τότε, $\|g - p\|_1 \leq \|g - p\|_\infty \leq \varepsilon/2$, και από την τριγωνική ανισότητα για την $\|\cdot\|_1$ έπεται ότι

$$\|f - p\|_1 \leq \|f - g\|_1 + \|g - p\|_1 \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

- Έστω $n = n(p)$ ο βαθμός του p . Για κάθε $|k| > n$ ισχύει

$$\widehat{f}(k) = \widehat{f - p}(k) + \widehat{p}(k) = \widehat{f - p}(k),$$

διότι $\widehat{p}(k) = 0$ από την (8).

Λήμμα Riemann-Lebesgue

- Απόδειξη του Λήμματος Riemann-Lebesgue: Έστω $\varepsilon > 0$. Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι πυκνά στον $\mathcal{R}(\mathbb{T})$: υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο p ώστε

$$\|f - p\|_1 \leq \varepsilon.$$

- Πράγματι, αυτό είναι άμεσο από το Λήμμα 2 και το τριγωνομετρικό θεώρημα Weierstrass: βρίσκουμε αρχικά $g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\|f - g\|_1 \leq \varepsilon/2$ και στη συνέχεια τριγωνομετρικό πολυώνυμο p τέτοιο ώστε $\|g - p\|_\infty \leq \varepsilon/2$.
- Τότε, $\|g - p\|_1 \leq \|g - p\|_\infty \leq \varepsilon/2$, και από την τριγωνική ανισότητα για την $\|\cdot\|_1$ έπεται ότι

$$\|f - p\|_1 \leq \|f - g\|_1 + \|g - p\|_1 \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

- Έστω $n = n(p)$ ο βαθμός του p . Για κάθε $|k| > n$ ισχύει

$$\widehat{f}(k) = \widehat{f - p}(k) + \widehat{p}(k) = \widehat{f - p}(k),$$

διότι $\widehat{p}(k) = 0$ από την (8).

- Συνεπώς,

$$|\widehat{f}(k)| = |\widehat{f - p}(k)| \leq \|f - p\|_1 \leq \varepsilon$$

για κάθε $|k| > n$.

Λήμμα Riemann-Lebesgue

- Απόδειξη του Λήμματος Riemann-Lebesgue: Έστω $\varepsilon > 0$. Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι πυκνά στον $\mathcal{R}(\mathbb{T})$: υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο p ώστε

$$\|f - p\|_1 \leq \varepsilon.$$

- Πράγματι, αυτό είναι άμεσο από το Λήμμα 2 και το τριγωνομετρικό θεώρημα Weierstrass: βρίσκουμε αρχικά $g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\|f - g\|_1 \leq \varepsilon/2$ και στη συνέχεια τριγωνομετρικό πολυώνυμο p τέτοιο ώστε $\|g - p\|_\infty \leq \varepsilon/2$.
- Τότε, $\|g - p\|_1 \leq \|g - p\|_\infty \leq \varepsilon/2$, και από την τριγωνική ανισότητα για την $\|\cdot\|_1$ έπεται ότι

$$\|f - p\|_1 \leq \|f - g\|_1 + \|g - p\|_1 \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

- Έστω $n = n(p)$ ο βαθμός του p . Για κάθε $|k| > n$ ισχύει

$$\widehat{f}(k) = \widehat{f - p}(k) + \widehat{p}(k) = \widehat{f - p}(k),$$

διότι $\widehat{p}(k) = 0$ από την (8).

- Συνεπώς,

$$|\widehat{f}(k)| = |\widehat{f - p}(k)| \leq \|f - p\|_1 \leq \varepsilon$$

για κάθε $|k| > n$.

- Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $\lim_{|k| \rightarrow \infty} \widehat{f}(k) = 0$.

Σειρές Fourier C^m -συναρτήσεων

- Έστω $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Για κάθε $k \neq 0$, ολοκληρώνοντας κατά μέρη γράφουμε

$$\begin{aligned} 2\pi \widehat{f}(k) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = f(x) \frac{-e^{-ikx}}{ik} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{ik} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{ik} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-ikx} dx, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι, αφού η f είναι 2π -περιοδική,

$$f(x) \frac{-e^{-ikx}}{ik} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Σειρές Fourier C^m -συναρτήσεων

- Έστω $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Για κάθε $k \neq 0$, ολοκληρώνοντας κατά μέρη γράφουμε

$$\begin{aligned} 2\pi \widehat{f}(k) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = f(x) \frac{-e^{-ikx}}{ik} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{ik} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{ik} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-ikx} dx, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι, αφού η f είναι 2π -περιοδική,

$$f(x) \frac{-e^{-ikx}}{ik} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

- Με άλλα λόγια,

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{ik} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{ik} \widehat{f'}(k)$$

για κάθε $k \neq 0$.

