

Αρμονική Ανάλυση

Μάθημα 7

Μάρτιος 2024

Προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass

Στο προηγούμενο μάθημα αποδείξαμε ότι τα πολυώνυμα είναι πυκνά στον χώρο $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$.

Προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass

Στο προηγούμενο μάθημα αποδείξαμε ότι τα πολυώνυμα είναι πυκνά στον χώρο $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$.

Weierstrass

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε ο περιορισμός του p στο $[a, b]$ να ικανοποιεί την

$$\|f - p\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Ισοδύναμα, για κάθε $x \in [a, b]$,

$$|f(x) - p(x)| \leq \varepsilon.$$

Προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass

Στο προηγούμενο μάθημα αποδείξαμε ότι τα πολυώνυμα είναι πυκνά στον χώρο $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$.

Weierstrass

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε ο περιορισμός του p στο $[a, b]$ να ικανοποιεί την

$$\|f - p\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Ισοδύναμα, για κάθε $x \in [a, b]$,

$$|f(x) - p(x)| \leq \varepsilon.$$

Σημείωση. Εφαρμόζοντας διαδοχικά το θεώρημα με $\varepsilon = \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$) μπορούμε να βρούμε ακολουθία πολυωνύμων (p_n) με την ιδιότητα $\|f - p_n\|_\infty \rightarrow 0$.

Τριγωνομετρικά πολυώνυμα

- Πραγματικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο είναι κάθε πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός των συναρτήσεων $\cos kx$ και $\sin kx$.

Τριγωνομετρικά πολυώνυμα

- Πραγματικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο είναι κάθε πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός των συναρτήσεων $\cos kx$ και $\sin kx$.
- Δηλαδή, κάθε συνάρτηση της μορφής

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

όπου $n \in \mathbb{N}$ και $a_k, b_k \in \mathbb{R}$.

Τριγωνομετρικά πολυώνυμα

- Πραγματικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο είναι κάθε πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός των συναρτήσεων $\cos kx$ και $\sin kx$.
- Δηλαδή, κάθε συνάρτηση της μορφής

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

όπου $n \in \mathbb{N}$ και $a_k, b_k \in \mathbb{R}$.

- Ο βαθμός του T είναι ο μικρότερος $n \geq 0$ για τον οποίο το T έχει μια αναπαράσταση αυτής της μορφής.

Τριγωνομετρικά πολυώνυμα

- Πραγματικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο είναι κάθε πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός των συναρτήσεων $\cos kx$ και $\sin kx$.
- Δηλαδή, κάθε συνάρτηση της μορφής

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

όπου $n \in \mathbb{N}$ και $a_k, b_k \in \mathbb{R}$.

- Ο βαθμός του T είναι ο μικρότερος $n \geq 0$ για τον οποίο το T έχει μια αναπαράσταση αυτής της μορφής.
- Συμβολίζουμε με $\mathcal{T}$ τον χώρο όλων των τριγωνομετρικών πολυωνύμων και με $\mathcal{T}_n$ τον χώρο όλων των τριγωνομετρικών πολυωνύμων που έχουν βαθμό μικρότερο ή ίσο από n .

Τριγωνομετρικά πολυώνυμα

- Πραγματικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο είναι κάθε πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός των συναρτήσεων $\cos kx$ και $\sin kx$.
- Δηλαδή, κάθε συνάρτηση της μορφής

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

όπου $n \in \mathbb{N}$ και $a_k, b_k \in \mathbb{R}$.

- Ο βαθμός του T είναι ο μικρότερος $n \geq 0$ για τον οποίο το T έχει μια αναπαράσταση αυτής της μορφής.
- Συμβολίζουμε με $\mathcal{T}$ τον χώρο όλων των τριγωνομετρικών πολυωνύμων και με $\mathcal{T}_n$ τον χώρο όλων των τριγωνομετρικών πολυωνύμων που έχουν βαθμό μικρότερο ή ίσο από n .
- Παρατηρήστε ότι ο $\mathcal{T}_n$ είναι γραμμικός υπόχωρος του χώρου των συνεχών 2π -περιοδικών συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Τριγωνομετρικά πολυώνυμα

- Μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο είναι μια συνάρτηση της μορφής

$$p(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$$

όπου $n \geq 0$, $c_k \in \mathbb{C}$.

Τριγωνομετρικά πολυώνυμα

- Μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο είναι μια συνάρτηση της μορφής

$$p(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$$

όπου $n \geq 0$, $c_k \in \mathbb{C}$.

- Ο βαθμός του p είναι ο μικρότερος $n \geq 0$ για τον οποίο το p έχει μια αναπαράσταση αυτής της μορφής.

Τριγωνομετρικά πολυώνυμα

- Μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο είναι μια συνάρτηση της μορφής

$$p(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$$

όπου $n \geq 0$, $c_k \in \mathbb{C}$.

- Ο βαθμός του p είναι ο μικρότερος $n \geq 0$ για τον οποίο το p έχει μια αναπαράσταση αυτής της μορφής.
- Σημειώνουμε ότι η μηδενική συνάρτηση είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο μηδενικού βαθμού.

Τριγωνομετρικά πολυώνυμα

- Μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο είναι μια συνάρτηση της μορφής

$$p(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$$

όπου $n \geq 0$, $c_k \in \mathbb{C}$.

- Ο βαθμός του p είναι ο μικρότερος $n \geq 0$ για τον οποίο το p έχει μια αναπαράσταση αυτής της μορφής.
- Σημειώνουμε ότι η μηδενική συνάρτηση είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο μηδενικού βαθμού.
- Από τον ορισμό του $\mathcal{T}_n$ είναι φανερό ότι παράγεται από το σύνολο

$$A_n = \{1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \sin x, \dots, \sin nx\}.$$

Τριγωνομετρικά πολυώνυμα

- Μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο είναι μια συνάρτηση της μορφής

$$p(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$$

όπου $n \geq 0$, $c_k \in \mathbb{C}$.

- Ο βαθμός του p είναι ο μικρότερος $n \geq 0$ για τον οποίο το p έχει μια αναπαράσταση αυτής της μορφής.
- Σημειώνουμε ότι η μηδενική συνάρτηση είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο μηδενικού βαθμού.
- Από τον ορισμό του $\mathcal{T}_n$ είναι φανερό ότι παράγεται από το σύνολο

$$A_n = \{1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \sin x, \dots, \sin nx\}.$$

- Δηλαδή,

$$\mathcal{T}_n = \text{span}(A_n).$$

Τριγωνομετρικά πολυώνυμα

Θα δείξουμε ότι το A_n είναι γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο, άρα είναι βάση του $\mathcal{T}_n$, και ειδικότερα, $\dim(\mathcal{T}_n) = 2n + 1$.

Τριγωνομετρικά πολυώνυμα

Θα δείξουμε ότι το A_n είναι γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο, άρα είναι βάση του $\mathcal{T}_n$, και ειδικότερα, $\dim(\mathcal{T}_n) = 2n + 1$.

Σχέσεις ορθογωνιότητας

- ❶ Αν $m, n = 0, 1, 2, \dots$ και $m \neq n$ τότε

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = 0.$$

- ❷ Αν $m, n = 1, 2, \dots$ και $m \neq n$ τότε

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = 0.$$

- ❸ Αν $m = 0, 1, 2, \dots$ και $n = 1, 2, \dots$ τότε

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx = 0.$$

- ❹ Αν $m, n = 1, 2, \dots$ τότε

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \frac{1}{2}.$$

Τριγωνομετρικά πολυώνυμα

- Απόδειξη: Χρησιμοποιούμε τις ταυτότητες

$$2 \cos \theta \cos \phi = \cos(\theta - \phi) + \cos(\theta + \phi),$$

$$2 \sin \theta \cos \phi = \sin(\theta + \phi) + \sin(\theta - \phi),$$

$$2 \sin \theta \sin \phi = \cos(\theta - \phi) - \cos(\theta + \phi),$$

και τις $2 \cos^2 \theta = \cos 2\theta + 1$, $2 \sin^2 \theta = 1 - \cos 2\theta$.

