

Αρμονική Ανάλυση

Μάθημα 5

Φεβρουάριος 2024

Άσκηση 3.2

Έστω $f_n(x) = n^p x(1 - x^2)^n$, $x \in [0, 1]$, με $p > 0$ παράμετρο στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι για κάθε $p > 0$ η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο σε κάποια $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

Άσκηση 3.2

Έστω $f_n(x) = n^p x(1 - x^2)^n$, $x \in [0, 1]$, με $p > 0$ παράμετρο στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι για κάθε $p > 0$ η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο σε κάποια $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

- Δείχνουμε πρώτα ότι $f_n \rightarrow f \equiv 0$ κατά σημείο. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Άσκηση 3.2

Έστω $f_n(x) = n^p x(1 - x^2)^n$, $x \in [0, 1]$, με $p > 0$ παράμετρο στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι για κάθε $p > 0$ η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο σε κάποια $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

- Δείχνουμε πρώτα ότι $f_n \rightarrow f \equiv 0$ κατά σημείο. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
 - ❶ Αν $x = 0$ ή $x = 1$ τότε $f_n(x) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$.

Άσκηση 3.2

Έστω $f_n(x) = n^p x(1 - x^2)^n$, $x \in [0, 1]$, με $p > 0$ παράμετρο στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι για κάθε $p > 0$ η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο σε κάποια $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

- Δείχνουμε πρώτα ότι $f_n \rightarrow f \equiv 0$ κατά σημείο. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
 - 1 Αν $x = 0$ ή $x = 1$ τότε $f_n(x) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$.
 - 2 Αν $0 < x < 1$ τότε $0 < 1 - x^2 < 1$. Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του λόγου βλέπουμε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p x(1 - x^2)^n = 0$. Συνεπώς, σε αυτή την περίπτωση ισχύει πάλι ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$.

Άσκηση 3.2

Έστω $f_n(x) = n^p x(1 - x^2)^n$, $x \in [0, 1]$, με $p > 0$ παράμετρο στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι για κάθε $p > 0$ η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο σε κάποια $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Για ποιές τιμές του p είναι η σύγκλιση ομοιόμορφη;

Άσκηση 3.2

Έστω $f_n(x) = n^p x(1 - x^2)^n$, $x \in [0, 1]$, με $p > 0$ παράμετρο στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι για κάθε $p > 0$ η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο σε κάποια $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Για ποιές τιμές του p είναι η σύγκλιση ομοιόμορφη;

- Έχουμε $\|f_n - 0\|_\infty = \max(f_n)$ διότι $f_n \geq 0$.

Άσκηση 3.2

Έστω $f_n(x) = n^p x(1 - x^2)^n$, $x \in [0, 1]$, με $p > 0$ παράμετρο στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι για κάθε $p > 0$ η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο σε κάποια $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Για ποιές τιμές του p είναι η σύγκλιση ομοιόμορφη;

- Έχουμε $\|f_n - 0\|_\infty = \max(f_n)$ διότι $f_n \geq 0$.
- Παραγωγίζοντας την f_n βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= n^p(1 - x^2)^n - n^p x n(1 - x^2)^{n-1}(2x) \\ &= n^p(1 - x^2)^{n-1}[1 - x^2 - 2nx^2] = n^p(1 - x^2)^{n-1}[1 - (2n + 1)x^2]. \end{aligned}$$

Άσκηση 3.2

Έστω $f_n(x) = n^p x(1 - x^2)^n$, $x \in [0, 1]$, με $p > 0$ παράμετρο στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι για κάθε $p > 0$ η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο σε κάποια $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Για ποιές τιμές του p είναι η σύγκλιση ομοιόμορφη;

- Έχουμε $\|f_n - 0\|_\infty = \max(f_n)$ διότι $f_n \geq 0$.
- Παραγωγίζοντας την f_n βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= n^p(1 - x^2)^n - n^p x n(1 - x^2)^{n-1}(2x) \\ &= n^p(1 - x^2)^{n-1}[1 - x^2 - 2nx^2] = n^p(1 - x^2)^{n-1}[1 - (2n + 1)x^2]. \end{aligned}$$

- Συνεπώς, $\|f_n - 0\|_\infty = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right) = \frac{n^p}{\sqrt{2n+1}} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^n$.

Άσκηση 3.2

Έστω $f_n(x) = n^p x(1 - x^2)^n$, $x \in [0, 1]$, με $p > 0$ παράμετρο στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι για κάθε $p > 0$ η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο σε κάποια $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Για ποιές τιμές του p είναι η σύγκλιση ομοιόμορφη;

- Έχουμε $\|f_n - 0\|_\infty = \max(f_n)$ διότι $f_n \geq 0$.
- Παραγωγίζοντας την f_n βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= n^p(1 - x^2)^n - n^p x n(1 - x^2)^{n-1}(2x) \\ &= n^p(1 - x^2)^{n-1}[1 - x^2 - 2nx^2] = n^p(1 - x^2)^{n-1}[1 - (2n + 1)x^2]. \end{aligned}$$

- Συνεπώς, $\|f_n - 0\|_\infty = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right) = \frac{n^p}{\sqrt{2n+1}} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^n$.
- Παρατηρούμε ότι $\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^n \rightarrow \frac{1}{\sqrt{e}}$.

Άσκηση 3.2

Έστω $f_n(x) = n^p x(1 - x^2)^n$, $x \in [0, 1]$, με $p > 0$ παράμετρο στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι για κάθε $p > 0$ η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο σε κάποια $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Για ποιές τιμές του p είναι η σύγκλιση ομοιόμορφη;

- Έχουμε $\|f_n - 0\|_\infty = \max(f_n)$ διότι $f_n \geq 0$.
- Παραγωγίζοντας την f_n βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= n^p(1 - x^2)^n - n^p x n(1 - x^2)^{n-1}(2x) \\ &= n^p(1 - x^2)^{n-1}[1 - x^2 - 2nx^2] = n^p(1 - x^2)^{n-1}[1 - (2n + 1)x^2]. \end{aligned}$$

- Συνεπώς, $\|f_n - 0\|_\infty = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right) = \frac{n^p}{\sqrt{2n+1}} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^n$.
- Παρατηρούμε ότι $\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^n \rightarrow \frac{1}{\sqrt{e}}$. Συνεπώς,
 - ① Αν $0 < p < \frac{1}{2}$ τότε $\frac{n^p}{\sqrt{2n+1}} \rightarrow 0$ και $\|f_n - 0\|_\infty \rightarrow 0$.

