

Αρμονική Ανάλυση

Μάθημα 6

Μάρτιος 2024

Προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass

Το προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass ισχυρίζεται ότι τα πολυώνυμα είναι πυκνά στον χώρο $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$.

Προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass

Το προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass ισχυρίζεται ότι τα πολυώνυμα είναι πυκνά στον χώρο $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$.

Weierstrass

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε ο περιορισμός του p στο $[a, b]$ να ικανοποιεί την

$$\|f - p\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Ισοδύναμα, για κάθε $x \in [a, b]$,

$$|f(x) - p(x)| \leq \varepsilon.$$

Προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass

Το προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass ισχυρίζεται ότι τα πολυώνυμα είναι πυκνά στον χώρο $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$.

Weierstrass

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε ο περιορισμός του p στο $[a, b]$ να ικανοποιεί την

$$\|f - p\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Ισοδύναμα, για κάθε $x \in [a, b]$,

$$|f(x) - p(x)| \leq \varepsilon.$$

Σημείωση. Εφαρμόζοντας διαδοχικά το θεώρημα με $\varepsilon = \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$) μπορούμε να βρούμε ακολουθία πολυωνύμων (p_n) με την ιδιότητα $\|f - p_n\|_\infty \rightarrow 0$.

Προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass

- Αρκεί να εξετάσουμε την περίπτωση του $C[0, 1]$. Αυτό προκύπτει από το ακόλουθο λήμμα.

Προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass

- Αρκεί να εξετάσουμε την περίπτωση του $C[0, 1]$. Αυτό προκύπτει από το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα

Έστω $a < b$ στο $\mathbb{R}$. Υπάρχει γραμμική ισομετρία επί $T : C[a, b] \rightarrow C[0, 1]$ που απεικονίζει πολυώνυμα σε πολυώνυμα.

Προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass

- Αρκεί να εξετάσουμε την περίπτωση του $C[0, 1]$. Αυτό προκύπτει από το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα

Έστω $a < b$ στο $\mathbb{R}$. Υπάρχει γραμμική ισομετρία επί $T : C[a, b] \rightarrow C[0, 1]$ που απεικονίζει πολυώνυμα σε πολυώνυμα.

- Απόδειξη: Ο μετασχηματισμός $\sigma : [0, 1] \rightarrow [a, b]$ με $\sigma(x) = a + x(b - a)$ είναι 1-1 και επί, με αντίστροφο τον μετασχηματισμό $\sigma^{-1}(y) = \frac{y-a}{b-a}$.

Προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass

- Αρκεί να εξετάσουμε την περίπτωση του $C[0, 1]$. Αυτό προκύπτει από το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα

Έστω $a < b$ στο $\mathbb{R}$. Υπάρχει γραμμική ισομετρία επί $T : C[a, b] \rightarrow C[0, 1]$ που απεικονίζει πολυώνυμα σε πολυώνυμα.

- Απόδειξη: Ο μετασχηματισμός $\sigma : [0, 1] \rightarrow [a, b]$ με $\sigma(x) = a + x(b - a)$ είναι 1-1 και επί, με αντίστροφο τον μετασχηματισμό $\sigma^{-1}(y) = \frac{y-a}{b-a}$.
- Ορίζουμε $T : C[a, b] \rightarrow C[0, 1]$ με $T(f) = g$, όπου $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση $g = f \circ \sigma$.

Προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass

- Αρκεί να εξετάσουμε την περίπτωση του $C[0, 1]$. Αυτό προκύπτει από το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα

Έστω $a < b$ στο $\mathbb{R}$. Υπάρχει γραμμική ισομετρία επί $T : C[a, b] \rightarrow C[0, 1]$ που απεικονίζει πολυώνυμα σε πολυώνυμα.

- Απόδειξη: Ο μετασχηματισμός $\sigma : [0, 1] \rightarrow [a, b]$ με $\sigma(x) = a + x(b - a)$ είναι 1-1 και επί, με αντίστροφο τον μετασχηματισμό $\sigma^{-1}(y) = \frac{y-a}{b-a}$.
- Ορίζουμε $T : C[a, b] \rightarrow C[0, 1]$ με $T(f) = g$, όπου $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση $g = f \circ \sigma$.
- Η $g = T(f)$ είναι καλά ορισμένη και συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων: για κάθε $x \in [0, 1]$, $g(x) = f(\sigma(x)) = f(a + x(b - a))$.

Προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass

- Αρκεί να εξετάσουμε την περίπτωση του $C[0, 1]$. Αυτό προκύπτει από το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα

Έστω $a < b$ στο $\mathbb{R}$. Υπάρχει γραμμική ισομετρία επί $T : C[a, b] \rightarrow C[0, 1]$ που απεικονίζει πολυώνυμα σε πολυώνυμα.

- Απόδειξη: Ο μετασχηματισμός $\sigma : [0, 1] \rightarrow [a, b]$ με $\sigma(x) = a + x(b - a)$ είναι 1-1 και επί, με αντίστροφο τον μετασχηματισμό $\sigma^{-1}(y) = \frac{y-a}{b-a}$.
- Ορίζουμε $T : C[a, b] \rightarrow C[0, 1]$ με $T(f) = g$, όπου $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση $g = f \circ \sigma$.
- Η $g = T(f)$ είναι καλά ορισμένη και συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων: για κάθε $x \in [0, 1]$, $g(x) = f(\sigma(x)) = f(a + x(b - a))$.
- Εύκολα ελέγχουμε ότι, για κάθε $f \in C[a, b]$,

$$\|T(f)\|_{\infty} = \max\{|f(a + x(b - a))| : x \in [0, 1]\} = \max\{|f(y)| : y \in [a, b]\} = \|f\|_{\infty}.$$

Προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass

- Αρκεί να εξετάσουμε την περίπτωση του $C[0, 1]$. Αυτό προκύπτει από το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα

Έστω $a < b$ στο $\mathbb{R}$. Υπάρχει γραμμική ισομετρία επί $T : C[a, b] \rightarrow C[0, 1]$ που απεικονίζει πολυώνυμα σε πολυώνυμα.

- Απόδειξη: Ο μετασχηματισμός $\sigma : [0, 1] \rightarrow [a, b]$ με $\sigma(x) = a + x(b - a)$ είναι 1-1 και επί, με αντίστροφο τον μετασχηματισμό $\sigma^{-1}(y) = \frac{y-a}{b-a}$.
- Ορίζουμε $T : C[a, b] \rightarrow C[0, 1]$ με $T(f) = g$, όπου $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση $g = f \circ \sigma$.
- Η $g = T(f)$ είναι καλά ορισμένη και συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων: για κάθε $x \in [0, 1]$, $g(x) = f(\sigma(x)) = f(a + x(b - a))$.
- Εύκολα ελέγχουμε ότι, για κάθε $f \in C[a, b]$,

$$\|T(f)\|_{\infty} = \max\{|f(a + x(b - a))| : x \in [0, 1]\} = \max\{|f(y)| : y \in [a, b]\} = \|f\|_{\infty}.$$

- Επίσης, η T είναι γραμμική απεικόνιση: αν $f_1, f_2 \in C[a, b]$ και $a, b \in \mathbb{R}$, τότε $T(af_1 + bf_2) = aT(f_1) + bT(f_2)$.

Προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass

- Αρκεί να εξετάσουμε την περίπτωση του $C[0, 1]$. Αυτό προκύπτει από το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα

Έστω $a < b$ στο $\mathbb{R}$. Υπάρχει γραμμική ισομετρία επί $T : C[a, b] \rightarrow C[0, 1]$ που απεικονίζει πολυώνυμα σε πολυώνυμα.

