Αρμονική Ανάλυση (2023–24)
Ασκήσεις – Φυλλάδιο 1

(Παραδίδετε έξι από τις ασκήσεις. Ημερομηνία παράδοσης: 17 Μαρτίου 2024)

1. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε $L(f,\mathcal{P})=0$ για κάθε διαμέριση $\mathcal{P}$ του $[a,b]$. Είναι απαραίτητο η f να είναι η μηδενική συνάρτηση;

2. Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ η συνάρτηση με

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{αν } x \text{ ρητός}\\ 0 & \text{αν } x \text{ άρρητος}\end{cases}$$

Υπολογίστε το $L(f,\mathcal{P})$ για όλες τις διαμερίσεις $\mathcal{P}$ του $[0,1]$ και επίσης το

$$\inf\{U(f,\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ διαμέριση του } [0,1]\}.$$

3. Έστω $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχής γνησίως αύξουσα συνάρτηση με $f(0)=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Αποδείξτε ότι: για κάθε $a,b>0$ ισχύει ότι

$$ab\leqslant \int_0^a f(x)\,dx+\int_0^b f^{-1}(y)\,dy$$

με ισότητα αν και μόνο αν $b=f(a)$.

4. Έστω $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ η οποία είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,x]$ για κάθε $x>0$ και επίσης ικανοποιεί την $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\alpha\in\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt=\alpha.$$

5. Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) όπου $f_n:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με

$$f_n(x)=\frac{x^2}{x^2+(1-nx)^2},\qquad x\in[0,+\infty).$$

(α) Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο στη συνάρτηση $f\equiv 0$.

(β) Αποδείξτε ότι η σύγκλιση της (f_n) στην f δεν είναι ομοιόμορφη στο διάστημα $[0,+\infty)$, αλλά είναι ομοιόμορφη σε κάθε διάστημα της μορφής $[\alpha,+\infty)$, όπου $\alpha>0$.

6. Εξετάστε αν οι σειρές συναρτήσεων

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^2}{k(1+kx^3)}\qquad\text{και}\qquad\sum_{k=1}^{\infty}k^2x^3e^{-k^2x}$$

συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[0,+\infty)$.

7. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^k\sin(kx)}{k!}$ συγκλίνει απολύτως για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και ότι η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k\sin(kx)}{k!}$$

είναι συνεχής.

8. Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) όπου $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = e^{-x^2/n^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(α) Εξετάστε την (f_n) ως προς την κατά σημείο και την ομοιόμορφη σύγκλιση.

(β) Εξετάστε τη σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1 - e^{-x^2/k^2})$$

ως προς την κατά σημείο και την ομοιόμορφη σύγκλιση.

9. Έστω $f_n, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f_n \longrightarrow f$ ομοιόμορφα. Υποθέτουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

10. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = n\sin(\sqrt{4\pi^2 n^2 + x^2}).$$

Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο σε κάποια $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ποια είναι η f; Αποδείξτε επίσης ότι $f_n \longrightarrow f$ ομοιόμορφα στο $[0, \alpha]$ για κάθε $\alpha > 0$. Είναι η σύγκλιση ομοιόμορφη στο $\mathbb{R}$;

[*Υπόδειξη:* $\sin y = \sin(y - 2n\pi)$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$.]