Άσκηση 3.2

Έστω $f_n(x) = n^p x(1 - x^2)^n$, $x \in [0, 1]$, με $p > 0$ παράμετρο στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι για κάθε $p > 0$ η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο σε κάποια $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Για ποιές τιμές του p είναι η σύγκλιση ομοιόμορφη;

- Έχουμε $\|f_n - 0\|_\infty = \max(f_n)$ διότι $f_n \geq 0$.
- Παραγωγίζοντας την f_n βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= n^p(1 - x^2)^n - n^p x n(1 - x^2)^{n-1}(2x) \\ &= n^p(1 - x^2)^{n-1}[1 - x^2 - 2nx^2] = n^p(1 - x^2)^{n-1}[1 - (2n + 1)x^2]. \end{aligned}$$

- Συνεπώς, $\|f_n - 0\|_\infty = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right) = \frac{n^p}{\sqrt{2n+1}} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^n$.
- Παρατηρούμε ότι $\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^n \rightarrow \frac{1}{\sqrt{e}}$. Συνεπώς,
 - 1 Αν $0 < p < \frac{1}{2}$ τότε $\frac{n^p}{\sqrt{2n+1}} \rightarrow 0$ και $\|f_n - 0\|_\infty \rightarrow 0$.
 - 2 Αν $p > \frac{1}{2}$ τότε $\frac{n^p}{\sqrt{2n+1}} \rightarrow +\infty$ και $\|f_n - 0\|_\infty \rightarrow +\infty$.

Άσκηση 3.2

Έστω $f_n(x) = n^p x(1 - x^2)^n$, $x \in [0, 1]$, με $p > 0$ παράμετρο στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι για κάθε $p > 0$ η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο σε κάποια $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Για ποιές τιμές του p είναι η σύγκλιση ομοιόμορφη;

- Έχουμε $\|f_n - 0\|_\infty = \max(f_n)$ διότι $f_n \geq 0$.
- Παραγωγίζοντας την f_n βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= n^p(1 - x^2)^n - n^p x n(1 - x^2)^{n-1}(2x) \\ &= n^p(1 - x^2)^{n-1}[1 - x^2 - 2nx^2] = n^p(1 - x^2)^{n-1}[1 - (2n + 1)x^2]. \end{aligned}$$

- Συνεπώς, $\|f_n - 0\|_\infty = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right) = \frac{n^p}{\sqrt{2n+1}} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^n$.
- Παρατηρούμε ότι $\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^n \rightarrow \frac{1}{\sqrt{e}}$. Συνεπώς,
 - 1 Αν $0 < p < \frac{1}{2}$ τότε $\frac{n^p}{\sqrt{2n+1}} \rightarrow 0$ και $\|f_n - 0\|_\infty \rightarrow 0$.
 - 2 Αν $p > \frac{1}{2}$ τότε $\frac{n^p}{\sqrt{2n+1}} \rightarrow +\infty$ και $\|f_n - 0\|_\infty \rightarrow +\infty$.
 - 3 Αν $p = \frac{1}{2}$ τότε $\frac{n^p}{\sqrt{2n+1}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$ και $\|f_n - 0\|_\infty \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2e}} > 0$.

Άσκηση 3.2

Έστω $f_n(x) = n^p x(1 - x^2)^n$, $x \in [0, 1]$, με $p > 0$ παράμετρο στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι για κάθε $p > 0$ η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο σε κάποια $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Για ποιές τιμές του p ισχύει ότι $\int_0^1 f_n \rightarrow \int_0^1 f$;

Άσκηση 3.2

Έστω $f_n(x) = n^p x(1 - x^2)^n$, $x \in [0, 1]$, με $p > 0$ παράμετρο στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι για κάθε $p > 0$ η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο σε κάποια $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Για ποιές τιμές του p ισχύει ότι $\int_0^1 f_n \rightarrow \int_0^1 f$;

- Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα της f_n (για κάθε τιμή της παραμέτρου p): θέτοντας $y = 1 - x^2$ βλέπουμε ότι

$$\int_0^1 n^p x(1 - x^2)^n dx = \int_0^1 \frac{n^p}{2} y^n dy = \frac{n^p}{2} \int_0^1 y^n dy = \frac{n^p}{2(n+1)}.$$

Άσκηση 3.2

Έστω $f_n(x) = n^p x(1 - x^2)^n$, $x \in [0, 1]$, με $p > 0$ παράμετρο στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι για κάθε $p > 0$ η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο σε κάποια $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Για ποιές τιμές του p ισχύει ότι $\int_0^1 f_n \rightarrow \int_0^1 f$;

- Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα της f_n (για κάθε τιμή της παραμέτρου p): θέτοντας $y = 1 - x^2$ βλέπουμε ότι

$$\int_0^1 n^p x(1 - x^2)^n dx = \int_0^1 \frac{n^p}{2} y^n dy = \frac{n^p}{2} \int_0^1 y^n dy = \frac{n^p}{2(n+1)}.$$

- Παρατηρούμε ότι $\frac{n^p}{2(n+1)} \rightarrow 0$ αν και μόνο αν $0 < p < 1$. Άρα, $\int_0^1 f_n \rightarrow \int_0^1 f$ αν $0 < p < 1$.

Άσκηση 3.6

Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = nxe^{-\sqrt{n}x}.$$

Αποδείξτε ότι $f_n \rightarrow f \equiv 0$ κατά σημείο αλλά όχι ομοιόμορφα στο $[0, \infty)$. Εξετάστε αν $f_n \rightarrow 0$ ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $[\alpha, \infty)$, $\alpha > 0$.

Άσκηση 3.6

Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = nxe^{-\sqrt{nx}}.$$

Αποδείξτε ότι $f_n \rightarrow f \equiv 0$ κατά σημείο αλλά όχι ομοιόμορφα στο $[0, \infty)$. Εξετάστε αν $f_n \rightarrow 0$ ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $[\alpha, \infty)$, $\alpha > 0$.

- Παρατηρούμε ότι $e^{\sqrt{nx}} > \frac{(\sqrt{nx})^4}{24} = \frac{x^4 n^2}{24}$ για κάθε $x > 0$ (γενικότερα, αν $y > 0$ και $k \in \mathbb{N}$ τότε $e^y > y^k/k!$).

Άσκηση 3.6

Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = nxe^{-\sqrt{nx}}.$$

Αποδείξτε ότι $f_n \rightarrow f \equiv 0$ κατά σημείο αλλά όχι ομοιόμορφα στο $[0, \infty)$. Εξετάστε αν $f_n \rightarrow 0$ ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $[\alpha, \infty)$, $\alpha > 0$.

- Παρατηρούμε ότι $e^{\sqrt{nx}} > \frac{(\sqrt{nx})^4}{24} = \frac{x^4 n^2}{24}$ για κάθε $x > 0$ (γενικότερα, αν $y > 0$ και $k \in \mathbb{N}$ τότε $e^y > y^k/k!$).
- Επομένως,

$$0 < nxe^{-\sqrt{nx}} \leq \frac{24nx}{x^4 n^2} = \frac{24}{x^3 n} \rightarrow 0$$

για κάθε $x > 0$.