- Απόδειξη: Ο μετασχηματισμός $\sigma : [0, 1] \rightarrow [a, b]$ με $\sigma(x) = a + x(b - a)$ είναι 1-1 και επί, με αντίστροφο τον μετασχηματισμό $\sigma^{-1}(y) = \frac{y-a}{b-a}$.
- Ορίζουμε $T : C[a, b] \rightarrow C[0, 1]$ με $T(f) = g$, όπου $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση $g = f \circ \sigma$.
- Η $g = T(f)$ είναι καλά ορισμένη και συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων: για κάθε $x \in [0, 1]$, $g(x) = f(\sigma(x)) = f(a + x(b - a))$.
- Εύκολα ελέγχουμε ότι, για κάθε $f \in C[a, b]$,

$$\|T(f)\|_{\infty} = \max\{|f(a + x(b - a))| : x \in [0, 1]\} = \max\{|f(y)| : y \in [a, b]\} = \|f\|_{\infty}.$$

- Επίσης, η T είναι γραμμική απεικόνιση: αν $f_1, f_2 \in C[a, b]$ και $a, b \in \mathbb{R}$, τότε $T(af_1 + bf_2) = aT(f_1) + bT(f_2)$.
- Τέλος, αν $p(y) = \sum_{k=0}^n \lambda_k y^k$ είναι ένα πολυώνυμο, έχουμε $[T(p)](x) = p(a + x(b - a)) = \sum_{k=0}^n \lambda_k (a + x(b - a))^k$, δηλαδή η συνάρτηση $T(p)$ είναι επίσης πολυώνυμο.

Προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass

- Με βάση το λήμμα βλέπουμε εύκολα ότι, αν αποδείξουμε το θεώρημα στην περίπτωση του $\mathcal{C}[0, 1]$ τότε έχουμε το ίδιο συμπέρασμα για οποιονδήποτε $\mathcal{C}[a, b]$.

Προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass

- Με βάση το λήμμα βλέπουμε εύκολα ότι, αν αποδείξουμε το θεώρημα στην περίπτωση του $C[0, 1]$ τότε έχουμε το ίδιο συμπέρασμα για οποιονδήποτε $C[a, b]$.
- Πράγματι, έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και έστω $\varepsilon > 0$. Η $T(f) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής, άρα υπάρχει πολυώνυμο q ώστε

$$\|T(f) - q\|_{\infty} \leq \varepsilon.$$

Προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass

- Με βάση το λήμμα βλέπουμε εύκολα ότι, αν αποδείξουμε το θεώρημα στην περίπτωση του $C[0, 1]$ τότε έχουμε το ίδιο συμπέρασμα για οποιονδήποτε $C[a, b]$.
- Πράγματι, έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και έστω $\varepsilon > 0$. Η $T(f) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής, άρα υπάρχει πολυώνυμο q ώστε

$$\|T(f) - q\|_{\infty} \leq \varepsilon.$$

- Ορίζουμε $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με $p(y) = q(\sigma^{-1}(y))$. Η συνάρτηση p είναι πολυώνυμο (ακριβέστερα, περιορισμός πολυωνύμου στο $[a, b]$) και $T(p) = q$.

Προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass

- Με βάση το λήμμα βλέπουμε εύκολα ότι, αν αποδείξουμε το θεώρημα στην περίπτωση του $\mathcal{C}[0, 1]$ τότε έχουμε το ίδιο συμπέρασμα για οποιονδήποτε $\mathcal{C}[a, b]$.
- Πράγματι, έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και έστω $\varepsilon > 0$. Η $T(f) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής, άρα υπάρχει πολυώνυμο q ώστε

$$\|T(f) - q\|_{\infty} \leq \varepsilon.$$

- Ορίζουμε $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με $p(y) = q(\sigma^{-1}(y))$. Η συνάρτηση p είναι πολυώνυμο (ακριβέστερα, περιορισμός πολυωνύμου στο $[a, b]$) και $T(p) = q$.
- Τότε,

$$\|f - p\|_{\infty} = \|T(f - p)\|_{\infty} = \|T(f) - T(p)\|_{\infty} = \|T(f) - q\|_{\infty} \leq \varepsilon.$$

Προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass

- Με βάση το λήμμα βλέπουμε εύκολα ότι, αν αποδείξουμε το θεώρημα στην περίπτωση του $\mathcal{C}[0, 1]$ τότε έχουμε το ίδιο συμπέρασμα για οποιονδήποτε $\mathcal{C}[a, b]$.
- Πράγματι, έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και έστω $\varepsilon > 0$. Η $T(f) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής, άρα υπάρχει πολυώνυμο q ώστε

$$\|T(f) - q\|_{\infty} \leq \varepsilon.$$

- Ορίζουμε $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με $p(y) = q(\sigma^{-1}(y))$. Η συνάρτηση p είναι πολυώνυμο (ακριβέστερα, περιορισμός πολυωνύμου στο $[a, b]$) και $T(p) = q$.
- Τότε,

$$\|f - p\|_{\infty} = \|T(f - p)\|_{\infty} = \|T(f) - T(p)\|_{\infty} = \|T(f) - q\|_{\infty} \leq \varepsilon.$$

- Συνεπώς, αρκεί να αποδείξουμε το θεώρημα στην περίπτωση του $\mathcal{C}[0, 1]$.

Προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass

Λήμμα 1

Για κάθε $x \in [0, 1]$ ισχύουν οι ταυτότητες:

$$(\alpha) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1.$$

$$(\beta) \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = x.$$

$$(\gamma) \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2 + \frac{1}{n} x.$$

Προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass

Λήμμα 1

Για κάθε $x \in [0, 1]$ ισχύουν οι ταυτότητες:

$$(\alpha) \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1.$$

$$(\beta) \quad \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = x.$$

$$(\gamma) \quad \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2 + \frac{1}{n} x.$$

Προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass

Λήμμα 1

Για κάθε $x \in [0, 1]$ ισχύουν οι ταυτότητες:

$$(\alpha) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1.$$

$$(\beta) \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = x.$$

$$(\gamma) \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2 + \frac{1}{n} x.$$

- (α) Προκύπτει άμεσα από τον διωνυμικό τύπο:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = [x + (1-x)]^n = 1.$$

Προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass

Λήμμα 1

Για κάθε $x \in [0, 1]$ ισχύουν οι ταυτότητες:

$$(\alpha) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1.$$

$$(\beta) \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = x.$$

$$(\gamma) \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2 + \frac{1}{n} x.$$

Προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass

Λήμμα 1

Για κάθε $x \in [0, 1]$ ισχύουν οι ταυτότητες:

$$(\alpha) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1.$$

$$(\beta) \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = x.$$

$$(\gamma) \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2 + \frac{1}{n} x.$$

- (β) Παρατηρούμε ότι, για κάθε $k = 1, \dots, n$,

$$\frac{k}{n} \binom{n}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \binom{n-1}{k-1}.$$

Προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass

Λήμμα 1

Για κάθε $x \in [0, 1]$ ισχύουν οι ταυτότητες:

$$(\alpha) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1.$$

$$(\beta) \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = x.$$

$$(\gamma) \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2 + \frac{1}{n} x.$$

- (β) Παρατηρούμε ότι, για κάθε $k = 1, \dots, n$,

$$\frac{k}{n} \binom{n}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \binom{n-1}{k-1}.$$

- Έπεται ότι

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= x \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\ &= x \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{n-1-j} = x. \end{aligned}$$

Προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass

Λήμμα 1

Για κάθε $x \in [0, 1]$ ισχύουν οι ταυτότητες:

$$(\gamma) \quad \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2 + \frac{1}{n} x.$$

Προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass

Λήμμα 1

Για κάθε $x \in [0, 1]$ ισχύουν οι ταυτότητες:

$$(\gamma) \quad \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2 + \frac{1}{n} x.$$

- (γ) Παρατηρούμε ότι, αν $k \geq 1$,

$$\left(\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} = \frac{k}{n} \binom{n-1}{k-1} = \frac{n-1}{n} \frac{k-1}{n-1} \binom{n-1}{k-1} + \frac{1}{n} \binom{n-1}{k-1},$$

και, αν $k \geq 2$, η τελευταία ποσότητα ισούται με

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) \binom{n-2}{k-2} + \frac{1}{n} \binom{n-1}{k-1}.$$

Προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass

Λήμμα 1

Για κάθε $x \in [0, 1]$ ισχύουν οι ταυτότητες:

$$(\gamma) \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2 + \frac{1}{n} x.$$

- (γ) Παρατηρούμε ότι, αν $k \geq 1$,

$$\left(\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} = \frac{k}{n} \binom{n-1}{k-1} = \frac{n-1}{n} \frac{k-1}{n-1} \binom{n-1}{k-1} + \frac{1}{n} \binom{n-1}{k-1},$$

και, αν $k \geq 2$, η τελευταία ποσότητα ισούται με

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) \binom{n-2}{k-2} + \frac{1}{n} \binom{n-1}{k-1}.$$

- Τότε,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\quad + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2 + \frac{1}{n} x. \end{aligned}$$

Λήμμα 2

Για κάθε $x \in [0, 1]$,

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{1}{4n}.$$

Λήμμα 2

Για κάθε $x \in [0, 1]$,

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{1}{4n}.$$

- Απόδειξη: Από την $\left(\frac{k}{n} - x\right)^2 = \left(\frac{k}{n}\right)^2 - 2\frac{k}{n}x + x^2$ και το προηγούμενο λήμμα, συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2 + \frac{1}{n} x - 2x^2 + x^2 \\ &= \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{1}{4n}, \end{aligned}$$

αφού $4x(1-x) \leq 1$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

Λήμμα 3

Έστω $\delta > 0$ και $x \in [0, 1]$. Αν $F = F(\delta, x)$ είναι το σύνολο των $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ για τα οποία $\left| \frac{k}{n} - x \right| \geq \delta$, τότε

$$\sum_{k \in F} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{4n\delta^2}.$$

Λήμμα 3

Έστω $\delta > 0$ και $x \in [0, 1]$. Αν $F = F(\delta, x)$ είναι το σύνολο των $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ για τα οποία $\left| \frac{k}{n} - x \right| \geq \delta$, τότε

$$\sum_{k \in F} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{4n\delta^2}.$$

- Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \sum_{k \in F} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &\leq \frac{1}{\delta^2} \sum_{k \in F} \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq \frac{1}{\delta^2} \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq \frac{1}{4n\delta^2} \end{aligned}$$

από το προηγούμενο λήμμα.

Πολυώνυμα Bernstein

Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε το n -οστό πολυώνυμο Bernstein $B_n(f)$ της f ως εξής:

$$[B_n(f)](x) = \sum_{k=0}^n f(k/n) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad x \in [0, 1].$$

Πολυώνυμο Bernstein

Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε το n -οστό πολυώνυμο Bernstein $B_n(f)$ της f ως εξής:

$$[B_n(f)](x) = \sum_{k=0}^n f(k/n) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad x \in [0, 1].$$

- Παρατηρήστε ότι το $B_n(f)$ είναι όντως πολυώνυμο (με βαθμό το πολύ ίσο με n) και ότι $[B_n(f)](0) = f(0)$ και $[B_n(f)](1) = f(1)$.

Πολυώνυμο Bernstein

Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε το n -οστό πολυώνυμο Bernstein $B_n(f)$ της f ως εξής:

$$[B_n(f)](x) = \sum_{k=0}^n f(k/n) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad x \in [0, 1].$$

- Παρατηρήστε ότι το $B_n(f)$ είναι όντως πολυώνυμο (με βαθμό το πολύ ίσο με n) και ότι $[B_n(f)](0) = f(0)$ και $[B_n(f)](1) = f(1)$.
- Επίσης, το Λήμμα 1 δείχνει ότι αν $f_k(x) = x^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$B_n(f_0) = f_0, \quad B_n(f_1) = f_1, \quad B_n(f_2) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) f_2 + \frac{1}{n} f_1.$$

Πολυώνυμο Bernstein

Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε το n -οστό πολυώνυμο Bernstein $B_n(f)$ της f ως εξής:

$$[B_n(f)](x) = \sum_{k=0}^n f(k/n) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad x \in [0, 1].$$

- Παρατηρήστε ότι το $B_n(f)$ είναι όντως πολυώνυμο (με βαθμό το πολύ ίσο με n) και ότι $[B_n(f)](0) = f(0)$ και $[B_n(f)](1) = f(1)$.
- Επίσης, το Λήμμα 1 δείχνει ότι αν $f_k(x) = x^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$B_n(f_0) = f_0, \quad B_n(f_1) = f_1, \quad B_n(f_2) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) f_2 + \frac{1}{n} f_1.$$

- Ειδικότερα, για $k = 0, 1, 2$,

$$\|f_k - B_n(f_k)\|_{\infty} \rightarrow 0$$

όταν $n \rightarrow \infty$.

Προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass

Θεώρημα Bernstein

Για κάθε $f \in \mathcal{C}[0, 1]$ ισχύει ότι $B_n(f) \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο $[0, 1]$.

Προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass

Θεώρημα Bernstein

Για κάθε $f \in \mathcal{C}[0, 1]$ ισχύει ότι $B_n(f) \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο $[0, 1]$.

- Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και έστω $\varepsilon > 0$.

Προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass

Θεώρημα Bernstein

Για κάθε $f \in \mathcal{C}[0, 1]$ ισχύει ότι $B_n(f) \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο $[0, 1]$.

- Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και έστω $\varepsilon > 0$.
- Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $x, y \in [0, 1]$ και $|x - y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon/2$.

Προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass

Θεώρημα Bernstein

Για κάθε $f \in \mathcal{C}[0, 1]$ ισχύει ότι $B_n(f) \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο $[0, 1]$.

- Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και έστω $\varepsilon > 0$.
- Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $x, y \in [0, 1]$ και $|x - y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon/2$.
- Λόγω της $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1$, για κάθε $x \in [0, 1]$ έχουμε

$$\begin{aligned} |f(x) - [B_n(f)](x)| &= \left| f(x) - \sum_{k=0}^n f(k/n) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^n f(x) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^n f(k/n) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^n (f(x) - f(k/n)) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^n |f(x) - f(k/n)| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}. \end{aligned}$$

Προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass

- Είδαμε ότι, για κάθε $x \in [0, 1]$,

$$|f(x) - [B_n(f)](x)| \leq \sum_{k=0}^n |f(x) - f(k/n)| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass

- Είδαμε ότι, για κάθε $x \in [0, 1]$,

$$|f(x) - [B_n(f)](x)| \leq \sum_{k=0}^n |f(x) - f(k/n)| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

- Έστω $F = F(\delta, x)$ το σύνολο των $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ για τα οποία $\left| \frac{k}{n} - x \right| \geq \delta$.

Προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass

- Είδαμε ότι, για κάθε $x \in [0, 1]$,

$$|f(x) - [B_n(f)](x)| \leq \sum_{k=0}^n |f(x) - f(k/n)| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

- Έστω $F = F(\delta, x)$ το σύνολο των $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ για τα οποία $|\frac{k}{n} - x| \geq \delta$.
- Από το Λήμμα 3 παίρνουμε

$$\sum_{k \in F} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{4n\delta^2}.$$

Προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass

- Είδαμε ότι, για κάθε $x \in [0, 1]$,

$$|f(x) - [B_n(f)](x)| \leq \sum_{k=0}^n |f(x) - f(k/n)| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

- Έστω $F = F(\delta, x)$ το σύνολο των $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ για τα οποία $|\frac{k}{n} - x| \geq \delta$.
- Από το Λήμμα 3 παίρνουμε

$$\sum_{k \in F} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{4n\delta^2}.$$

- Επίσης, παρατηρήστε ότι:

- (α) Αν $k \in F$ τότε $|f(x) - f(k/n)| \leq 2\|f\|_\infty$, και
- (β) Αν $k \notin F$ τότε $|f(x) - f(k/n)| \leq \varepsilon/2$.

Προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass

- Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$\begin{aligned}|f(x) - [B_n(f)](x)| &\leq \sum_{k=0}^n |f(x) - f(k/n)| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\&\leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k \notin F} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + 2\|f\|_{\infty} \sum_{k \in F} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\&\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2\|f\|_{\infty} \frac{1}{4n\delta^2} \\&\leq \varepsilon,\end{aligned}$$

$$\text{αν } n > n_0 = \lceil \|f\|_{\infty} / (\varepsilon\delta^2) \rceil + 1.$$

Προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass

- Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$\begin{aligned}|f(x) - [B_n(f)](x)| &\leq \sum_{k=0}^n |f(x) - f(k/n)| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\&\leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k \notin F} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + 2\|f\|_{\infty} \sum_{k \in F} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\&\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2\|f\|_{\infty} \frac{1}{4n\delta^2} \\&\leq \varepsilon,\end{aligned}$$

αν $n > n_0 = \lceil \|f\|_{\infty} / (\varepsilon\delta^2) \rceil + 1$.

- Η επιλογή του n_0 είναι ανεξάρτητη από το $x \in [0, 1]$, άρα, για κάθε $n > n_0$ έχουμε $\|f - B_n(f)\|_{\infty} \leq \varepsilon$.

Προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass

- Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$\begin{aligned}|f(x) - [B_n(f)](x)| &\leq \sum_{k=0}^n |f(x) - f(k/n)| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\&\leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k \notin F} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + 2\|f\|_{\infty} \sum_{k \in F} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\&\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2\|f\|_{\infty} \frac{1}{4n\delta^2} \\&\leq \varepsilon,\end{aligned}$$

αν $n > n_0 = \lceil \|f\|_{\infty} / (\varepsilon \delta^2) \rceil + 1$.

- Η επιλογή του n_0 είναι ανεξάρτητη από το $x \in [0, 1]$, άρα, για κάθε $n > n_0$ έχουμε $\|f - B_n(f)\|_{\infty} \leq \varepsilon$.

Απόδειξη του Θεωρήματος Weierstrass

Αφού κάθε $B_n(f)$ είναι πολυώνυμο, το θεώρημα είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος του Bernstein.

Άσκηση 4.1.

(α) Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν ισχύει $\int_0^1 x^n f(x) dx = 0$ για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots$, αποδείξτε ότι $f \equiv 0$.

Άσκηση 4.1.

(α) Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν ισχύει $\int_0^1 x^n f(x) dx = 0$ για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots$, αποδείξτε ότι $f \equiv 0$.

- Από το θεώρημα Weierstrass έπεται ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (p_n) ώστε $p_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο $[0, 1]$.

Άσκηση 4.1.

(α) Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν ισχύει $\int_0^1 x^n f(x) dx = 0$ για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots$, αποδείξτε ότι $f \equiv 0$.

- Από το θεώρημα Weierstrass έπεται ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (p_n) ώστε $p_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο $[0, 1]$.
- Αφού η f είναι φραγμένη, έχουμε ότι $f p_n \rightarrow f^2$ ομοιόμορφα.

Άσκηση 4.1.

(α) Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν ισχύει $\int_0^1 x^n f(x) dx = 0$ για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots$, αποδείξτε ότι $f \equiv 0$.

- Από το θεώρημα Weierstrass έπεται ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (p_n) ώστε $p_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο $[0, 1]$.
- Αφού η f είναι φραγμένη, έχουμε ότι $f p_n \rightarrow f^2$ ομοιόμορφα.
- Άρα,

$$\int_0^1 (f(x))^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 p_n(x) f(x) dx.$$

Άσκηση 4.1.

(α) Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν ισχύει $\int_0^1 x^n f(x) dx = 0$ για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots$, αποδείξτε ότι $f \equiv 0$.

- Από το θεώρημα Weierstrass έπεται ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (p_n) ώστε $p_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο $[0, 1]$.
- Αφού η f είναι φραγμένη, έχουμε ότι $f p_n \rightarrow f^2$ ομοιόμορφα.
- Άρα,

$$\int_0^1 (f(x))^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 p_n(x) f(x) dx.$$

- Όμως, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το $\int_0^1 p_n(x) f(x) dx$ είναι πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός των $\int_0^1 x^n f(x) dx$ τα οποία είναι ίσα με μηδέν από την υπόθεση. Άρα, $\int_0^1 p_n(x) f(x) dx = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε $\int_0^1 f^2 = 0$.

Άσκηση 4.1.

(α) Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν ισχύει $\int_0^1 x^n f(x) dx = 0$ για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots$, αποδείξτε ότι $f \equiv 0$.

- Από το θεώρημα Weierstrass έπεται ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (p_n) ώστε $p_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο $[0, 1]$.
- Αφού η f είναι φραγμένη, έχουμε ότι $f p_n \rightarrow f^2$ ομοιόμορφα.
- Άρα,

$$\int_0^1 (f(x))^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 p_n(x) f(x) dx.$$

- Όμως, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το $\int_0^1 p_n(x) f(x) dx$ είναι πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός των $\int_0^1 x^n f(x) dx$ τα οποία είναι ίσα με μηδέν από την υπόθεση. Άρα, $\int_0^1 p_n(x) f(x) dx = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε $\int_0^1 f^2 = 0$.
- Από την τελευταία σχέση έπεται ότι $f \equiv 0$.

Ασκήσεις

Άσκηση 4.1.

(β) Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν ισχύει $\int_0^1 x^{2n} f(x) dx = 0$ για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots$, αποδείξτε ότι $f \equiv 0$.

Άσκηση 4.1.

(β) Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν ισχύει $\int_0^1 x^{2n} f(x) dx = 0$ για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots$, αποδείξτε ότι $f \equiv 0$.

- Θεωρούμε τη συνάρτηση $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = f(\sqrt{x})$.

Άσκηση 4.1.

(β) Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν ισχύει $\int_0^1 x^{2n} f(x) dx = 0$ για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots$, αποδείξτε ότι $f \equiv 0$.

- Θεωρούμε τη συνάρτηση $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = f(\sqrt{x})$.
- Παρατηρούμε ότι η h είναι συνεχής, άρα από το θεώρημα του Weierstrass υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (p_n) ώστε $\|h - p_n\|_\infty < \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 4.1.

(β) Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν ισχύει $\int_0^1 x^{2n} f(x) dx = 0$ για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots$, αποδείξτε ότι $f \equiv 0$.

- Θεωρούμε τη συνάρτηση $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = f(\sqrt{x})$.
- Παρατηρούμε ότι η h είναι συνεχής, άρα από το θεώρημα του Weierstrass υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (p_n) ώστε $\|h - p_n\|_\infty < \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
- Δηλαδή, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in [0, 1]$ ισχύει $|p_n(x) - h(x)| < 1/n$.