Τριγωνομετρικά πολυώνυμα

- Απόδειξη: Χρησιμοποιούμε τις ταυτότητες

$$2 \cos \theta \cos \phi = \cos(\theta - \phi) + \cos(\theta + \phi),$$

$$2 \sin \theta \cos \phi = \sin(\theta + \phi) + \sin(\theta - \phi),$$

$$2 \sin \theta \sin \phi = \cos(\theta - \phi) - \cos(\theta + \phi),$$

και τις $2 \cos^2 \theta = \cos 2\theta + 1$, $2 \sin^2 \theta = 1 - \cos 2\theta$.

- Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n+m)x \, dx + \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n-m)x \, dx = 0 \end{aligned}$$

αφού

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \, dx = 0 \quad \text{για κάθε } k \in \mathbb{Z}.$$

Πρόταση 1

Το σύνολο $A_n = \{1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \sin x, \dots, \sin nx\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο (πάνω από το $\mathbb{R}$).

Πρόταση 1

Το σύνολο $A_n = \{1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \sin x, \dots, \sin nx\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο (πάνω από το $\mathbb{R}$).

- Δείχνουμε ότι αν

$$T(x) = \nu_0 + \sum_{k=1}^n (\nu_k \cos kx + \mu_k \sin kx) \equiv 0,$$

για κάποιους $\nu_k, \mu_k \in \mathbb{R}$, τότε

$$\nu_0 = \nu_1 = \dots = \nu_n = \mu_1 = \dots = \mu_n = 0.$$

Τριγωνομετρικά πολυώνυμα

- Αυτό προκύπτει άμεσα από τις σχέσεις ορθογωνιότητας.

Τριγωνομετρικά πολυώνυμα

- Αυτό προκύπτει άμεσα από τις σχέσεις ορθογωνιότητας.
- Για παράδειγμα, για κάθε $m = 1, \dots, n$ έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\pi}^{\pi} T(x) \sin mx dx \\ &= \nu_0 \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx dx + \sum_{k=1}^n \left(\nu_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin mx dx + \mu_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin mx dx \right) \\ &= \mu_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin mx dx = \pi \mu_m, \end{aligned}$$

διότι $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin mx dx = 0$ για κάθε $0 \leq k \leq n$ και $\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin mx dx = 0$ για κάθε $1 \leq k \leq n, k \neq m$.

Τριγωνομετρικά πολυώνυμα

- Αυτό προκύπτει άμεσα από τις σχέσεις ορθογωνιότητας.
- Για παράδειγμα, για κάθε $m = 1, \dots, n$ έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\pi}^{\pi} T(x) \sin mx dx \\ &= \nu_0 \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx dx + \sum_{k=1}^n \left(\nu_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin mx dx + \mu_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin mx dx \right) \\ &= \mu_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin mx dx = \pi \mu_m, \end{aligned}$$

διότι $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin mx dx = 0$ για κάθε $0 \leq k \leq n$ και $\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin mx dx = 0$ για κάθε $1 \leq k \leq n$, $k \neq m$.

- Όμοια δείχνουμε ότι $\nu_m = 0$ για κάθε $m = 0, 1, \dots, n$.

Τριγωνομετρικές σειρές

Στο σημερινό μάθημα θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με τριγωνομετρικά πολυώνυμα, δίνουμε όμως και τους ορισμούς της τριγωνομετρικής σειράς, στη μιγαδική και την πραγματική περίπτωση.

Τριγωνομετρικές σειρές

Στο σημερινό μάθημα θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με τριγωνομετρικά πολυώνυμα, δίνουμε όμως και τους ορισμούς της τριγωνομετρικής σειράς, στη μιγαδική και την πραγματική περίπτωση.

- Τριγωνομετρική σειρά είναι μια σειρά της μορφής

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}. \quad (1)$$

Τριγωνομετρικές σειρές

Στο σημερινό μάθημα θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με τριγωνομετρικά πολυώνυμα, δίνουμε όμως και τους ορισμούς της τριγωνομετρικής σειράς, στη μιγαδική και την πραγματική περίπτωση.

- Τριγωνομετρική σειρά είναι μια σειρά της μορφής

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}. \quad (1)$$

- Το συμμετρικό n -οστό μερικό άθροισμα της σειράς (1) είναι το τριγωνομετρικό πολυώνυμο

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx},$$

Τριγωνομετρικές σειρές

Στο σημερινό μάθημα θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με τριγωνομετρικά πολυώνυμα, δίνουμε όμως και τους ορισμούς της τριγωνομετρικής σειράς, στη μιγαδική και την πραγματική περίπτωση.

- Τριγωνομετρική σειρά είναι μια σειρά της μορφής

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}. \quad (1)$$

- Το συμμετρικό n -οστό μερικό άθροισμα της σειράς (1) είναι το τριγωνομετρικό πολυώνυμο

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx},$$

- Λέμε ότι η τριγωνομετρική σειρά (1) συγκλίνει (κατά σημείο ή ομοιόμορφα) σε μια συνάρτηση s αν $s_n \rightarrow s$ (κατά σημείο ή ομοιόμορφα, αντίστοιχα).

Τριγωνομετρικές σειρές

- Με τον όρο *πραγματική τριγωνομετρική σειρά* αναφερόμαστε σε μια σειρά της μορφής

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (2)$$

όπου $a_k, b_k \in \mathbb{R}$.

Τριγωνομετρικές σειρές

- Με τον όρο *πραγματική τριγωνομετρική σειρά* αναφερόμαστε σε μια σειρά της μορφής

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (2)$$

όπου $a_k, b_k \in \mathbb{R}$.

- Το n -οστό μερικό άθροισμα της σειράς (2) είναι το πραγματικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Τριγωνομετρικές σειρές

- Με τον όρο *πραγματική τριγωνομετρική σειρά* αναφερόμαστε σε μια σειρά της μορφής

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (2)$$

όπου $a_k, b_k \in \mathbb{R}$.

- Το n -οστό μερικό άθροισμα της σειράς (2) είναι το πραγματικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

- Λέμε ότι η τριγωνομετρική σειρά (2) συγκλίνει (κατά σημείο ή ομοιόμορφα) σε μια συνάρτηση s αν $s_n \rightarrow s$ (κατά σημείο ή ομοιόμορφα, αντίστοιχα).

Τριγωνομετρικό θεώρημα Weierstrass

Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι πυκνά στον χώρο των συνεχών 2π -περιοδικών συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.

Τριγωνομετρικό θεώρημα Weierstrass

Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι πυκνά στον χώρο των συνεχών 2π -περιοδικών συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.

Θεώρημα

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχής 2π -περιοδική συνάρτηση. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο p τέτοιο ώστε

$$\|f - p\|_{\infty} = \max\{|f(x) - p(x)| : x \in \mathbb{R}\} \leq \varepsilon.$$

Ισοδύναμα, υπάρχει ακολουθία $\{p_m\}$ μιγαδικών τριγωνομετρικών πολυωνύμων τέτοια ώστε $\|f - p_m\|_{\infty} \rightarrow 0$.

Τριγωνομετρικό θεώρημα Weierstrass

Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι πυκνά στον χώρο των συνεχών 2π -περιοδικών συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.