Άσκηση 3.6

Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = nxe^{-\sqrt{nx}}.$$

Αποδείξτε ότι $f_n \rightarrow f \equiv 0$ κατά σημείο αλλά όχι ομοιόμορφα στο $[0, \infty)$. Εξετάστε αν $f_n \rightarrow 0$ ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $[\alpha, \infty)$, $\alpha > 0$.

- Παρατηρούμε ότι $e^{\sqrt{nx}} > \frac{(\sqrt{nx})^4}{24} = \frac{x^4 n^2}{24}$ για κάθε $x > 0$ (γενικότερα, αν $y > 0$ και $k \in \mathbb{N}$ τότε $e^y > y^k/k!$).
- Επομένως,

$$0 < nxe^{-\sqrt{nx}} \leq \frac{24nx}{x^4 n^2} = \frac{24}{x^3 n} \rightarrow 0$$

για κάθε $x > 0$.

- Επίσης, $f_n(0) = 0 \rightarrow 0$. Έτσι, έχουμε $f_n \rightarrow 0$ κατά σημείο.

Άσκηση 3.6

Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = nxe^{-\sqrt{n}x}.$$

Αποδείξτε ότι $f_n \rightarrow f \equiv 0$ κατά σημείο αλλά όχι ομοιόμορφα στο $[0, \infty)$. Εξετάστε αν $f_n \rightarrow 0$ ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $[\alpha, \infty)$, $\alpha > 0$.

- Παρατηρούμε ότι $e^{\sqrt{n}x} > \frac{(\sqrt{n}x)^4}{24} = \frac{x^4 n^2}{24}$ για κάθε $x > 0$ (γενικότερα, αν $y > 0$ και $k \in \mathbb{N}$ τότε $e^y > y^k/k!$).
- Επομένως,

$$0 < nxe^{-\sqrt{n}x} \leq \frac{24nx}{x^4 n^2} = \frac{24}{x^3 n} \rightarrow 0$$

για κάθε $x > 0$.

- Επίσης, $f_n(0) = 0 \rightarrow 0$. Έτσι, έχουμε $f_n \rightarrow 0$ κατά σημείο.
- Όμως,

$$\|f_n\|_{\infty} \geq f_n(1/\sqrt{n}) = \sqrt{n}e^{-1} \rightarrow +\infty$$

καθώς το $n \rightarrow \infty$.

Άσκηση 3.6

Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = nxe^{-\sqrt{n}x}.$$

Αποδείξτε ότι $f_n \rightarrow f \equiv 0$ κατά σημείο αλλά όχι ομοιόμορφα στο $[0, \infty)$. Εξετάστε αν $f_n \rightarrow 0$ ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $[\alpha, \infty)$, $\alpha > 0$.

- Παρατηρούμε ότι $e^{\sqrt{nx}} > \frac{(\sqrt{nx})^4}{24} = \frac{x^4 n^2}{24}$ για κάθε $x > 0$ (γενικότερα, αν $y > 0$ και $k \in \mathbb{N}$ τότε $e^y > y^k/k!$).
- Επομένως,

$$0 < nxe^{-\sqrt{nx}} \leq \frac{24nx}{x^4 n^2} = \frac{24}{x^3 n} \rightarrow 0$$

για κάθε $x > 0$.

- Επίσης, $f_n(0) = 0 \rightarrow 0$. Έτσι, έχουμε $f_n \rightarrow 0$ κατά σημείο.
- Όμως,

$$\|f_n\|_{\infty} \geq f_n(1/\sqrt{n}) = \sqrt{n}e^{-1} \rightarrow +\infty$$

καθώς το $n \rightarrow \infty$.

- Συνεπώς, η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

Άσκηση 3.6

Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = nxe^{-\sqrt{n}x}.$$

Αποδείξτε ότι $f_n \rightarrow f \equiv 0$ κατά σημείο αλλά όχι ομοιόμορφα στο $[0, \infty)$. Εξετάστε αν $f_n \rightarrow 0$ ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $[\alpha, \infty)$, $\alpha > 0$.

Άσκηση 3.6

Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = nxe^{-\sqrt{nx}}.$$

Αποδείξτε ότι $f_n \rightarrow f \equiv 0$ κατά σημείο αλλά όχι ομοιόμορφα στο $[0, \infty)$. Εξετάστε αν $f_n \rightarrow 0$ ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $[\alpha, \infty)$, $\alpha > 0$.

- Έστω $\alpha > 0$. Όπως πριν, για κάθε $x \in [\alpha, \infty)$ έχουμε

$$0 < nxe^{-\sqrt{nx}} \leq \frac{24}{x^3 n} \leq \frac{24}{\alpha^3 n}.$$

Άσκηση 3.6

Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = nxe^{-\sqrt{nx}}.$$

Αποδείξτε ότι $f_n \rightarrow f \equiv 0$ κατά σημείο αλλά όχι ομοιόμορφα στο $[0, \infty)$. Εξετάστε αν $f_n \rightarrow 0$ ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $[\alpha, \infty)$, $\alpha > 0$.

- Έστω $\alpha > 0$. Όπως πριν, για κάθε $x \in [\alpha, \infty)$ έχουμε

$$0 < nxe^{-\sqrt{nx}} \leq \frac{24}{x^3 n} \leq \frac{24}{\alpha^3 n}.$$

- Συνεπώς, $\|f_n\|_\infty \leq \frac{24}{\alpha^3 n} \rightarrow 0$ (στο $[\alpha, \infty)$).

Άσκηση 3.6

Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = nxe^{-\sqrt{nx}}.$$

Αποδείξτε ότι $f_n \rightarrow f \equiv 0$ κατά σημείο αλλά όχι ομοιόμορφα στο $[0, \infty)$. Εξετάστε αν $f_n \rightarrow 0$ ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $[\alpha, \infty)$, $\alpha > 0$.

- Έστω $\alpha > 0$. Όπως πριν, για κάθε $x \in [\alpha, \infty)$ έχουμε

$$0 < nxe^{-\sqrt{nx}} \leq \frac{24}{x^3 n} \leq \frac{24}{\alpha^3 n}.$$

- Συνεπώς, $\|f_n\|_\infty \leq \frac{24}{\alpha^3 n} \rightarrow 0$ (στο $[\alpha, \infty)$).
- Έπεται ότι $f_n \rightarrow 0$ ομοιόμορφα στο $[\alpha, \infty)$.

Άσκηση 3.7

Έστω $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \frac{nx}{nx+1}$. Αποδείξτε ότι:

- (i) Η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο. Ποιά είναι η οριακή συνάρτηση f ;
- (ii) Για κάθε $\alpha > 0$, η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[\alpha, \infty)$, αλλά δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, \alpha]$.

Άσκηση 3.7

Έστω $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \frac{nx}{nx+1}$. Αποδείξτε ότι:

- (i) Η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο. Ποιά είναι η οριακή συνάρτηση f ;
- (ii) Για κάθε $\alpha > 0$, η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[\alpha, \infty)$, αλλά δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, \alpha]$.