Άσκηση 4.1.

(β) Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν ισχύει $\int_0^1 x^{2n} f(x) dx = 0$ για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots$, αποδείξτε ότι $f \equiv 0$.

- Θεωρούμε τη συνάρτηση $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = f(\sqrt{x})$.
- Παρατηρούμε ότι η h είναι συνεχής, άρα από το θεώρημα του Weierstrass υπάρχει ακολουθία πολωνύμων (p_n) ώστε $\|h - p_n\|_\infty < \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
- Δηλαδή, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in [0, 1]$ ισχύει $|p_n(x) - h(x)| < 1/n$.
- Έπεται ότι

$$|p_n(x^2) - f(x)| = |p_n(x^2) - h(x^2)| < \frac{1}{n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in [0, 1]$.

Άσκηση 4.1.

(β) Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν ισχύει $\int_0^1 x^{2n} f(x) dx = 0$ για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots$, αποδείξτε ότι $f \equiv 0$.

- Θεωρούμε τη συνάρτηση $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = f(\sqrt{x})$.
- Παρατηρούμε ότι η h είναι συνεχής, άρα από το θεώρημα του Weierstrass υπάρχει ακολουθία πολωνύμων (p_n) ώστε $\|h - p_n\|_\infty < \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
- Δηλαδή, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in [0, 1]$ ισχύει $|p_n(x) - h(x)| < 1/n$.
- Έπεται ότι

$$|p_n(x^2) - f(x)| = |p_n(x^2) - h(x^2)| < \frac{1}{n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in [0, 1]$.

- Θέτοντας $q_n(x) = p_n(x^2)$, παρατηρούμε ότι κάθε q_n είναι πολύωνμο που περιέχει μόνο άρτια μονώνυμα και ότι $\|q_n - f\|_\infty \leq 1/n$ για κάθε n από την τελευταία σχέση.

Άσκηση 4.1.

(β) Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν ισχύει $\int_0^1 x^{2n} f(x) dx = 0$ για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots$, αποδείξτε ότι $f \equiv 0$.

- Θεωρούμε τη συνάρτηση $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = f(\sqrt{x})$.
- Παρατηρούμε ότι η h είναι συνεχής, άρα από το θεώρημα του Weierstrass υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (p_n) ώστε $\|h - p_n\|_\infty < \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
- Δηλαδή, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in [0, 1]$ ισχύει $|p_n(x) - h(x)| < 1/n$.
- Έπεται ότι

$$|p_n(x^2) - f(x)| = |p_n(x^2) - h(x^2)| < \frac{1}{n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in [0, 1]$.

- Θέτοντας $q_n(x) = p_n(x^2)$, παρατηρούμε ότι κάθε q_n είναι πολύωνμο που περιέχει μόνο άρτια μονώνυμα και ότι $\|q_n - f\|_\infty \leq 1/n$ για κάθε n από την τελευταία σχέση.
- Άρα, η (q_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στην f . Έπεται ότι $f q_n \rightarrow f^2$ ομοιόμορφα.

Άσκηση 4.1.

(β) Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν ισχύει $\int_0^1 x^{2n} f(x) dx = 0$ για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots$, αποδείξτε ότι $f \equiv 0$.

- Θεωρούμε τη συνάρτηση $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = f(\sqrt{x})$.
- Παρατηρούμε ότι η h είναι συνεχής, άρα από το θεώρημα του Weierstrass υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (p_n) ώστε $\|h - p_n\|_\infty < \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
- Δηλαδή, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in [0, 1]$ ισχύει $|p_n(x) - h(x)| < 1/n$.
- Έπεται ότι

$$|p_n(x^2) - f(x)| = |p_n(x^2) - h(x^2)| < \frac{1}{n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in [0, 1]$.

- Θέτοντας $q_n(x) = p_n(x^2)$, παρατηρούμε ότι κάθε q_n είναι πολυώνυμο που περιέχει μόνο άρτια μονώνυμα και ότι $\|q_n - f\|_\infty \leq 1/n$ για κάθε n από την τελευταία σχέση.
- Άρα, η (q_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στην f . Έπεται ότι $f q_n \rightarrow f^2$ ομοιόμορφα.
- Τότε,

$$\int_0^1 f(x) q_n(x) dx \rightarrow \int_0^1 (f(x))^2 dx.$$

Άσκηση 4.1.

(β) Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν ισχύει $\int_0^1 x^{2n} f(x) dx = 0$ για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots$, αποδείξτε ότι $f \equiv 0$.

- Θεωρούμε τη συνάρτηση $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = f(\sqrt{x})$.
- Παρατηρούμε ότι η h είναι συνεχής, άρα από το θεώρημα του Weierstrass υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (p_n) ώστε $\|h - p_n\|_\infty < \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
- Δηλαδή, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in [0, 1]$ ισχύει $|p_n(x) - h(x)| < 1/n$.
- Έπεται ότι

$$|p_n(x^2) - f(x)| = |p_n(x^2) - h(x^2)| < \frac{1}{n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in [0, 1]$.

- Θέτοντας $q_n(x) = p_n(x^2)$, παρατηρούμε ότι κάθε q_n είναι πολυώνυμο που περιέχει μόνο άρτια μονώνυμα και ότι $\|q_n - f\|_\infty \leq 1/n$ για κάθε n από την τελευταία σχέση.
- Άρα, η (q_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στην f . Έπεται ότι $f q_n \rightarrow f^2$ ομοιόμορφα.
- Τότε,

$$\int_0^1 f(x) q_n(x) dx \rightarrow \int_0^1 (f(x))^2 dx.$$

- Από την υπόθεση έχουμε $\int_0^1 q_n(x) f(x) dx = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα έχουμε το συμπέρασμα.

Άσκηση 4.2.

(α) Έστω $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει πολυώνυμο $p : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f(x) < p(x) < g(x)$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

Άσκηση 4.2.

(α) Έστω $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει πολυώνυμο $p : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f(x) < p(x) < g(x)$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

- Αφού οι f, g είναι συνεχείς και $g(x) - f(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$, υπάρχει $m > 0$ ώστε $g(x) - f(x) \geq m$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

Άσκηση 4.2.

(α) Έστω $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει πολυώνυμο $p : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f(x) < p(x) < g(x)$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

- Αφού οι f, g είναι συνεχείς και $g(x) - f(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$, υπάρχει $m > 0$ ώστε $g(x) - f(x) \geq m$ για κάθε $x \in [0, 1]$.
- Καθώς, η $\frac{f+g}{2}$ είναι συνεχής, από το προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass υπάρχει πολυώνυμο p ώστε $\|p - \frac{f+g}{2}\|_\infty < \frac{m}{2}$.

Άσκηση 4.2.

(α) Έστω $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει πολυώνυμο $p : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f(x) < p(x) < g(x)$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

- Αφού οι f, g είναι συνεχείς και $g(x) - f(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$, υπάρχει $m > 0$ ώστε $g(x) - f(x) \geq m$ για κάθε $x \in [0, 1]$.
- Καθώς, η $\frac{f+g}{2}$ είναι συνεχής, από το προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass υπάρχει πολυώνυμο p ώστε $\|p - \frac{f+g}{2}\|_\infty < \frac{m}{2}$.
- Τότε, για κάθε $x \in [0, 1]$ ισχύει ότι

$$f(x) \leq \frac{f(x) + g(x)}{2} - \frac{m}{2} < p(x) < \frac{f(x) + g(x)}{2} + \frac{m}{2} \leq g(x).$$

Άσκηση 4.2.

(β) Αποδείξτε ότι υπάρχει πολυώνυμο q ώστε $e^x \leq q(x) \leq e^{2x}$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

Άσκηση 4.2.