Θεώρημα

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχής 2π -περιοδική συνάρτηση. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο p τέτοιο ώστε

$$\|f - p\|_{\infty} = \max\{|f(x) - p(x)| : x \in \mathbb{R}\} \leq \varepsilon.$$

Ισοδύναμα, υπάρχει ακολουθία $\{p_m\}$ μιγαδικών τριγωνομετρικών πολυωνύμων τέτοια ώστε $\|f - p_m\|_{\infty} \rightarrow 0$.

Στη συνέχεια θα δούμε και άλλες αποδείξεις του Θεωρήματος. Δίνουμε όμως εδώ μια απόδειξη που είναι «ανεξάρτητη» από τη θεωρία των σειρών Fourier.

Πρόταση 2

Κάθε πραγματικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο $T(x)$ βαθμού n είναι πολυώνυμο των $\cos x$ και $\sin x$ βαθμού n . Δηλαδή, υπάρχει πολυώνυμο $p(t, s)$ βαθμού n ώστε

$$T(x) = p(\cos x, \sin x).$$

Πρόταση 2

Κάθε πραγματικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο $T(x)$ βαθμού n είναι πολυώνυμο των $\cos x$ και $\sin x$ βαθμού n . Δηλαδή, υπάρχει πολυώνυμο $p(t, s)$ βαθμού n ώστε

$$T(x) = p(\cos x, \sin x).$$

Η απόδειξη της Πρότασης 2 θα βασιστεί στο ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα

Για κάθε $n \geq 1$, οι συναρτήσεις $\cos nx$ και $(\sin(n+1)x)/\sin x$ είναι πολυώνυμα του $\cos x$ βαθμού n .

Τριγωνομετρικό θεώρημα Weierstrass

- Δείχνουμε με επαγωγή ότι: για κάθε $n \geq 1$ υπάρχουν $a_{n,0}, \dots, a_{n,n-1} \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\cos nx = 2^{n-1} \cos^n x + \sum_{j=0}^{n-1} a_{n,j} \cos^j x. \quad (3)$$

Τριγωνομετρικό θεώρημα Weierstrass

- Δείχνουμε με επαγωγή ότι: για κάθε $n \geq 1$ υπάρχουν $a_{n,0}, \dots, a_{n,n-1} \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\cos nx = 2^{n-1} \cos^n x + \sum_{j=0}^{n-1} a_{n,j} \cos^j x. \quad (3)$$

- Παρατηρήστε ότι η (3) ισχύει τετριμμένα για $n = 1$, ενώ για $n = 2$ γνωρίζουμε ότι

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1.$$

Τριγωνομετρικό θεώρημα Weierstrass

- Δείχνουμε με επαγωγή ότι: για κάθε $n \geq 1$ υπάρχουν $a_{n,0}, \dots, a_{n,n-1} \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\cos nx = 2^{n-1} \cos^n x + \sum_{j=0}^{n-1} a_{n,j} \cos^j x. \quad (3)$$

- Παρατηρήστε ότι η (3) ισχύει τετριμμένα για $n = 1$, ενώ για $n = 2$ γνωρίζουμε ότι

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1.$$

- Υποθέτουμε ότι η (3) ισχύει για το $\cos kx$, $k \geq 2$. Από την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\cos[(k+1)x] + \cos[(k-1)x] = 2 \cos kx \cos x$$

παίρνουμε

$$\begin{aligned} \cos(k+1)x &= 2 \cos kx \cos x - \cos(k-1)x \\ &= 2 \cos x \left(2^{k-1} \cos^k x + \sum_{j=0}^{k-1} a_{k,j} \cos^j x \right) - 2^{k-2} \cos^{k-1} x - \sum_{j=0}^{k-2} a_{k-1,j} \cos^j x \\ &= 2^k \cos^{k+1} x + \sum_{j=0}^k a_{k+1,j} \cos^j x \end{aligned}$$

για κατάλληλους $a_{k+1,j} \in \mathbb{R}$.

Τριγωνομετρικό θεώρημα Weierstrass

- Για τον δεύτερο ισχυρισμό του λήμματος, χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\sin[(k+1)x] - \sin[(k-1)x] = 2 \cos kx \sin x$$

δείχνουμε επαγωγικά ότι, για κάθε $n \geq 1$,

$$\frac{\sin(n+1)x}{\sin x} = 2^n \cos^n x + \sum_{j=0}^{n-1} a_{n,j} \cos^j x$$

για κατάλληλους $a_{n,j} \in \mathbb{R}$.

Τριγωνομετρικό θεώρημα Weierstrass

Πρόταση

Για κάθε $n \geq 0$ θεωρούμε το σύνολο

$$B_n = \{1, \cos x, \cos^2 x, \dots, \cos^n x, \sin x, \sin x \cos x, \dots, \sin x \cos^{n-1} x\}.$$

Τότε,

$$\mathcal{T}_n = \text{span}(B_n) = \text{span}(A_n).$$

Τριγωνομετρικό θεώρημα Weierstrass

Πρόταση

Για κάθε $n \geq 0$ θεωρούμε το σύνολο

$$B_n = \{1, \cos x, \cos^2 x, \dots, \cos^n x, \sin x, \sin x \cos x, \dots, \sin x \cos^{n-1} x\}.$$

Τότε,

$$\mathcal{T}_n = \text{span}(B_n) = \text{span}(A_n).$$

- Γνωρίζουμε ότι $\dim(\mathcal{T}_n) = 2n + 1$: το A_n είναι μία βάση του $\mathcal{T}_n$.

Τριγωνομετρικό θεώρημα Weierstrass

Πρόταση

Για κάθε $n \geq 0$ θεωρούμε το σύνολο

$$B_n = \{1, \cos x, \cos^2 x, \dots, \cos^n x, \sin x, \sin x \cos x, \dots, \sin x \cos^{n-1} x\}.$$

Τότε,

$$\mathcal{T}_n = \text{span}(B_n) = \text{span}(A_n).$$

- Γνωρίζουμε ότι $\dim(\mathcal{T}_n) = 2n + 1$: το A_n είναι μία βάση του $\mathcal{T}_n$.
- Από το Λήμμα έχουμε

$$\mathcal{T}_n \subseteq \text{span}(B_n),$$

όπου $\text{span}(B_n)$ είναι ο γραμμικός χώρος που παράγεται από το B_n .

Τριγωνομετρικό θεώρημα Weierstrass

Πρόταση

Για κάθε $n \geq 0$ θεωρούμε το σύνολο

$$B_n = \{1, \cos x, \cos^2 x, \dots, \cos^n x, \sin x, \sin x \cos x, \dots, \sin x \cos^{n-1} x\}.$$

Τότε,

$$\mathcal{T}_n = \text{span}(B_n) = \text{span}(A_n).$$

- Γνωρίζουμε ότι $\dim(\mathcal{T}_n) = 2n + 1$: το A_n είναι μία βάση του $\mathcal{T}_n$.
- Από το Λήμμα έχουμε

$$\mathcal{T}_n \subseteq \text{span}(B_n),$$

όπου $\text{span}(B_n)$ είναι ο γραμμικός χώρος που παράγεται από το B_n .

- Επιπλέον, αφού $\text{span}(B_n) \supseteq \mathcal{T}_n$ και $\dim(\text{span}(B_n)) \leq 2n + 1$, συμπεραίνουμε ότι, τελικά,

$$\mathcal{T}_n = \text{span}(B_n) = \text{span}(A_n).$$

Πρόταση

Για κάθε $n \geq 0$ θεωρούμε το σύνολο

$$B_n = \{1, \cos x, \cos^2 x, \dots, \cos^n x, \sin x, \sin x \cos x, \dots, \sin x \cos^{n-1} x\}.$$

Τότε,

$$\mathcal{T}_n = \text{span}(B_n) = \text{span}(A_n).$$

- Γνωρίζουμε ότι $\dim(\mathcal{T}_n) = 2n + 1$: το A_n είναι μία βάση του $\mathcal{T}_n$.
- Από το Λήμμα έχουμε

$$\mathcal{T}_n \subseteq \text{span}(B_n),$$

όπου $\text{span}(B_n)$ είναι ο γραμμικός χώρος που παράγεται από το B_n .