- (i) Για $x = 0$ έχουμε $f_n(0) = 0 \rightarrow 0$.

Άσκηση 3.7

Έστω $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \frac{nx}{nx+1}$. Αποδείξτε ότι:

- (i) Η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο. Ποιά είναι η οριακή συνάρτηση f ;
- (ii) Για κάθε $\alpha > 0$, η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[\alpha, \infty)$, αλλά δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, \alpha]$.

- (i) Για $x = 0$ έχουμε $f_n(0) = 0 \rightarrow 0$.
- Για $x > 0$ έχουμε

$$f_n(x) = \frac{nx}{nx+1} = \frac{x}{x + \frac{1}{n}} \rightarrow 1.$$

Άσκηση 3.7

Έστω $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \frac{nx}{nx+1}$. Αποδείξτε ότι:

- (i) Η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο. Ποιά είναι η οριακή συνάρτηση f ;
- (ii) Για κάθε $\alpha > 0$, η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[\alpha, \infty)$, αλλά δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, \alpha]$.

- (i) Για $x = 0$ έχουμε $f_n(0) = 0 \rightarrow 0$.

- Για $x > 0$ έχουμε

$$f_n(x) = \frac{nx}{nx+1} = \frac{x}{x + \frac{1}{n}} \rightarrow 1.$$

- Επομένως, $f_n \rightarrow f$ κατά σημείο, όπου $f(x) = 1$ αν $x > 0$ και $f(x) = 0$ αν $x = 0$.

Άσκηση 3.7

Έστω $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \frac{nx}{nx+1}$. Αποδείξτε ότι:

- (i) Η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο. Ποιά είναι η οριακή συνάρτηση f ;
- (ii) Για κάθε $\alpha > 0$, η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[\alpha, \infty)$, αλλά δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, \alpha]$.

Άσκηση 3.7

Έστω $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \frac{nx}{nx+1}$. Αποδείξτε ότι:

- (i) Η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο. Ποιά είναι η οριακή συνάρτηση f ;
 - (ii) Για κάθε $\alpha > 0$, η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[\alpha, \infty)$, αλλά δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, \alpha]$.
- (ii) Έστω $\alpha > 0$. Η (f_n) δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο $[0, \alpha]$, διότι οι f_n είναι συνεχείς ενώ η f είναι ασυνεχής στο σημείο $x = 0$.

Άσκηση 3.7

Έστω $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \frac{nx}{nx+1}$. Αποδείξτε ότι:

- (i) Η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο. Ποιά είναι η οριακή συνάρτηση f ;
- (ii) Για κάθε $\alpha > 0$, η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[\alpha, \infty)$, αλλά δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, \alpha]$.

- (ii) Έστω $\alpha > 0$. Η (f_n) δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο $[0, \alpha]$, διότι οι f_n είναι συνεχείς ενώ η f είναι ασυνεχής στο σημείο $x = 0$.
- Στο $[\alpha, \infty)$ έχουμε $f_n \rightarrow f \equiv 1$ κατά σημείο, και

$$|f_n(x) - 1| = \left| \frac{nx}{nx+1} - 1 \right| = \frac{1}{nx+1} \leq \frac{1}{n\alpha+1}$$

για κάθε $x \geq \alpha$.

Άσκηση 3.7

Έστω $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \frac{nx}{nx+1}$. Αποδείξτε ότι:

- (i) Η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο. Ποιά είναι η οριακή συνάρτηση f ;
- (ii) Για κάθε $\alpha > 0$, η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[\alpha, \infty)$, αλλά δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, \alpha]$.

- (ii) Έστω $\alpha > 0$. Η (f_n) δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο $[0, \alpha]$, διότι οι f_n είναι συνεχείς ενώ η f είναι ασυνεχής στο σημείο $x = 0$.
- Στο $[\alpha, \infty)$ έχουμε $f_n \rightarrow f \equiv 1$ κατά σημείο, και

$$|f_n(x) - 1| = \left| \frac{nx}{nx+1} - 1 \right| = \frac{1}{nx+1} \leq \frac{1}{n\alpha+1}$$

για κάθε $x \geq \alpha$.

- Έπεται ότι

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup \left\{ \left| \frac{nx}{nx+1} - 1 \right| : x \geq \alpha \right\} = \frac{1}{n\alpha+1} \rightarrow 0,$$

άρα $f_n \rightarrow f \equiv 1$ ομοιόμορφα.

Άσκηση 3.9

Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2x^2}$ συγκλίνει για κάθε $x \neq 0$ και αποκλίνει για $x = 0$.
Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα της μορφής $[\alpha, \infty)$ ή $(-\infty, -\alpha]$, όπου $\alpha > 0$.

Άσκηση 3.9

Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2x^2}$ συγκλίνει για κάθε $x \neq 0$ και αποκλίνει για $x = 0$.
Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα της μορφής $[\alpha, \infty)$ ή $(-\infty, -\alpha]$, όπου $\alpha > 0$.

- Αν $x = 0$ τότε $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2 \cdot 0^2} = \sum_{k=1}^{\infty} 1 = +\infty$.

Άσκηση 3.9

Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2x^2}$ συγκλίνει για κάθε $x \neq 0$ και αποκλίνει για $x = 0$.
Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα της μορφής $[\alpha, \infty)$ ή $(-\infty, -\alpha]$, όπου $\alpha > 0$.

- Αν $x = 0$ τότε $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2 \cdot 0^2} = \sum_{k=1}^{\infty} 1 = +\infty$.
- Αν $x \neq 0$ τότε

$$0 < \frac{1}{1+k^2x^2} < \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{k^2}$$

και αφού η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2x^2}$ συγκλίνει.

Άσκηση 3.9

Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2x^2}$ συγκλίνει για κάθε $x \neq 0$ και αποκλίνει για $x = 0$.
Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα της μορφής $[\alpha, \infty)$ ή $(-\infty, -\alpha]$, όπου $\alpha > 0$.

- Αν $x = 0$ τότε $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2 \cdot 0^2} = \sum_{k=1}^{\infty} 1 = +\infty$.
- Αν $x \neq 0$ τότε

$$0 < \frac{1}{1+k^2x^2} < \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{k^2}$$

και αφού η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2x^2}$ συγκλίνει.

- Έστω $\alpha > 0$. Αν $f_k(x) = \frac{1}{1+k^2x^2}$ τότε, για κάθε $x \in [\alpha, \infty)$,

$$0 < \frac{1}{1+k^2x^2} < \frac{1}{x^2k^2} \leq \frac{1}{\alpha^2k^2}$$

και αφού η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2k^2}$ συγκλίνει, από το κριτήριο του Weierstrass η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2x^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[\alpha, \infty)$.