Σειρές Fourier C^m -συναρτήσεων

- Έστω $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Για κάθε $k \neq 0$, ολοκληρώνοντας κατά μέρη γράφουμε

$$\begin{aligned} 2\pi \widehat{f}(k) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = f(x) \frac{-e^{-ikx}}{ik} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{ik} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{ik} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-ikx} dx, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποίησαμε το γεγονός ότι, αφού η f είναι 2π -περιοδική,

$$f(x) \frac{-e^{-ikx}}{ik} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

- Με άλλα λόγια,

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{ik} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{ik} \widehat{f'}(k)$$

για κάθε $k \neq 0$.

- Από την περιοδικότητα της f είναι φανερό ότι

$$2\pi \widehat{f'}(0) = \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) = f(\pi) - f(-\pi) = 0.$$

Σειρές Fourier C^m -συναρτήσεων

- Έστω $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Για κάθε $k \neq 0$, ολοκληρώνοντας κατά μέρη γράφουμε

$$\begin{aligned} 2\pi \widehat{f}(k) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = f(x) \frac{-e^{-ikx}}{ik} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{ik} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{ik} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-ikx} dx, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποίησαμε το γεγονός ότι, αφού η f είναι 2π -περιοδική,

$$f(x) \frac{-e^{-ikx}}{ik} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

- Με άλλα λόγια,

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{ik} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{ik} \widehat{f'}(k)$$

για κάθε $k \neq 0$.

- Από την περιοδικότητα της f είναι φανερό ότι

$$2\pi \widehat{f'}(0) = \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) = f(\pi) - f(-\pi) = 0.$$

- Συνεπώς,

$$\widehat{f'}(k) = ik \widehat{f}(k), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (10)$$

Σειρές Fourier C^m -συναρτήσεων

- Ομοίως, αν η $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, τότε

$$\widehat{f''}(k) = (ik)\widehat{f'}(k) = (ik)^2\widehat{f}(k)$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Σειρές Fourier C^m -συναρτήσεων

- Ομοίως, αν η $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, τότε

$$\widehat{f''}(k) = (ik)\widehat{f'}(k) = (ik)^2\widehat{f}(k)$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

- Επαγωγικά, παίρνουμε την ακόλουθη πρόταση.

Σειρές Fourier C^m -συναρτήσεων

- Ομοίως, αν η $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, τότε

$$\widehat{f''}(k) = (ik)\widehat{f'}(k) = (ik)^2\widehat{f}(k)$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

- Επαγωγικά, παίρνουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3

Έστω $f \in C^m(\mathbb{T})$, δηλαδή η f είναι m φορές συνεχώς παραγωγίσιμη. Τότε,

$$\widehat{f^{(m)}}(k) = (ik)^m \widehat{f}(k)$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, και

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} [k^m \widehat{f}(k)] = 0.$$

Ειδικότερα, υπάρχει $C > 0$ ώστε, για κάθε $k \neq 0$,

$$|\widehat{f}(k)| \leq \frac{C}{|k|^m}.$$

Σειρές Fourier C^m -συναρτήσεων

- Ομοίως, αν η $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, τότε

$$\widehat{f''}(k) = (ik)\widehat{f'}(k) = (ik)^2\widehat{f}(k)$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

- Επαγωγικά, παίρνουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3

Έστω $f \in C^m(\mathbb{T})$, δηλαδή η f είναι m φορές συνεχώς παραγωγίσιμη. Τότε,

$$\widehat{f^{(m)}}(k) = (ik)^m \widehat{f}(k)$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, και

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} [k^m \widehat{f}(k)] = 0.$$

Ειδικότερα, υπάρχει $C > 0$ ώστε, για κάθε $k \neq 0$,

$$|\widehat{f}(k)| \leq \frac{C}{|k|^m}.$$

Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια της (10), την οποία εφαρμόζουμε, διαδοχικά, m φορές. Ο τελευταίος ισχυρισμός προκύπτει από το λήμμα Riemann-Lebesgue το οποίο εφαρμόζουμε για την $f^{(m)}$.