- Επιπλέον, αφού $\text{span}(B_n) \supseteq \mathcal{T}_n$ και $\dim(\text{span}(B_n)) \leq 2n + 1$, συμπεραίνουμε ότι, τελικά,

$$\mathcal{T}_n = \text{span}(B_n) = \text{span}(A_n).$$

- Ειδικότερα, κάθε πολυώνυμο του $\cos x$, βαθμού μικρότερου ή ίσου από n , ανήκει στον χώρο $\mathcal{T}_n$.

Τριγωνομετρικό θεώρημα Weierstrass

Δείχνουμε τώρα την Πρόταση 2.

Πρόταση 2

Κάθε πραγματικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο $T(x)$ βαθμού n είναι πολυώνυμο των $\cos x$ και $\sin x$ βαθμού n . Δηλαδή, υπάρχει πολυώνυμο $p(t, s)$ βαθμού n ώστε

$$T(x) = p(\cos x, \sin x).$$

Τριγωνομετρικό θεώρημα Weierstrass

Δείχνουμε τώρα την Πρόταση 2.

Πρόταση 2

Κάθε πραγματικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο $T(x)$ βαθμού n είναι πολυώνυμο των $\cos x$ και $\sin x$ βαθμού n . Δηλαδή, υπάρχει πολυώνυμο $p(t, s)$ βαθμού n ώστε

$$T(x) = p(\cos x, \sin x).$$

- Η Πρόταση 2 είναι άμεση συνέπεια της

$$\mathcal{T}_n = \text{span}(B_n) = \text{span}(A_n).$$

Τριγωνομετρικό θεώρημα Weierstrass

Δείχνουμε τώρα την Πρόταση 2.

Πρόταση 2

Κάθε πραγματικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο $T(x)$ βαθμού n είναι πολυώνυμο των $\cos x$ και $\sin x$ βαθμού n . Δηλαδή, υπάρχει πολυώνυμο $p(t, s)$ βαθμού n ώστε

$$T(x) = p(\cos x, \sin x).$$

- Η Πρόταση 2 είναι άμεση συνέπεια της

$$\mathcal{T}_n = \text{span}(B_n) = \text{span}(A_n).$$

- Πράγματι, κάθε πραγματικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο $T(x)$ βαθμού n ανήκει στον $\mathcal{T}_n = \text{span}(B_n)$, άρα γράφεται στη μορφή

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n b_k \cos^k x + \sum_{k=0}^{n-1} \sin x \cdot \cos^k x,$$

και η συνάρτηση στο δεξιό μέλος είναι πολυώνυμο των $\cos x$ και $\sin x$ βαθμού n .

Τριγωνομετρικό θεώρημα Weierstrass

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 2 και το κλασικό προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass θα δείξουμε ότι ο χώρος $\mathcal{T}$ των πραγματικών τριγωνομετρικών πολυνύμων είναι «πυκνός» στον χώρο των συνεχών 2π -περιοδικών πραγματικών συναρτήσεων.

Τριγωνομετρικό θεώρημα Weierstrass

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 2 και το κλασικό προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass θα δείξουμε ότι ο χώρος $\mathcal{T}$ των πραγματικών τριγωνομετρικών πολωνύμων είναι «πυκνός» στον χώρο των συνεχών 2π -περιοδικών πραγματικών συναρτήσεων.

Θεώρημα

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής 2π -περιοδική συνάρτηση. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πραγματικό τριγωνομετρικό πολώνυμο T ώστε

$$\|f - T\|_{\infty} = \max\{|f(x) - T(x)| : x \in \mathbb{R}\} \leq \varepsilon.$$

Ισοδύναμα, μπορούμε να βρούμε ακολουθία $\{T_m\}$ πραγματικών τριγωνομετρικών πολωνύμων ώστε $\|f - T_m\|_{\infty} \rightarrow 0$.

Τριγωνομετρικό θεώρημα Weierstrass

- Δείχνουμε πρώτα τον ισχυρισμό του θεωρήματος, κάνοντας την επιπλέον υπόθεση ότι η f είναι άρτια: δηλαδή, $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Τριγωνομετρικό θεώρημα Weierstrass

- Δείχνουμε πρώτα τον ισχυρισμό του θεωρήματος, κάνοντας την επιπλέον υπόθεση ότι η f είναι άρτια: δηλαδή, $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Ορίζουμε $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$g(y) = f(\arccos y).$$

Τριγωνομετρικό θεώρημα Weierstrass

- Δείχνουμε πρώτα τον ισχυρισμό του θεωρήματος, κάνοντας την επιπλέον υπόθεση ότι η f είναι άρτια: δηλαδή, $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Ορίζουμε $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$g(y) = f(\arccos y).$$

- Η g είναι καλά ορισμένη, διότι $\arccos y \in [0, \pi]$ για κάθε $y \in [-1, 1]$, και συνεχής, ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

Τριγωνομετρικό θεώρημα Weierstrass

- Δείχνουμε πρώτα τον ισχυρισμό του θεωρήματος, κάνοντας την επιπλέον υπόθεση ότι η f είναι άρτια: δηλαδή, $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Ορίζουμε $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$g(y) = f(\arccos y).$$

- Η g είναι καλά ορισμένη, διότι $\arccos y \in [0, \pi]$ για κάθε $y \in [-1, 1]$, και συνεχής, ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.
- Από το θεώρημα του Weierstrass υπάρχει πολυώνυμο p ώστε $\|g - p\|_{\infty} \leq \varepsilon$. Δηλαδή,

$$|f(\arccos y) - p(y)| \leq \varepsilon$$

για κάθε $y \in [-1, 1]$. Ορίζουμε $T(x) = p(\cos x)$.

Τριγωνομετρικό θεώρημα Weierstrass

- Δείχνουμε πρώτα τον ισχυρισμό του θεωρήματος, κάνοντας την επιπλέον υπόθεση ότι η f είναι άρτια: δηλαδή, $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Ορίζουμε $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$g(y) = f(\arccos y).$$

- Η g είναι καλά ορισμένη, διότι $\arccos y \in [0, \pi]$ για κάθε $y \in [-1, 1]$, και συνεχής, ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.
- Από το θεώρημα του Weierstrass υπάρχει πολυώνυμο p ώστε $\|g - p\|_{\infty} \leq \varepsilon$. Δηλαδή,

$$|f(\arccos y) - p(y)| \leq \varepsilon$$

για κάθε $y \in [-1, 1]$. Ορίζουμε $T(x) = p(\cos x)$.

- Το T είναι πολυώνυμο του $\cos x$, άρα $T \in \mathcal{T}$ από την Πρόταση 2.

Τριγωνομετρικό θεώρημα Weierstrass

- Δείχνουμε πρώτα τον ισχυρισμό του θεωρήματος, κάνοντας την επιπλέον υπόθεση ότι η f είναι άρτια: δηλαδή, $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Ορίζουμε $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$g(y) = f(\arccos y).$$

- Η g είναι καλά ορισμένη, διότι $\arccos y \in [0, \pi]$ για κάθε $y \in [-1, 1]$, και συνεχής, ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.
- Από το θεώρημα του Weierstrass υπάρχει πολώνυμο p ώστε $\|g - p\|_{\infty} \leq \varepsilon$. Δηλαδή,

$$|f(\arccos y) - p(y)| \leq \varepsilon$$

για κάθε $y \in [-1, 1]$. Ορίζουμε $T(x) = p(\cos x)$.