Άσκηση 3.9

Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2x^2}$ συγκλίνει για κάθε $x \neq 0$ και αποκλίνει για $x = 0$.
Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα της μορφής $[\alpha, \infty)$ ή $(-\infty, -\alpha]$, όπου $\alpha > 0$.

- Αν $x = 0$ τότε $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2 \cdot 0^2} = \sum_{k=1}^{\infty} 1 = +\infty$.
- Αν $x \neq 0$ τότε

$$0 < \frac{1}{1+k^2x^2} < \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{k^2}$$

και αφού η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2x^2}$ συγκλίνει.

- Έστω $\alpha > 0$. Αν $f_k(x) = \frac{1}{1+k^2x^2}$ τότε, για κάθε $x \in [\alpha, \infty)$,

$$0 < \frac{1}{1+k^2x^2} < \frac{1}{x^2k^2} \leq \frac{1}{\alpha^2k^2}$$

και αφού η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2k^2}$ συγκλίνει, από το κριτήριο του Weierstrass η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2x^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[\alpha, \infty)$. Όμοια για το διάστημα $(-\infty, -\alpha]$.

Άσκηση 3.11

Αποδείξτε ότι η $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k (1-x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, 1]$.

Άσκηση 3.11

Αποδείξτε ότι η $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k (1-x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, 1]$.

- Γράφουμε

$$s_n(x) = (1-x) \sum_{k=0}^n (-x)^k = (1-x) \frac{1 - (-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}.$$

Άσκηση 3.11

Αποδείξτε ότι η $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k (1-x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, 1]$.

- Γράφουμε

$$s_n(x) = (1-x) \sum_{k=0}^n (-x)^k = (1-x) \frac{1 - (-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}.$$

- Αν $0 \leq x < 1$ τότε $x^{n+1} \rightarrow 0$, άρα $s_n(x) \rightarrow \frac{1-x}{1+x}$.

Άσκηση 3.11

Αποδείξτε ότι η $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k (1-x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, 1]$.

- Γράφουμε

$$s_n(x) = (1-x) \sum_{k=0}^n (-x)^k = (1-x) \frac{1 - (-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}.$$

- Αν $0 \leq x < 1$ τότε $x^{n+1} \rightarrow 0$, άρα $s_n(x) \rightarrow \frac{1-x}{1+x}$.
- Αν $x = 1$ τότε $s_n(1) = 0 \rightarrow 0 = \frac{1-1}{1+1}$.

Άσκηση 3.11

Αποδείξτε ότι η $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k (1-x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, 1]$.

- Γράφουμε

$$s_n(x) = (1-x) \sum_{k=0}^n (-x)^k = (1-x) \frac{1 - (-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}.$$

- Αν $0 \leq x < 1$ τότε $x^{n+1} \rightarrow 0$, άρα $s_n(x) \rightarrow \frac{1-x}{1+x}$.
- Αν $x = 1$ τότε $s_n(1) = 0 \rightarrow 0 = \frac{1-1}{1+1}$.
- Συνεπώς, $s_n \rightarrow s$ κατά σημείο, όπου $s : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση

$$s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (1-x)(-1)^k x^k = \frac{1-x}{1+x}.$$

Άσκηση 3.11

Αποδείξτε ότι η $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k (1-x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, 1]$.

Άσκηση 3.11

Αποδείξτε ότι η $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k (1-x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, 1]$.

- Για να δείξουμε ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη, θεωρούμε τη διαφορά

$$\left| s_n(x) - \frac{1-x}{1+x} \right| = \left| \frac{1-x}{1+x} (-1)^n x^{n+1} \right| = \frac{x^{n+1} - x^{n+2}}{1+x} \leq x^{n+1} - x^{n+2}.$$

Άσκηση 3.11

Αποδείξτε ότι η $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k (1-x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, 1]$.

- Για να δείξουμε ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη, θεωρούμε τη διαφορά

$$\left| s_n(x) - \frac{1-x}{1+x} \right| = \left| \frac{1-x}{1+x} (-1)^n x^{n+1} \right| = \frac{x^{n+1} - x^{n+2}}{1+x} \leq x^{n+1} - x^{n+2}.$$

- Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $x \mapsto x^{n+1} - x^{n+2}$ (στο $[0, 1]$) παίρνει μέγιστη τιμή στο σημείο $\frac{n+1}{n+2}$, η οποία είναι ίση με

$$\left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{n+1} \left[1 - \frac{n+1}{n+2} \right] < \frac{1}{n+2}.$$

Άσκηση 3.11

Αποδείξτε ότι η $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k (1-x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, 1]$.

- Για να δείξουμε ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη, θεωρούμε τη διαφορά

$$\left| s_n(x) - \frac{1-x}{1+x} \right| = \left| \frac{1-x}{1+x} (-1)^n x^{n+1} \right| = \frac{x^{n+1} - x^{n+2}}{1+x} \leq x^{n+1} - x^{n+2}.$$

- Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $x \mapsto x^{n+1} - x^{n+2}$ (στο $[0, 1]$) παίρνει μέγιστη τιμή στο σημείο $\frac{n+1}{n+2}$, η οποία είναι ίση με

$$\left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{n+1} \left[1 - \frac{n+1}{n+2} \right] < \frac{1}{n+2}.$$

- Συνεπώς,

$$\|s_n - s\|_{\infty} \leq \max_{x \in [0,1]} (x^{n+1} - x^{n+2}) < \frac{1}{n+2} \rightarrow 0.$$

Άσκηση 3.11

Αποδείξτε ότι η $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k (1-x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, 1]$.

- Για να δείξουμε ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη, θεωρούμε τη διαφορά

$$\left| s_n(x) - \frac{1-x}{1+x} \right| = \left| \frac{1-x}{1+x} (-1)^n x^{n+1} \right| = \frac{x^{n+1} - x^{n+2}}{1+x} \leq x^{n+1} - x^{n+2}.$$

- Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $x \mapsto x^{n+1} - x^{n+2}$ (στο $[0, 1]$) παίρνει μέγιστη τιμή στο σημείο $\frac{n+1}{n+2}$, η οποία είναι ίση με

$$\left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{n+1} \left[1 - \frac{n+1}{n+2} \right] < \frac{1}{n+2}.$$

- Συνεπώς,

$$\|s_n - s\|_{\infty} \leq \max_{x \in [0,1]} (x^{n+1} - x^{n+2}) < \frac{1}{n+2} \rightarrow 0.$$

- Έπεται ότι η σειρά $\frac{1-x}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k (1-x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, 1]$.

Άσκηση 3.17

(α) Αποδείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \sin(n^2 x)}{n^2}$$

συγκλίνει κατά σημείο στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σε κάθε κλειστό διάστημα $[-\alpha, \alpha] \subset \mathbb{R}$.

Άσκηση 3.17

(α) Αποδείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \sin(n^2 x)}{n^2}$$

συγκλίνει κατά σημείο στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σε κάθε κλειστό διάστημα $[-\alpha, \alpha] \subset \mathbb{R}$.