(β) Αποδείξτε ότι υπάρχει πολυώνυμο q ώστε $e^x \leq q(x) \leq e^{2x}$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

- Εφαρμόζουμε το προηγούμενο ερώτημα για τις $f(x) = e^x$ και $g(x) = 2e^{2x}$, $x \in [0, 1]$. Υπάρχει πολυώνυμο p ώστε $e^t < p(t) < 2e^{2t}$ για κάθε $t \in [0, 1]$.

Άσκηση 4.2.

(β) Αποδείξτε ότι υπάρχει πολυώνυμο q ώστε $e^x \leq q(x) \leq e^{2x}$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

- Εφαρμόζουμε το προηγούμενο ερώτημα για τις $f(x) = e^x$ και $g(x) = 2e^{2x}$, $x \in [0, 1]$. Υπάρχει πολυώνυμο p ώστε $e^t < p(t) < 2e^{2t}$ για κάθε $t \in [0, 1]$.
- Έστω $x \in (0, 1]$. Τότε, έχουμε

$$\int_0^x e^t dt < \int_0^x p(t) dt < 2 \int_0^x e^{2t} dt$$

δηλαδή,

$$e^x < \int_0^x p(t) dt + 1 < e^{2x}$$

για κάθε $x \in (0, 1]$.

Άσκηση 4.2.

(β) Αποδείξτε ότι υπάρχει πολυώνυμο q ώστε $e^x \leq q(x) \leq e^{2x}$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

- Εφαρμόζουμε το προηγούμενο ερώτημα για τις $f(x) = e^x$ και $g(x) = 2e^{2x}$, $x \in [0, 1]$. Υπάρχει πολυώνυμο p ώστε $e^t < p(t) < 2e^{2t}$ για κάθε $t \in [0, 1]$.
- Έστω $x \in (0, 1]$. Τότε, έχουμε

$$\int_0^x e^t dt < \int_0^x p(t) dt < 2 \int_0^x e^{2t} dt$$

δηλαδή,

$$e^x < \int_0^x p(t) dt + 1 < e^{2x}$$

για κάθε $x \in (0, 1]$.

- Έπεται, ότι για κάθε $x \in [0, 1]$ ισχύει

$$e^x \leq q(x) \leq e^{2x},$$

όπου $q(x) = \int_0^x p(t) dt + 1$.

Άσκηση 4.2.

(β) Αποδείξτε ότι υπάρχει πολυώνυμο q ώστε $e^x \leq q(x) \leq e^{2x}$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

- Εφαρμόζουμε το προηγούμενο ερώτημα για τις $f(x) = e^x$ και $g(x) = 2e^{2x}$, $x \in [0, 1]$. Υπάρχει πολυώνυμο p ώστε $e^t < p(t) < 2e^{2t}$ για κάθε $t \in [0, 1]$.
- Έστω $x \in (0, 1]$. Τότε, έχουμε

$$\int_0^x e^t dt < \int_0^x p(t) dt < 2 \int_0^x e^{2t} dt$$

δηλαδή,

$$e^x < \int_0^x p(t) dt + 1 < e^{2x}$$

για κάθε $x \in (0, 1]$.

- Έπεται, ότι για κάθε $x \in [0, 1]$ ισχύει

$$e^x \leq q(x) \leq e^{2x},$$

όπου $q(x) = \int_0^x p(t) dt + 1$.

- Παρατηρούμε ότι το q είναι πολυώνυμο, άρα έχουμε το ζητούμενο.

Άσκηση 4.2.

(γ) Αν $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, αποδείξτε ότι υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία πολυνύμων (p_n) ώστε $p_n \rightarrow h$ ομοιόμορφα στο $[0, 1]$.

Άσκηση 4.2.

(γ) Αν $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, αποδείξτε ότι υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία πολυωνύμων (p_n) ώστε $p_n \rightarrow h$ ομοιόμορφα στο $[0, 1]$.

- Από το πρώτο ερώτημα έχουμε ότι: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει πολυώνυμο p_n ώστε

$$h(x) - \frac{1}{n} < p_n(x) < h(x) - \frac{1}{n+1}$$

για κάθε $x \in [0, 1]$.

Άσκηση 4.2.

(γ) Αν $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, αποδείξτε ότι υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία πολυωνύμων (p_n) ώστε $p_n \rightarrow h$ ομοιόμορφα στο $[0, 1]$.

- Από το πρώτο ερώτημα έχουμε ότι: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει πολυώνυμο p_n ώστε

$$h(x) - \frac{1}{n} < p_n(x) < h(x) - \frac{1}{n+1}$$

για κάθε $x \in [0, 1]$.

- Παρατηρούμε ότι η (p_n) είναι γνησίως αύξουσα εκ κατασκευής και ότι $|p_n(x) - h(x)| \leq \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in [0, 1]$, άρα $\|p_n - h\|_\infty \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$. Έπεται ότι η $p_n \rightarrow h$ ομοιόμορφα.

Άσκηση 4.3.

Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο p ώστε $\|f - p\|_{\infty} < \varepsilon$ και $\|f' - p'\|_{\infty} < \varepsilon$.

Άσκηση 4.3.

Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο p ώστε $\|f - p\|_{\infty} < \varepsilon$ και $\|f' - p'\|_{\infty} < \varepsilon$.

- Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $f \in C^1([0, 1])$ από το θεώρημα προσέγγισης του Weierstrass έχουμε ότι υπάρχει πολυώνυμο q ώστε $\|f' - q\|_{\infty} < \varepsilon$.

Άσκηση 4.3.

Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο p ώστε $\|f - p\|_\infty < \varepsilon$ και $\|f' - p'\|_\infty < \varepsilon$.

- Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $f \in C^1([0, 1])$ από το θεώρημα προσέγγισης του Weierstrass έχουμε ότι υπάρχει πολυώνυμο q ώστε $\|f' - q\|_\infty < \varepsilon$.
- Θεωρούμε το πολυώνυμο $p(x) = \int_0^x q(t) dt + f(0)$.

Άσκηση 4.3.

Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο p ώστε $\|f - p\|_{\infty} < \varepsilon$ και $\|f' - p'\|_{\infty} < \varepsilon$.

- Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $f \in C^1([0, 1])$ από το θεώρημα προσέγγισης του Weierstrass έχουμε ότι υπάρχει πολυώνυμο q ώστε $\|f' - q\|_{\infty} < \varepsilon$.
- Θεωρούμε το πολυώνυμο $p(x) = \int_0^x q(t) dt + f(0)$.
- Τότε, ισχύει $p'(x) = q(x)$ και ακόμη αν $x \in [0, 1]$ έχουμε

$$|p(x) - f(x)| = \left| \int_0^x q(t) dt - \int_0^x f'(t) dt \right| \leq \int_0^x |f'(t) - q(t)| dt \leq \varepsilon x \leq \varepsilon.$$

Άσκηση 4.3.

Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο p ώστε $\|f - p\|_{\infty} < \varepsilon$ και $\|f' - p'\|_{\infty} < \varepsilon$.

- Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $f \in C^1([0, 1])$ από το θεώρημα προσέγγισης του Weierstrass έχουμε ότι υπάρχει πολυώνυμο q ώστε $\|f' - q\|_{\infty} < \varepsilon$.
- Θεωρούμε το πολυώνυμο $p(x) = \int_0^x q(t) dt + f(0)$.
- Τότε, ισχύει $p'(x) = q(x)$ και ακόμη αν $x \in [0, 1]$ έχουμε

$$|p(x) - f(x)| = \left| \int_0^x q(t) dt - \int_0^x f'(t) dt \right| \leq \int_0^x |f'(t) - q(t)| dt \leq \varepsilon x \leq \varepsilon.$$

- Άρα, $\|f - p\|_{\infty} \leq \varepsilon$ και $\|f' - p'\|_{\infty} < \varepsilon$.