- Το T είναι πολώνυμο του $\cos x$, άρα $T \in \mathcal{T}$ από την Πρόταση 2.
- Παρατηρούμε ότι, για κάθε $x \in [0, \pi]$ υπάρχει $y \in [-1, 1]$ ώστε $y = \cos x$, και τότε,

$$|f(x) - T(x)| = |f(x) - p(\cos x)| = |f(\arccos y) - p(y)| \leq \varepsilon.$$

Τριγωνομετρικό θεώρημα Weierstrass

- Δείχνουμε πρώτα τον ισχυρισμό του θεωρήματος, κάνοντας την επιπλέον υπόθεση ότι η f είναι άρτια: δηλαδή, $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Ορίζουμε $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$g(y) = f(\arccos y).$$

- Η g είναι καλά ορισμένη, διότι $\arccos y \in [0, \pi]$ για κάθε $y \in [-1, 1]$, και συνεχής, ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.
- Από το θεώρημα του Weierstrass υπάρχει πολυώνυμο p ώστε $\|g - p\|_\infty \leq \varepsilon$. Δηλαδή,

$$|f(\arccos y) - p(y)| \leq \varepsilon$$

για κάθε $y \in [-1, 1]$. Ορίζουμε $T(x) = p(\cos x)$.

- Το T είναι πολυώνυμο του $\cos x$, άρα $T \in \mathcal{T}$ από την Πρόταση 2.
- Παρατηρούμε ότι, για κάθε $x \in [0, \pi]$ υπάρχει $y \in [-1, 1]$ ώστε $y = \cos x$, και τότε,

$$|f(x) - T(x)| = |f(x) - p(\cos x)| = |f(\arccos y) - p(y)| \leq \varepsilon.$$

- Αφού οι f και T είναι άρτιες συναρτήσεις, έπεται ότι

$$\|f - T\|_\infty = \max\{|f(x) - T(x)| : -\pi \leq x \leq \pi\} \leq \varepsilon.$$

Τριγωνομετρικό θεώρημα Weierstrass

- Για τη γενική περίπτωση, θεωρούμε τυχούσα συνεχή 2π -περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και ορίζουμε

$$f_1(x) = f(x) + f(-x) \quad \text{και} \quad f_2(x) = [f(x) - f(-x)] \sin x.$$

Τριγωνομετρικό θεώρημα Weierstrass

- Για τη γενική περίπτωση, θεωρούμε τυχούσα συνεχή 2π -περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και ορίζουμε

$$f_1(x) = f(x) + f(-x) \quad \text{και} \quad f_2(x) = [f(x) - f(-x)] \sin x.$$

- Παρατηρήστε ότι οι f_1 και f_2 είναι άρτιες, συνεχείς και 2π -περιοδικές.

Τριγωνομετρικό θεώρημα Weierstrass

- Για τη γενική περίπτωση, θεωρούμε τυχούσα συνεχή 2π -περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και ορίζουμε

$$f_1(x) = f(x) + f(-x) \quad \text{και} \quad f_2(x) = [f(x) - f(-x)] \sin x.$$

- Παρατηρήστε ότι οι f_1 και f_2 είναι άρτιες, συνεχείς και 2π -περιοδικές.
- Άρα, μπορούμε να βρούμε τριγωνομετρικά πολυώνυμα T_1 και T_2 ώστε

$$\|f_1 - T_1\|_{\infty} \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{και} \quad \|f_2 - T_2\|_{\infty} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Τριγωνομετρικό θεώρημα Weierstrass

- Για τη γενική περίπτωση, θεωρούμε τυχούσα συνεχή 2π -περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και ορίζουμε

$$f_1(x) = f(x) + f(-x) \quad \text{και} \quad f_2(x) = [f(x) - f(-x)] \sin x.$$

- Παρατηρήστε ότι οι f_1 και f_2 είναι άρτιες, συνεχείς και 2π -περιοδικές.
- Άρα, μπορούμε να βρούμε τριγωνομετρικά πολυώνυμα T_1 και T_2 ώστε

$$\|f_1 - T_1\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{και} \quad \|f_2 - T_2\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

- Αν θέσουμε

$$T_3(x) = \frac{1}{2}(T_1(x) \sin^2 x + T_2(x) \sin x),$$

τότε $T_3 \in \mathcal{T}$ και, για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$,

$$\begin{aligned} |2f(x) \sin^2 x - 2T_3(x)| &= |f_1(x) \sin^2 x + f_2(x) \sin x - T_1(x) \sin^2 x - T_2(x) \sin x| \\ &\leq |(f_1(x) - T_1(x)) \sin^2 x| + |(f_2(x) - T_2(x)) \sin x| \\ &\leq |f_1(x) - T_1(x)| + |f_2(x) - T_2(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Τριγωνομετρικό θεώρημα Weierstrass

- Για τη γενική περίπτωση, θεωρούμε τυχούσα συνεχή 2π -περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και ορίζουμε

$$f_1(x) = f(x) + f(-x) \quad \text{και} \quad f_2(x) = [f(x) - f(-x)] \sin x.$$

- Παρατηρήστε ότι οι f_1 και f_2 είναι άρτιες, συνεχείς και 2π -περιοδικές.
- Άρα, μπορούμε να βρούμε τριγωνομετρικά πολυώνυμα T_1 και T_2 ώστε

$$\|f_1 - T_1\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{και} \quad \|f_2 - T_2\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

- Αν θέσουμε

$$T_3(x) = \frac{1}{2}(T_1(x) \sin^2 x + T_2(x) \sin x),$$

τότε $T_3 \in \mathcal{T}$ και, για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$,

$$\begin{aligned} |2f(x) \sin^2 x - 2T_3(x)| &= |f_1(x) \sin^2 x + f_2(x) \sin x - T_1(x) \sin^2 x - T_2(x) \sin x| \\ &\leq |(f_1(x) - T_1(x)) \sin^2 x| + |(f_2(x) - T_2(x)) \sin x| \\ &\leq |f_1(x) - T_1(x)| + |f_2(x) - T_2(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

- Με άλλα λόγια, αν ορίσουμε $f_3(x) = f(x) \sin^2 x$ τότε

$$\|f_3 - T_3\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Τριγωνομετρικό θεώρημα Weierstrass

- Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση $g(x) := f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Τριγωνομετρικό θεώρημα Weierstrass

- Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση $g(x) := f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.
- Η g είναι συνεχής και 2π -περιοδική.

Τριγωνομετρικό θεώρημα Weierstrass

- Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση $g(x) := f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.
- Η g είναι συνεχής και 2π -περιοδική.
- Συνεπώς, ο ίδιος συλλογισμός δείχνει ότι υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο T_4 ώστε, για τη συνάρτηση $f_4(x) = g(x) \sin^2 x$ να ισχύει $\|f_4 - T_4\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Τριγωνομετρικό θεώρημα Weierstrass

- Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση $g(x) := f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.
- Η g είναι συνεχής και 2π -περιοδική.
- Συνεπώς, ο ίδιος συλλογισμός δείχνει ότι υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο T_4 ώστε, για τη συνάρτηση $f_4(x) = g(x) \sin^2 x$ να ισχύει $\|f_4 - T_4\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
- Αν ορίσουμε $T_5(x) = T_4(x + \pi/2)$, τότε το T_5 είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο και για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αν θέσουμε $y = x + \pi/2$ έχουμε

$$\begin{aligned} |f(x) \cos^2 x - T_5(x)| &= |f(x) \cos^2 x - T_4(x + \pi/2)| \\ &= |f(y - \pi/2) \sin^2 y - T_4(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Τριγωνομετρικό θεώρημα Weierstrass

- Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση $g(x) := f(x - \frac{\pi}{2})$.
- Η g είναι συνεχής και 2π -περιοδική.
- Συνεπώς, ο ίδιος συλλογισμός δείχνει ότι υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο T_4 ώστε, για τη συνάρτηση $f_4(x) = g(x) \sin^2 x$ να ισχύει $\|f_4 - T_4\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
- Αν ορίσουμε $T_5(x) = T_4(x + \pi/2)$, τότε το T_5 είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο και για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αν θέσουμε $y = x + \pi/2$ έχουμε

$$\begin{aligned} |f(x) \cos^2 x - T_5(x)| &= |f(x) \cos^2 x - T_4(x + \pi/2)| \\ &= |f(y - \pi/2) \sin^2 y - T_4(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

- Συνεπώς,

$$\|f_5 - T_5\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

όπου $f_5(x) = f(x) \cos^2 x$.