- (α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $\left| \frac{x \sin(n^2 x)}{n^2} \right| \leq \frac{|x|}{n^2}$, και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2} = |x| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, άρα η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \sin(n^2 x)}{n^2}$ συγκλίνει (απολύτως) κατά σημείο στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 3.17

(α) Αποδείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \sin(n^2 x)}{n^2}$$

συγκλίνει κατά σημείο στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σε κάθε κλειστό διάστημα $[-\alpha, \alpha] \subset \mathbb{R}$.

- (α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $\left| \frac{x \sin(n^2 x)}{n^2} \right| \leq \frac{|x|}{n^2}$, και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2} = |x| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, άρα η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \sin(n^2 x)}{n^2}$ συγκλίνει (απολύτως) κατά σημείο στο $\mathbb{R}$.
- Έστω $\alpha > 0$. Αν ορίσουμε $f_n(x) = \frac{x \sin(n^2 x)}{n^2}$ έχουμε $|f_n(x)| = \left| \frac{x \sin(n^2 x)}{n^2} \right| \leq \frac{|x|}{n^2} \leq \frac{|\alpha|}{n^2}$ για κάθε $x \in [-\alpha, \alpha]$, άρα $\|f_n\|_{\infty} \leq \frac{|\alpha|}{n^2}$ στο $[-\alpha, \alpha]$.

Άσκηση 3.17

(α) Αποδείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \sin(n^2 x)}{n^2}$$

συγκλίνει κατά σημείο στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σε κάθε κλειστό διάστημα $[-\alpha, \alpha] \subset \mathbb{R}$.

- (α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $\left| \frac{x \sin(n^2 x)}{n^2} \right| \leq \frac{|x|}{n^2}$, και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2} = |x| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, άρα η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \sin(n^2 x)}{n^2}$ συγκλίνει (απολύτως) κατά σημείο στο $\mathbb{R}$.
- Έστω $\alpha > 0$. Αν ορίσουμε $f_n(x) = \frac{x \sin(n^2 x)}{n^2}$ έχουμε $|f_n(x)| = \left| \frac{x \sin(n^2 x)}{n^2} \right| \leq \frac{|x|}{n^2} \leq \frac{|\alpha|}{n^2}$ για κάθε $x \in [-\alpha, \alpha]$, άρα $\|f_n\|_{\infty} \leq \frac{|\alpha|}{n^2}$ στο $[-\alpha, \alpha]$.
- Αφού $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\alpha|}{n^2} < \infty$, το κριτήριο του Weierstrass μας εξασφαλίζει ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \sin(n^2 x)}{n^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-\alpha, \alpha]$.

Άσκηση 3.17

(β) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \sin(n^2 x)}{n^2}$ είναι συνεχής.

Άσκηση 3.17

(β) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \sin(n^2 x)}{n^2}$ είναι συνεχής.

- (β) Έστω $x \in \mathbb{R}$. Επιλέγουμε $\alpha > 0$ ώστε $-\alpha < x < \alpha$.

Άσκηση 3.17

(β) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \sin(n^2 x)}{n^2}$ είναι συνεχής.

- (β) Έστω $x \in \mathbb{R}$. Επιλέγουμε $\alpha > 0$ ώστε $-\alpha < x < \alpha$.
- Αφού οι f_n είναι συνεχείς στο $[-\alpha, \alpha]$ και η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \sin(n^2 x)}{n^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-\alpha, \alpha]$, συμπεραίνουμε ότι η $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \sin(n^2 x)}{n^2}$ είναι συνεχής στο $[-\alpha, \alpha]$.

Άσκηση 3.17

(β) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \sin(n^2 x)}{n^2}$ είναι συνεχής.

- (β) Έστω $x \in \mathbb{R}$. Επιλέγουμε $\alpha > 0$ ώστε $-\alpha < x < \alpha$.
- Αφού οι f_n είναι συνεχείς στο $[-\alpha, \alpha]$ και η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \sin(n^2 x)}{n^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-\alpha, \alpha]$, συμπεραίνουμε ότι η $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \sin(n^2 x)}{n^2}$ είναι συνεχής στο $[-\alpha, \alpha]$.
- Ειδικότερα, η f είναι συνεχής στο x .

Άσκηση 3.17

(β) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \sin(n^2 x)}{n^2}$ είναι συνεχής.

- (β) Έστω $x \in \mathbb{R}$. Επιλέγουμε $\alpha > 0$ ώστε $-\alpha < x < \alpha$.
- Αφού οι f_n είναι συνεχείς στο $[-\alpha, \alpha]$ και η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \sin(n^2 x)}{n^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-\alpha, \alpha]$, συμπεραίνουμε ότι η $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \sin(n^2 x)}{n^2}$ είναι συνεχής στο $[-\alpha, \alpha]$.
- Ειδικότερα, η f είναι συνεχής στο x .
- Αφού το $x \in \mathbb{R}$ ήταν τυχόν, η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 3.18

(α) Έστω I διάστημα, $f_n, g_n, f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ για $n = 1, 2, \dots$ ώστε $f_n \rightarrow f$ και $g_n \rightarrow g$ ομοιόμορφα στο I . Αποδείξτε ότι αν οι f, g είναι φραγμένες τότε $f_n g_n \rightarrow fg$ ομοιόμορφα στο I .

Άσκηση 3.18

(α) Έστω I διάστημα, $f_n, g_n, f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ για $n = 1, 2, \dots$ ώστε $f_n \rightarrow f$ και $g_n \rightarrow g$ ομοιόμορφα στο I . Αποδείξτε ότι αν οι f, g είναι φραγμένες τότε $f_n g_n \rightarrow fg$ ομοιόμορφα στο I .

- (α) Υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|f\|_\infty \leq M$ και $\|g\|_\infty \leq M$.

Άσκηση 3.18

(α) Έστω I διάστημα, $f_n, g_n, f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ για $n = 1, 2, \dots$ ώστε $f_n \rightarrow f$ και $g_n \rightarrow g$ ομοιόμορφα στο I . Αποδείξτε ότι αν οι f, g είναι φραγμένες τότε $f_n g_n \rightarrow fg$ ομοιόμορφα στο I .

- (α) Υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|f\|_\infty \leq M$ και $\|g\|_\infty \leq M$.
- Επίσης, αφού $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο I , υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$, $\|f_n - f\|_\infty < 1$, και άρα, $\|f_n\|_\infty \leq \|f_n - f\|_\infty + \|f\|_\infty < 1 + M$.

Άσκηση 3.18

(α) Έστω I διάστημα, $f_n, g_n, f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ για $n = 1, 2, \dots$ ώστε $f_n \rightarrow f$ και $g_n \rightarrow g$ ομοιόμορφα στο I . Αποδείξτε ότι αν οι f, g είναι φραγμένες τότε $f_n g_n \rightarrow fg$ ομοιόμορφα στο I .