Άσκηση 4.4.

Έστω $0 < a < b < 1$ και $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (p_n) πολωνύμων με ακέραιους συντελεστές, ώστε $p_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$.

Άσκηση 4.4.

Έστω $0 < a < b < 1$ και $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (p_n) πολωνύμων με ακέραιους συντελεστές, ώστε $p_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$.

- Έστω $0 < a < b < 1$. Επεκτείνουμε συνεχώς την f στο $[0, 1]$ σε μια συνάρτηση $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(0) = g(1) = 0$ ως εξής: στο $[0, a]$ την ορίζουμε γραμμική με άκρα τα $(0, 0)$ και $(a, f(a))$ και ομοίως στο $[b, 1]$.

Άσκηση 4.4.

Έστω $0 < a < b < 1$ και $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (p_n) πολωνύμων με ακέραιους συντελεστές, ώστε $p_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$.

- Έστω $0 < a < b < 1$. Επεκτείνουμε συνεχώς την f στο $[0, 1]$ σε μια συνάρτηση $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(0) = g(1) = 0$ ως εξής: στο $[0, a]$ την ορίζουμε γραμμική με άκρα τα $(0, 0)$ και $(a, f(a))$ και ομοίως στο $[b, 1]$.
- Θεωρούμε την ακολουθία πολωνύμων

$$P_n(g)(x) := \sum_{k=0}^n \left[g\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} \right] x^k (1-x)^{n-k}, \quad x \in [0, 1].$$

Άσκηση 4.4.

Έστω $0 < a < b < 1$ και $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (p_n) πολυωνύμων με ακέραιους συντελεστές, ώστε $p_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$.

- Έστω $0 < a < b < 1$. Επεκτείνουμε συνεχώς την f στο $[0, 1]$ σε μια συνάρτηση $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(0) = g(1) = 0$ ως εξής: στο $[0, a]$ την ορίζουμε γραμμική με άκρα τα $(0, 0)$ και $(a, f(a))$ και ομοίως στο $[b, 1]$.
- Θεωρούμε την ακολουθία πολυωνύμων

$$P_n(g)(x) := \sum_{k=0}^n \left[g\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} \right] x^k (1-x)^{n-k}, \quad x \in [0, 1].$$

- Τα $P_n(g)$ έχουν ακέραιους συντελεστές και έχουν την ιδιότητα $P_n(g) \rightarrow g$ ομοιόμορφα στο $[0, 1]$ (άρα $P_n(g) \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$, το οποίο είναι το ζητούμενο).

Άσκηση 4.4.

Έστω $0 < a < b < 1$ και $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (p_n) πολωνύμων με ακέραιους συντελεστές, ώστε $p_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$.

Άσκηση 4.4.

Έστω $0 < a < b < 1$ και $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (p_n) πολωνύμων με ακέραιους συντελεστές, ώστε $p_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$.

- Δείχνουμε ότι $\|P_n(g) - B_n(g)\|_\infty \rightarrow 0$.

Άσκηση 4.4.

Έστω $0 < a < b < 1$ και $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (p_n) πολυωνύμων με ακέραιους συντελεστές, ώστε $p_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$.

- Δείχνουμε ότι $\|P_n(g) - B_n(g)\|_\infty \rightarrow 0$.
- Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} |B_n(g)(x) - P_n(g)(x)| &\leq \sum_{k=1}^{n-1} \left(g\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} - \left\lfloor g\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} \right\rfloor \right) x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{n} \end{aligned}$$

όπου στην προτελευταία ανισότητα έχουμε χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι $\binom{n}{k} \geq n$ για $k = 1, 2, \dots, n-1$ και στην τελευταία ότι $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1$.

Άσκηση 4.4.

Έστω $0 < a < b < 1$ και $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (p_n) πολυωνύμων με ακέραιους συντελεστές, ώστε $p_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$.

- Δείχνουμε ότι $\|P_n(g) - B_n(g)\|_\infty \rightarrow 0$.
- Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} |B_n(g)(x) - P_n(g)(x)| &\leq \sum_{k=1}^{n-1} \left(g\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} - \left\lfloor g\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} \right\rfloor \right) x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{n} \end{aligned}$$

όπου στην προτελευταία ανισότητα έχουμε χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι $\binom{n}{k} \geq n$ για $k = 1, 2, \dots, n-1$ και στην τελευταία ότι $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1$.

- Άρα, $\|B_n(g) - P_n(g)\|_\infty \leq 1/n$ για κάθε $n \geq 2$.

Άσκηση 4.5.

Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, η οποία δεν είναι πολυώνυμο. Αν (p_n) είναι ακολουθία πολυωνύμων ώστε $p_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα, αποδείξτε ότι $\deg(p_n) \rightarrow \infty$.

Άσκηση 4.5.

Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, η οποία δεν είναι πολυώνυμο. Αν (p_n) είναι ακολουθία πολυωνύμων ώστε $p_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα, αποδείξτε ότι $\deg(p_n) \rightarrow \infty$.

- Θα δείξουμε ότι για κάθε $k = 0, 1, \dots$ το σύνολο $\mathbb{R}_k[x]$ των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές και βαθμό το πολύ k είναι κλειστό υποσύνολο του $C[0, 1]$.

Άσκηση 4.5.

Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτησης, η οποία δεν είναι πολυώνυμο. Αν (p_n) είναι ακολουθία πολυωνύμων ώστε $p_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα, αποδείξτε ότι $\deg(p_n) \rightarrow \infty$.

- Θα δείξουμε ότι για κάθε $k = 0, 1, \dots$ το σύνολο $\mathbb{R}_k[x]$ των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές και βαθμό το πολύ k είναι κλειστό υποσύνολο του $C[0, 1]$.
- Αν δεν ισχύει το ζητούμενο, τότε υπάρχει (k_n) γνησίως αύξουσα ακολουθία δεικτών και $m \in \mathbb{N}$ ώστε $\deg(p_{k_n}) \leq m$ για $n = 1, 2, \dots$

Άσκηση 4.5.

Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, η οποία δεν είναι πολυώνυμο. Αν (p_n) είναι ακολουθία πολυωνύμων ώστε $p_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα, αποδείξτε ότι $\deg(p_n) \rightarrow \infty$.

- Θα δείξουμε ότι για κάθε $k = 0, 1, \dots$ το σύνολο $\mathbb{R}_k[x]$ των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές και βαθμό το πολύ k είναι κλειστό υποσύνολο του $C[0, 1]$.
- Αν δεν ισχύει το ζητούμενο, τότε υπάρχει (k_n) γνησίως αύξουσα ακολουθία δεικτών και $m \in \mathbb{N}$ ώστε $\deg(p_{k_n}) \leq m$ για $n = 1, 2, \dots$
- Τότε, η ακολουθία (p_{k_n}) περιέχεται στο κλειστό $\mathbb{R}_m[x]$ και συγκλίνει (ομοιόμορφα) στην f .

Άσκηση 4.5.

Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, η οποία δεν είναι πολυώνυμο. Αν (p_n) είναι ακολουθία πολυωνύμων ώστε $p_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα, αποδείξτε ότι $\deg(p_n) \rightarrow \infty$.