Τριγωνομετρικό θεώρημα Weierstrass

- Τέλος, παρατηρούμε ότι $f = f_3 + f_5$, διότι $f(x) = f(x) \sin^2 x + f(x) \cos^2 x$.

Τριγωνομετρικό θεώρημα Weierstrass

- Τέλος, παρατηρούμε ότι $f = f_3 + f_5$, διότι $f(x) = f(x) \sin^2 x + f(x) \cos^2 x$.
- Ορίζουμε $T = T_3 + T_5$. Τότε, $T \in \mathcal{T}$ και

$$\begin{aligned}\|f - T\|_{\infty} &= \|(f_3 + f_5) - (T_3 + T_5)\|_{\infty} \\ &\leq \|f_3 - T_3\|_{\infty} + \|f_5 - T_5\|_{\infty} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Τριγωνομετρικό θεώρημα Weierstrass

- Τέλος, παρατηρούμε ότι $f = f_3 + f_5$, διότι $f(x) = f(x) \sin^2 x + f(x) \cos^2 x$.
- Ορίζουμε $T = T_3 + T_5$. Τότε, $T \in \mathcal{T}$ και

$$\begin{aligned}\|f - T\|_{\infty} &= \|(f_3 + f_5) - (T_3 + T_5)\|_{\infty} \\ &\leq \|f_3 - T_3\|_{\infty} + \|f_5 - T_5\|_{\infty} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

- Αυτό αποδεικνύει το θεώρημα.

Τριγωνομετρικό θεώρημα Weierstrass

- Απόδειξη του (μιγαδικού) τριγωνομετρικού θεωρήματος Weierstrass: Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχής 2π -περιοδική συνάρτηση και έστω $\varepsilon > 0$.

Τριγωνομετρικό θεώρημα Weierstrass

- Απόδειξη του (μιγαδικού) τριγωνομετρικού θεωρήματος Weierstrass: Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχής 2π -περιοδική συνάρτηση και έστω $\varepsilon > 0$.
- Γράφουμε $f = u + iv$ και, χρησιμοποιώντας το πραγματικό τριγωνομετρικό θεώρημα Weierstrass βρίσκουμε πραγματικά τριγωνομετρικά πολυώνυμα T_1, T_2 τέτοια ώστε

$$\|u - T_1\|_\infty \leq \varepsilon/\sqrt{2} \text{ και } \|v - T_2\|_\infty \leq \varepsilon/\sqrt{2}.$$

Τριγωνομετρικό θεώρημα Weierstrass

- Απόδειξη του (μιγαδικού) τριγωνομετρικού θεωρήματος Weierstrass: Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχής 2π -περιοδική συνάρτηση και έστω $\varepsilon > 0$.
- Γράφουμε $f = u + iv$ και, χρησιμοποιώντας το πραγματικό τριγωνομετρικό θεώρημα Weierstrass βρίσκουμε πραγματικά τριγωνομετρικά πολυώνυμα T_1, T_2 τέτοια ώστε

$$\|u - T_1\|_\infty \leq \varepsilon/\sqrt{2} \text{ και } \|v - T_2\|_\infty \leq \varepsilon/\sqrt{2}.$$

- Παρατηρήστε ότι αν ορίσουμε $p = T_1 + iT_2$ τότε

$$|f(x) - p(x)|^2 = |u(x) - T_1(x)|^2 + |v(x) - T_2(x)|^2 \leq \|u - T_1\|_\infty^2 + \|v - T_2\|_\infty^2 \leq \varepsilon^2$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα

$$\|f - p\|_\infty = \max\{|f(x) - p(x)| : x \in \mathbb{R}\} \leq \varepsilon.$$

Τριγωνομετρικό θεώρημα Weierstrass

- Μένει να δείξουμε ότι η $p = T_1 + iT_2$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο.

Τριγωνομετρικό θεώρημα Weierstrass

- Μένει να δείξουμε ότι η $p = T_1 + iT_2$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο.
- Υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε τα T_1, T_2 να γράφονται στη μορφή

$$T_1(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \text{ και } T_2(x) = t_0 + \sum_{k=1}^n (t_k \cos kx + s_k \sin kx),$$

όπου $a_k, b_k, t_k, s_k \in \mathbb{R}$.

Τριγωνομετρικό θεώρημα Weierstrass

- Μένει να δείξουμε ότι η $p = T_1 + iT_2$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο.
- Υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε τα T_1, T_2 να γράφονται στη μορφή

$$T_1(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \text{ και } T_2(x) = t_0 + \sum_{k=1}^n (t_k \cos kx + s_k \sin kx),$$

όπου $a_k, b_k, t_k, s_k \in \mathbb{R}$.

- Χρησιμοποιώντας τις $\cos kx = \frac{1}{2}(e^{ikx} + e^{-ikx})$ και $\sin kx = \frac{1}{2i}(e^{ikx} - e^{-ikx})$ για $1 \leq k \leq n$, με απευθείας υπολογισμό βλέπουμε ότι υπάρχουν $c_k \in \mathbb{C}$, $|k| \leq n$ τέτοιοι ώστε

$$p(x) = T_1(x) + iT_2(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx},$$

δηλαδή το p είναι (μιγαδικό) τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού το πολύ ίσου με n .

Ασκήσεις

Άσκηση 4.7.

Έστω $T(x) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^n (\lambda_k \cos kx + \mu_k \sin kx)$ πραγματικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν το T είναι περιττή συνάρτηση, τότε $\lambda_k = 0$ για κάθε $k = 0, 1, \dots, n$.

Άσκηση 4.7.

Έστω $T(x) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^n (\lambda_k \cos kx + \mu_k \sin kx)$ πραγματικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν το T είναι περιττή συνάρτηση, τότε $\lambda_k = 0$ για κάθε $k = 0, 1, \dots, n$.

- Γνωρίζουμε ότι, για κάθε $k = 1, \dots, n$,

$$\lambda_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(x) \cos kx \, dx.$$

Άσκηση 4.7.

Έστω $T(x) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^n (\lambda_k \cos kx + \mu_k \sin kx)$ πραγματικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν το T είναι περιττή συνάρτηση, τότε $\lambda_k = 0$ για κάθε $k = 0, 1, \dots, n$.

- Γνωρίζουμε ότι, για κάθε $k = 1, \dots, n$,

$$\lambda_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(x) \cos kx \, dx.$$

- Αφού το T είναι περιττή συνάρτηση, έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(x) \cos kx \, dx &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(-y) \cos(-ky) \, dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [-T(y) \cos ky] \, dy \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(y) \cos ky \, dy = -\lambda_k. \end{aligned}$$

Άσκηση 4.7.