- (α) Υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|f\|_\infty \leq M$ και $\|g\|_\infty \leq M$.
- Επίσης, αφού $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο I , υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$, $\|f_n - f\|_\infty < 1$, και άρα, $\|f_n\|_\infty \leq \|f_n - f\|_\infty + \|f\|_\infty < 1 + M$.
- Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ γράφουμε

$$\begin{aligned} \|f_n g_n - fg\|_\infty &\leq \|f_n(g_n - g)\|_\infty + \|g(f_n - f)\|_\infty \\ &\leq \|f_n\|_\infty \|g_n - g\|_\infty + \|g\|_\infty \|f_n - f\|_\infty \\ &\leq (1 + M)\|g_n - g\|_\infty + M\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0, \end{aligned}$$

δηλαδή $f_n g_n \rightarrow fg$ ομοιόμορφα στο I .

Άσκηση 3.18

(β) Βρείτε ακολουθίες $(f_n), (g_n)$ ορισμένες στο $\mathbb{R}$, οι οποίες συγκλίνουν ομοιόμορφα, αλλά η $(f_n g_n)$ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα.

Άσκηση 3.18

(β) Βρείτε ακολουθίες $(f_n), (g_n)$ ορισμένες στο $\mathbb{R}$, οι οποίες συγκλίνουν ομοιόμορφα, αλλά η $(f_n g_n)$ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα.

- (β) Θεωρούμε την $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x$ και ορίζουμε $f_n = f$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Προφανώς, $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα (έχουμε $\|f_n - f\|_\infty = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$).

Άσκηση 3.18

(β) Βρείτε ακολουθίες $(f_n), (g_n)$ ορισμένες στο $\mathbb{R}$, οι οποίες συγκλίνουν ομοιόμορφα, αλλά η $(f_n g_n)$ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα.

- (β) Θεωρούμε την $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x$ και ορίζουμε $f_n = f$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Προφανώς, $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα (έχουμε $\|f_n - f\|_\infty = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$).
- Επίσης, ορίζουμε $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g_n(x) = \frac{1}{n}$. Τότε, $g_n \rightarrow 0$ ομοιόμορφα, διότι $\|g_n - 0\|_\infty = \frac{1}{n} \rightarrow 0$.

Άσκηση 3.18

(β) Βρείτε ακολουθίες $(f_n), (g_n)$ ορισμένες στο $\mathbb{R}$, οι οποίες συγκλίνουν ομοιόμορφα, αλλά η $(f_n g_n)$ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα.

- (β) Θεωρούμε την $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x$ και ορίζουμε $f_n = f$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Προφανώς, $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα (έχουμε $\|f_n - f\|_\infty = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$).
- Επίσης, ορίζουμε $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g_n(x) = \frac{1}{n}$. Τότε, $g_n \rightarrow 0$ ομοιόμορφα, διότι $\|g_n - 0\|_\infty = \frac{1}{n} \rightarrow 0$.
- Όμως, για την ακολουθία των συναρτήσεων $(f_n g_n)(x) = \frac{x}{n}$ έχουμε $f_n g_n \rightarrow 0$ κατά σημείο αλλά όχι ομοιόμορφα, αφού $\|f_n g_n - 0\|_\infty = \sup \left\{ \frac{|x|}{n} : x \in \mathbb{R} \right\} = +\infty$.

Άσκηση 3.22

(α) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η ακολουθία συναρτήσεων

$$f_n(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στην f .

Άσκηση 3.22

(α) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η ακολουθία συναρτήσεων

$$f_n(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στην f .

- Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $x, y \in \mathbb{R}$ και $|x - y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Άσκηση 3.22

(α) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η ακολουθία συναρτήσεων

$$f_n(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στην f .

- Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $x, y \in \mathbb{R}$ και $|x - y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
- Βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n_0} < \delta$.

Άσκηση 3.22

(α) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η ακολουθία συναρτήσεων

$$f_n(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στην f .

- Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $x, y \in \mathbb{R}$ και $|x - y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
- Βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n_0} < \delta$.
- Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $\left|(x + \frac{1}{n}) - x\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \delta$.

Άσκηση 3.22

(α) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η ακολουθία συναρτήσεων

$$f_n(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στην f .

- Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $x, y \in \mathbb{R}$ και $|x - y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
- Βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n_0} < \delta$.
- Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $\left|(x + \frac{1}{n}) - x\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \delta$.
- Έπεται ότι

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right| < \varepsilon.$$

Άσκηση 3.22

(α) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η ακολουθία συναρτήσεων

$$f_n(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στην f .

- Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $x, y \in \mathbb{R}$ και $|x - y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
- Βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n_0} < \delta$.
- Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $\left|(x + \frac{1}{n}) - x\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \delta$.
- Έπεται ότι

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right| < \varepsilon.$$

- Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα.

Άσκηση 3.22

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής και (δ_n) ακολουθία με $\delta_n > 0$ για κάθε n και $\delta_n \rightarrow 0$. Θέτουμε

$$f_n(x) = \frac{1}{\delta_n} \int_x^{x+\delta_n} f(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Αποδείξτε ότι $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα.

Άσκηση 3.22

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής και (δ_n) ακολουθία με $\delta_n > 0$ για κάθε n και $\delta_n \rightarrow 0$. Θέτουμε

$$f_n(x) = \frac{1}{\delta_n} \int_x^{x+\delta_n} f(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Αποδείξτε ότι $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα.

- Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $u, v \in \mathbb{R}$ και $|u - v| < \delta$ τότε $|f(u) - f(v)| \leq \varepsilon$.

Άσκηση 3.22

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής και (δ_n) ακολουθία με $\delta_n > 0$ για κάθε n και $\delta_n \rightarrow 0$. Θέτουμε

$$f_n(x) = \frac{1}{\delta_n} \int_x^{x+\delta_n} f(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Αποδείξτε ότι $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα.

- Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $u, v \in \mathbb{R}$ και $|u - v| < \delta$ τότε $|f(u) - f(v)| \leq \varepsilon$.
- Αφού $\delta_n \rightarrow 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $0 < \delta_n < \delta$ για κάθε $n \geq n_0$. Έστω $n \geq n_0$.

Άσκηση 3.22

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής και (δ_n) ακολουθία με $\delta_n > 0$ για κάθε n και $\delta_n \rightarrow 0$. Θέτουμε

$$f_n(x) = \frac{1}{\delta_n} \int_x^{x+\delta_n} f(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Αποδείξτε ότι $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα.

- Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $u, v \in \mathbb{R}$ και $|u - v| < \delta$ τότε $|f(u) - f(v)| \leq \varepsilon$.
- Αφού $\delta_n \rightarrow 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $0 < \delta_n < \delta$ για κάθε $n \geq n_0$. Έστω $n \geq n_0$.
- Τότε, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε $t \in [x, x + \delta_n]$ έχουμε $|t - x| \leq \delta_n < \delta$, άρα $|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon$.