- Θα δείξουμε ότι για κάθε $k = 0, 1, \dots$ το σύνολο $\mathbb{R}_k[x]$ των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές και βαθμό το πολύ k είναι κλειστό υποσύνολο του $C[0, 1]$.
- Αν δεν ισχύει το ζητούμενο, τότε υπάρχει (k_n) γνησίως αύξουσα ακολουθία δεικτών και $m \in \mathbb{N}$ ώστε $\deg(p_{k_n}) \leq m$ για $n = 1, 2, \dots$
- Τότε, η ακολουθία (p_{k_n}) περιέχεται στο κλειστό $\mathbb{R}_m[x]$ και συγκλίνει (ομοιόμορφα) στην f .
- Άρα, η f είναι πολυώνυμο (βαθμού το πολύ m), άτοπο.

Ισχυρισμός

Το σύνολο $\mathbb{R}_k[x]$ των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές και βαθμό το πολύ k είναι κλειστό υποσύνολο του $C[0, 1]$.

Ισχυρισμός

Το σύνολο $\mathbb{R}_k[x]$ των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές και βαθμό το πολύ k είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{C}[0, 1]$.

- Έστω (p_n) είναι μια ακολουθία πολυωνύμων στον $\mathbb{R}_k[x]$. Τότε υπάρχουν ακολουθίες $(a_0^n), (a_1^n), \dots, (a_k^n)$ ώστε $p_n(x) = a_0^n + a_1^n x + \dots + a_k^n x^k$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $n = 1, 2, \dots$

Ισχυρισμός

Το σύνολο $\mathbb{R}_k[x]$ των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές και βαθμό το πολύ k είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{C}[0, 1]$.

- Έστω (p_n) είναι μια ακολουθία πολυωνύμων στον $\mathbb{R}_k[x]$. Τότε υπάρχουν ακολουθίες $(a_0^n), (a_1^n), \dots, (a_k^n)$ ώστε $p_n(x) = a_0^n + a_1^n x + \dots + a_k^n x^k$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $n = 1, 2, \dots$
- Υποθέτουμε ότι $p_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο $[0, 1]$. Θα δείξουμε ότι κάθε ακολουθία (a_i^n) , $i = 0, 1, \dots, k$ συγκλίνει σε κάποιο $a_i \in \mathbb{R}$, άρα η f είναι το πολυώνυμο $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k$.

Ισχυρισμός

Το σύνολο $\mathbb{R}_k[x]$ των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές και βαθμό το πολύ k είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{C}[0, 1]$.

- Έστω (p_n) είναι μια ακολουθία πολυωνύμων στον $\mathbb{R}_k[x]$. Τότε υπάρχουν ακολουθίες $(a_0^n), (a_1^n), \dots, (a_k^n)$ ώστε $p_n(x) = a_0^n + a_1^n x + \dots + a_k^n x^k$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $n = 1, 2, \dots$
- Υποθέτουμε ότι $p_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο $[0, 1]$. Θα δείξουμε ότι κάθε ακολουθία (a_i^n) , $i = 0, 1, \dots, k$ συγκλίνει σε κάποιο $a_i \in \mathbb{R}$, άρα η f είναι το πολυώνυμο $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k$.
- Θεωρούμε $k + 1$ σημεία $t_0 < t_1 < \dots < t_k$ (τυχόντα, αλλά σταθερά) στο διάστημα $[0, 1]$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει:

$$\begin{cases} a_0^n + a_1^n t_0 + \dots + a_k^n t_0^k = p_n(t_0) \\ a_0^n + a_1^n t_1 + \dots + a_k^n t_1^k = p_n(t_1) \\ \vdots \\ a_0^n + a_1^n t_k + \dots + a_k^n t_k^k = p_n(t_k) \end{cases}.$$

Ισχυρισμός

Το σύνολο $\mathbb{R}_k[x]$ των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές και βαθμό το πολύ k είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{C}[0, 1]$.

Ισχυρισμός

Το σύνολο $\mathbb{R}_k[x]$ των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές και βαθμό το πολύ k είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{C}[0, 1]$.

- Το παραπάνω σύστημα είναι γραμμικό $(k + 1) \times (k + 1)$ με αγνώστους τα a_j^n , $j = 0, 1, \dots, k$.

Ισχυρισμός

Το σύνολο $\mathbb{R}_k[x]$ των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές και βαθμό το πολύ k είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{C}[0, 1]$.

- Το παραπάνω σύστημα είναι γραμμικό $(k + 1) \times (k + 1)$ με αγνώστους τα a_j^n , $j = 0, 1, \dots, k$.
- Επίσης, η ορίζουσά του είναι τύπου Vandermonde και γνωρίζουμε ότι ισούται με

$$D = \prod_{0 \leq i < j \leq k} (t_j - t_i)$$

και δεν μηδενίζεται, από την επιλογή των t_j .

Ισχυρισμός

Το σύνολο $\mathbb{R}_k[x]$ των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές και βαθμό το πολύ k είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{C}[0, 1]$.

- Το παραπάνω σύστημα είναι γραμμικό $(k+1) \times (k+1)$ με αγνώστους τα a_j^n , $j = 0, 1, \dots, k$.
- Επίσης, η ορίζουσά του είναι τύπου Vandermonde και γνωρίζουμε ότι ισούται με

$$D = \prod_{0 \leq i < j \leq k} (t_j - t_i)$$

και δεν μηδενίζεται, από την επιλογή των t_j .

- Συνεπώς το σύστημα έχει μοναδική λύση $(a_0^n, a_1^n, \dots, a_k^n)$, η οποία δίνεται ως $a_j^n = \frac{D_j}{D}$ για $j = 0, 1, \dots, k$.

Ισχυρισμός

Το σύνολο $\mathbb{R}_k[x]$ των πολωνύμων με πραγματικούς συντελεστές και βαθμό το πολύ k είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{C}[0, 1]$.

- Το παραπάνω σύστημα είναι γραμμικό $(k+1) \times (k+1)$ με αγνώστους τα a_j^n , $j = 0, 1, \dots, k$.
- Επίσης, η ορίζουσά του είναι τύπου Vandermonde και γνωρίζουμε ότι ισούται με

$$D = \prod_{0 \leq i < j \leq k} (t_j - t_i)$$

και δεν μηδενίζεται, από την επιλογή των t_j .

- Συνεπώς το σύστημα έχει μοναδική λύση $(a_0^n, a_1^n, \dots, a_k^n)$, η οποία δίνεται ως $a_j^n = \frac{D_j}{D}$ για $j = 0, 1, \dots, k$.
- Κάθε D_j είναι πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός των t_j^i και $p_n(t_j)$ για $i, j = 0, 1, \dots, k$ (δηλαδή ακολουθία ως προς n).

Ισχυρισμός

Το σύνολο $\mathbb{R}_k[x]$ των πολωνύμων με πραγματικούς συντελεστές και βαθμό το πολύ k είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{C}[0, 1]$.

- Το παραπάνω σύστημα είναι γραμμικό $(k+1) \times (k+1)$ με αγνώστους τα a_j^n , $j = 0, 1, \dots, k$.
- Επίσης, η ορίζουσά του είναι τύπου Vandermonde και γνωρίζουμε ότι ισούται με

$$D = \prod_{0 \leq i < j \leq k} (t_j - t_i)$$

και δεν μηδενίζεται, από την επιλογή των t_j .

- Συνεπώς το σύστημα έχει μοναδική λύση $(a_0^n, a_1^n, \dots, a_k^n)$, η οποία δίνεται ως $a_j^n = \frac{D_j}{D}$ για $j = 0, 1, \dots, k$.
- Κάθε D_j είναι πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός των t_j^i και $p_n(t_j)$ για $i, j = 0, 1, \dots, k$ (δηλαδή ακολουθία ως προς n).
- Επειδή δε, $p_n(t_j) \rightarrow f(t_j)$ για $j = 0, 1, \dots, k$ έχουμε ότι κάθε $(a_j^n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $\frac{1}{D} \lim_{n \rightarrow \infty} D_j$.