Έστω $T(x) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^n (\lambda_k \cos kx + \mu_k \sin kx)$ πραγματικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν το T είναι περιττή συνάρτηση, τότε $\lambda_k = 0$ για κάθε $k = 0, 1, \dots, n$.

- Γνωρίζουμε ότι, για κάθε $k = 1, \dots, n$,

$$\lambda_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(x) \cos kx \, dx.$$

- Αφού το T είναι περιττή συνάρτηση, έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(x) \cos kx \, dx &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(-y) \cos(-ky) \, dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [-T(y) \cos ky] \, dy \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(y) \cos ky \, dy = -\lambda_k. \end{aligned}$$

- Από την $\lambda_k = -\lambda_k$ έπεται ότι $\lambda_k = 0$.

Άσκηση 4.7.

Έστω $T(x) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^n (\lambda_k \cos kx + \mu_k \sin kx)$ πραγματικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν το T είναι περιττή συνάρτηση, τότε $\lambda_k = 0$ για κάθε $k = 0, 1, \dots, n$.

- Γνωρίζουμε ότι, για κάθε $k = 1, \dots, n$,

$$\lambda_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(x) \cos kx \, dx.$$

- Αφού το T είναι περιττή συνάρτηση, έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(x) \cos kx \, dx &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(-y) \cos(-ky) \, dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [-T(y) \cos ky] \, dy \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(y) \cos ky \, dy = -\lambda_k. \end{aligned}$$

- Από την $\lambda_k = -\lambda_k$ έπεται ότι $\lambda_k = 0$.
- Για $k = 0$ γράφουμε

$$\lambda_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(x) \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(-y) \, dy = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(y) \, dy = -\lambda_0,$$

άρα, $\lambda_0 = 0$.

Άσκηση 4.7.

Έστω $T(x) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^n (\lambda_k \cos kx + \mu_k \sin kx)$ πραγματικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Αποδείξτε ότι:

(β) Αν το T είναι άρτια συνάρτηση, τότε $\mu_k = 0$ για κάθε $k = 1, \dots, n$.

Άσκηση 4.7.

Έστω $T(x) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^n (\lambda_k \cos kx + \mu_k \sin kx)$ πραγματικό τριγωνομετρικό πολώνυμο. Αποδείξτε ότι:

(β) Αν το T είναι άρτια συνάρτηση, τότε $\mu_k = 0$ για κάθε $k = 1, \dots, n$.

- Γνωρίζουμε ότι, για κάθε $k = 1, \dots, n$,

$$\mu_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(x) \sin kx \, dx.$$

Άσκηση 4.7.

Έστω $T(x) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^n (\lambda_k \cos kx + \mu_k \sin kx)$ πραγματικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Αποδείξτε ότι:

(β) Αν το T είναι άρτια συνάρτηση, τότε $\mu_k = 0$ για κάθε $k = 1, \dots, n$.

- Γνωρίζουμε ότι, για κάθε $k = 1, \dots, n$,

$$\mu_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(x) \sin kx \, dx.$$

- Αφού το T είναι άρτια συνάρτηση, έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(x) \sin kx \, dx &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(-y) \sin(-ky) \, dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [T(y)(-\sin ky)] \, dy \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(y) \sin ky \, dy = -\mu_k. \end{aligned}$$

Άσκηση 4.7.

Έστω $T(x) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^n (\lambda_k \cos kx + \mu_k \sin kx)$ πραγματικό τριγωνομετρικό πολώνυμο. Αποδείξτε ότι:

(β) Αν το T είναι άρτια συνάρτηση, τότε $\mu_k = 0$ για κάθε $k = 1, \dots, n$.

- Γνωρίζουμε ότι, για κάθε $k = 1, \dots, n$,

$$\mu_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(x) \sin kx \, dx.$$

- Αφού το T είναι άρτια συνάρτηση, έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(x) \sin kx \, dx &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(-y) \sin(-ky) \, dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [T(y)(-\sin ky)] \, dy \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(y) \sin ky \, dy = -\mu_k. \end{aligned}$$

- Από την $\mu_k = -\mu_k$ έπεται ότι $\mu_k = 0$.

Άσκηση 4.9.

(α) Αποδείξτε ότι, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} dt = \begin{cases} 0, & \text{αν } k \neq 0 \\ 1, & \text{αν } k = 0 \end{cases},$$

και συμπεράνατε ότι το σύνολο $\{e^{ikx} : k \in \mathbb{Z}\}$ είναι $\mathbb{C}$ -γραμμικώς ανεξάρτητο.

Άσκηση 4.9.

(α) Αποδείξτε ότι, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} dt = \begin{cases} 0, & \text{αν } k \neq 0 \\ 1, & \text{αν } k = 0 \end{cases},$$

και συμπεράνατε ότι το σύνολο $\{e^{ikx} : k \in \mathbb{Z}\}$ είναι $\mathbb{C}$ -γραμμικώς ανεξάρτητο.

- Θεωρούμε $k_1 < k_2 < \dots < k_n \in \mathbb{Z}$ και υποθέτουμε ότι για κάποιους $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{C}$ ισχύει

$$t_1 e^{ik_1 x} + \dots + t_n e^{ik_n x} \equiv 0.$$

Άσκηση 4.9.

(α) Αποδείξτε ότι, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} dt = \begin{cases} 0, & \text{αν } k \neq 0 \\ 1, & \text{αν } k = 0 \end{cases},$$

και συμπεράνατε ότι το σύνολο $\{e^{ikx} : k \in \mathbb{Z}\}$ είναι $\mathbb{C}$ -γραμμικώς ανεξάρτητο.

- Θεωρούμε $k_1 < k_2 < \dots < k_n \in \mathbb{Z}$ και υποθέτουμε ότι για κάποιους $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{C}$ ισχύει

$$t_1 e^{ik_1 x} + \dots + t_n e^{ik_n x} \equiv 0.$$

- Τότε, για κάθε $s = 1, \dots, n$ έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik_s x} \left(\sum_{j=1}^n t_j e^{ik_j x} \right) dx = \sum_{j=1}^n t_j \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k_j - k_s)x} dx \\ &= 2\pi t_s, \end{aligned}$$

διότι $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k_j - k_s)x} dx = 0$ αν $j \neq s$ και 2π αν $j = s$.

Άσκηση 4.9.

(α) Αποδείξτε ότι, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} dt = \begin{cases} 0, & \text{αν } k \neq 0 \\ 1, & \text{αν } k = 0 \end{cases},$$

και συμπεράνατε ότι το σύνολο $\{e^{ikx} : k \in \mathbb{Z}\}$ είναι $\mathbb{C}$ -γραμμικώς ανεξάρτητο.

- Θεωρούμε $k_1 < k_2 < \dots < k_n \in \mathbb{Z}$ και υποθέτουμε ότι για κάποιους $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{C}$ ισχύει

$$t_1 e^{ik_1 x} + \dots + t_n e^{ik_n x} \equiv 0.$$

- Τότε, για κάθε $s = 1, \dots, n$ έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik_s x} \left(\sum_{j=1}^n t_j e^{ik_j x} \right) dx = \sum_{j=1}^n t_j \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k_j - k_s)x} dx \\ &= 2\pi t_s, \end{aligned}$$

διότι $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k_j - k_s)x} dx = 0$ αν $j \neq s$ και 2π αν $j = s$.

- Έπεται ότι $t_1 = \dots = t_n = 0$. Αυτό δείχνει ότι το σύνολο $\{e^{ikx} : k \in \mathbb{Z}\}$ είναι $\mathbb{C}$ -γραμμικώς ανεξάρτητο.

Άσκηση 4.9.

(β) Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$. Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις

$$e^{i\lambda_1 x}, e^{i\lambda_2 x}, \dots, e^{i\lambda_n x}$$

είναι $\mathbb{C}$ -γραμμικώς ανεξάρτητες. Χρειάζεται η υπόθεση ότι όλοι οι λ_j είναι θετικοί;

Άσκηση 4.9.

(β) Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$. Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις

$$e^{i\lambda_1 x}, e^{i\lambda_2 x}, \dots, e^{i\lambda_n x}$$

είναι $\mathbb{C}$ -γραμμικώς ανεξάρτητες. Χρειάζεται η υπόθεση ότι όλοι οι λ_j είναι θετικοί;

- Χρησιμοποιούμε μόνο το γεγονός ότι οι $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ είναι διακεκριμένοι.

Άσκηση 4.9.

(β) Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$. Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις

$$e^{i\lambda_1 x}, e^{i\lambda_2 x}, \dots, e^{i\lambda_n x}$$

είναι $\mathbb{C}$ -γραμμικώς ανεξάρτητες. Χρειάζεται η υπόθεση ότι όλοι οι λ_j είναι θετικοί;

- Χρησιμοποιούμε μόνο το γεγονός ότι οι $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ είναι διακεκριμένοι.
- Υποθέτουμε ότι για κάποιους $t_1, \dots, t_n$ ισχύει $t_1 e^{i\lambda_1 x} + t_2 e^{i\lambda_2 x} + \dots + t_n e^{i\lambda_n x} \equiv 0$.

Άσκηση 4.9.

(β) Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$. Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις

$$e^{i\lambda_1 x}, e^{i\lambda_2 x}, \dots, e^{i\lambda_n x}$$

είναι $\mathbb{C}$ -γραμμικώς ανεξάρτητες. Χρειάζεται η υπόθεση ότι όλοι οι λ_j είναι θετικοί;

- Χρησιμοποιούμε μόνο το γεγονός ότι οι $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ είναι διακεκριμένοι.
- Υποθέτουμε ότι για κάποιους $t_1, \dots, t_n$ ισχύει $t_1 e^{i\lambda_1 x} + t_2 e^{i\lambda_2 x} + \dots + t_n e^{i\lambda_n x} \equiv 0$.
- Παραγωγίζοντας $n - 1$ φορές ως προς x και θέτοντας $x = 0$ παίρνουμε το σύστημα

$$t_1 + t_2 + \dots + t_n = 0$$

$$\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 + \dots + \lambda_n t_n = 0$$

$$\lambda_1^2 t_1 + \lambda_2^2 t_2 + \dots + \lambda_n^2 t_n = 0$$

...

...

$$\lambda_1^{n-1} t_1 + \lambda_2^{n-1} t_2 + \dots + \lambda_n^{n-1} t_n = 0.$$

Άσκηση 4.9.

(β) Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$. Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις

$$e^{i\lambda_1 x}, e^{i\lambda_2 x}, \dots, e^{i\lambda_n x}$$

είναι $\mathbb{C}$ -γραμμικώς ανεξάρτητες. Χρειάζεται η υπόθεση ότι όλοι οι λ_j είναι θετικοί;

- Χρησιμοποιούμε μόνο το γεγονός ότι οι $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ είναι διακεκριμένοι.
- Υποθέτουμε ότι για κάποιους $t_1, \dots, t_n$ ισχύει $t_1 e^{i\lambda_1 x} + t_2 e^{i\lambda_2 x} + \dots + t_n e^{i\lambda_n x} \equiv 0$.
- Παραγωγίζοντας $n - 1$ φορές ως προς x και θέτοντας $x = 0$ παίρνουμε το σύστημα

$$t_1 + t_2 + \dots + t_n = 0$$

$$\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 + \dots + \lambda_n t_n = 0$$

$$\lambda_1^2 t_1 + \lambda_2^2 t_2 + \dots + \lambda_n^2 t_n = 0$$

...

...

$$\lambda_1^{n-1} t_1 + \lambda_2^{n-1} t_2 + \dots + \lambda_n^{n-1} t_n = 0.$$

- Η ορίζουσα του συστήματος είναι μη μηδενική. Συνεπώς, $t_1 = t_2 = \dots = t_n = 0$.

Άσκηση 4.10.

Έστω $p(x) = \sum_{k=-n}^n a_k e^{ikx}$ και $q(x) = \sum_{k=-n}^n b_k e^{ikx}$ δύο μιγαδικά τριγωνομετρικά πολυώνυμα. Αν $p(x) = q(x)$ για κάθε x σε ένα $A \subseteq [0, 2\pi)$ με πληθάρημο $|A| \geq 2n + 1$, αποδείξτε ότι $a_k = b_k$ για κάθε $|k| \leq n$.

Άσκηση 4.10.

Έστω $p(x) = \sum_{k=-n}^n a_k e^{ikx}$ και $q(x) = \sum_{k=-n}^n b_k e^{ikx}$ δύο μιγαδικά τριγωνομετρικά πολυώνυμα. Αν $p(x) = q(x)$ για κάθε x σε ένα $A \subseteq [0, 2\pi)$ με πληθάρημο $|A| \geq 2n + 1$, αποδείξτε ότι $a_k = b_k$ για κάθε $|k| \leq n$.

- Αρκεί να δείξουμε ότι αν $r(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} = 0$ για όλα τα x στο σύνολο των $2n + 1$ διακεκριμένων πραγματικών αριθμών $\{y_1, \dots, y_{2n+1}\} \subset [0, 2\pi)$, τότε $c_k = 0$ για κάθε $|k| \leq n$.

Άσκηση 4.10.

Έστω $p(x) = \sum_{k=-n}^n a_k e^{ikx}$ και $q(x) = \sum_{k=-n}^n b_k e^{ikx}$ δύο μιγαδικά τριγωνομετρικά πολυώνυμα. Αν $p(x) = q(x)$ για κάθε x σε ένα $A \subseteq [0, 2\pi)$ με πληθάρημο $|A| \geq 2n + 1$, αποδείξτε ότι $a_k = b_k$ για κάθε $|k| \leq n$.

- Αρκεί να δείξουμε ότι αν $r(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} = 0$ για όλα τα x στο σύνολο των $2n + 1$ διακεκριμένων πραγματικών αριθμών $\{y_1, \dots, y_{2n+1}\} \subset [0, 2\pi)$, τότε $c_k = 0$ για κάθε $|k| \leq n$.
- Αυτό προκύπτει άμεσα αν δείξουμε ότι το σύστημα των εξισώσεων

$$\sum_{k=-n}^n c_k e^{iky_s} = \sum_{k=-n}^n c_k u_s^k = 0, \quad s = 1, 2, \dots, 2n + 1$$

με αγνώστους c_k έχει μοναδική λύση τη μηδενική.

- Αν θέσουμε $u_s = e^{iy_s}$, τότε οι u_s είναι διακεκριμένοι (εδώ χρησιμοποιείται η υπόθεση ότι όλοι οι y_s ανήκουν στο $[0, 2\pi)$ και είναι διακεκριμένοι, άρα οι e^{iy_s} είναι επίσης διακεκριμένοι) και ο πίνακας των συντελεστών, μετά από μετάθεση των στηλών του, γράφεται ως

$$\begin{pmatrix} 1 & u_1 & u_1^2 & \dots & u_1^{2n+1} \\ 1 & u_2 & u_2^2 & \dots & u_2^{2n+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & u_{2n+1} & u_{2n+1}^2 & \dots & u_{2n+1}^{2n+1} \end{pmatrix},$$

και γνωρίζουμε ότι η ορίζουσά του ισούται με

$$D = \prod_{1 \leq i < j \leq 2n+1} (u_j - u_i)$$

και δεν μηδενίζεται.