Άσκηση 3.22

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής και (δ_n) ακολουθία με $\delta_n > 0$ για κάθε n και $\delta_n \rightarrow 0$. Θέτουμε

$$f_n(x) = \frac{1}{\delta_n} \int_x^{x+\delta_n} f(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Αποδείξτε ότι $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα.

- Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $u, v \in \mathbb{R}$ και $|u - v| < \delta$ τότε $|f(u) - f(v)| \leq \varepsilon$.
- Αφού $\delta_n \rightarrow 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $0 < \delta_n < \delta$ για κάθε $n \geq n_0$. Έστω $n \geq n_0$.
- Τότε, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε $t \in [x, x + \delta_n]$ έχουμε $|t - x| \leq \delta_n < \delta$, άρα $|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon$.
- Επομένως, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| \frac{1}{\delta_n} \int_x^{x+\delta_n} f(t) dt - f(x) \right| = \left| \frac{1}{\delta_n} \int_x^{x+\delta_n} (f(t) - f(x)) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{\delta_n} \int_x^{x+\delta_n} |f(t) - f(x)| dt \leq \frac{1}{\delta_n} \int_x^{x+\delta_n} \varepsilon dt = \varepsilon. \end{aligned}$$

Άσκηση 3.22

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής και (δ_n) ακολουθία με $\delta_n > 0$ για κάθε n και $\delta_n \rightarrow 0$. Θέτουμε

$$f_n(x) = \frac{1}{\delta_n} \int_x^{x+\delta_n} f(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Αποδείξτε ότι $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα.

- Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $u, v \in \mathbb{R}$ και $|u - v| < \delta$ τότε $|f(u) - f(v)| \leq \varepsilon$.
- Αφού $\delta_n \rightarrow 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $0 < \delta_n < \delta$ για κάθε $n \geq n_0$. Έστω $n \geq n_0$.
- Τότε, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε $t \in [x, x + \delta_n]$ έχουμε $|t - x| \leq \delta_n < \delta$, άρα $|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon$.
- Επομένως, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| \frac{1}{\delta_n} \int_x^{x+\delta_n} f(t) dt - f(x) \right| = \left| \frac{1}{\delta_n} \int_x^{x+\delta_n} (f(t) - f(x)) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{\delta_n} \int_x^{x+\delta_n} |f(t) - f(x)| dt \leq \frac{1}{\delta_n} \int_x^{x+\delta_n} \varepsilon dt = \varepsilon. \end{aligned}$$

- Συνεπώς, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $\|f_n - f\|_\infty = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in \mathbb{R}\} \leq \varepsilon$.

Άσκηση 3.22

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής και (δ_n) ακολουθία με $\delta_n > 0$ για κάθε n και $\delta_n \rightarrow 0$. Θέτουμε

$$f_n(x) = \frac{1}{\delta_n} \int_x^{x+\delta_n} f(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Αποδείξτε ότι $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα.

- Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $u, v \in \mathbb{R}$ και $|u - v| < \delta$ τότε $|f(u) - f(v)| \leq \varepsilon$.
- Αφού $\delta_n \rightarrow 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $0 < \delta_n < \delta$ για κάθε $n \geq n_0$. Έστω $n \geq n_0$.
- Τότε, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε $t \in [x, x + \delta_n]$ έχουμε $|t - x| \leq \delta_n < \delta$, άρα $|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon$.
- Επομένως, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| \frac{1}{\delta_n} \int_x^{x+\delta_n} f(t) dt - f(x) \right| = \left| \frac{1}{\delta_n} \int_x^{x+\delta_n} (f(t) - f(x)) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{\delta_n} \int_x^{x+\delta_n} |f(t) - f(x)| dt \leq \frac{1}{\delta_n} \int_x^{x+\delta_n} \varepsilon dt = \varepsilon. \end{aligned}$$

- Συνεπώς, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $\|f_n - f\|_\infty = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in \mathbb{R}\} \leq \varepsilon$.
- Έπεται ότι $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα.

Άσκηση 3.23

Έστω I διάστημα και $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ ακολουθία συναρτήσεων ώστε $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα, για κάποια συνεχή συνάρτηση $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι για κάθε $x_0 \in I$ και κάθε ακολουθία (x_n) στο I με $x_n \rightarrow x_0$ ισχύει $f_n(x_n) \rightarrow f(x_0)$.

Άσκηση 3.23

Έστω I διάστημα και $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ ακολουθία συναρτήσεων ώστε $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα, για κάποια συνεχή συνάρτηση $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι για κάθε $x_0 \in I$ και κάθε ακολουθία (x_n) στο I με $x_n \rightarrow x_0$ ισχύει $f_n(x_n) \rightarrow f(x_0)$.

- Γράφουμε

$$|f_n(x_n) - f(x_0)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x_0)| \leq \|f_n - f\|_\infty + |f(x_n) - f(x_0)|.$$

Άσκηση 3.23

Έστω I διάστημα και $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ ακολουθία συναρτήσεων ώστε $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα, για κάποια συνεχή συνάρτηση $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι για κάθε $x_0 \in I$ και κάθε ακολουθία (x_n) στο I με $x_n \rightarrow x_0$ ισχύει $f_n(x_n) \rightarrow f(x_0)$.

- Γράφουμε

$$|f_n(x_n) - f(x_0)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x_0)| \leq \|f_n - f\|_\infty + |f(x_n) - f(x_0)|.$$

- Από την ομοιόμορφη σύγκλιση της (f_n) στην f έχουμε $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ και από τη συνέχεια της f στο x_0 (και την υπόθεση ότι $x_n \rightarrow x_0$) έχουμε $|f(x_n) - f(x_0)| \rightarrow 0$.

Άσκηση 3.23

Έστω I διάστημα και $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ ακολουθία συναρτήσεων ώστε $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα, για κάποια συνεχή συνάρτηση $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι για κάθε $x_0 \in I$ και κάθε ακολουθία (x_n) στο I με $x_n \rightarrow x_0$ ισχύει $f_n(x_n) \rightarrow f(x_0)$.

- Γράφουμε

$$|f_n(x_n) - f(x_0)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x_0)| \leq \|f_n - f\|_\infty + |f(x_n) - f(x_0)|.$$

- Από την ομοιόμορφη σύγκλιση της (f_n) στην f έχουμε $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ και από τη συνέχεια της f στο x_0 (και την υπόθεση ότι $x_n \rightarrow x_0$) έχουμε $|f(x_n) - f(x_0)| \rightarrow 0$.
- Έπεται ότι $|f_n(x_n) - f(x_0)| \rightarrow 0$.

Άσκηση 3.24

Δώστε παράδειγμα ακολουθίας ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ που συγκλίνει κατά σημείο σε μια μη ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Άσκηση 3.24

Δώστε παράδειγμα ακολουθίας ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ που συγκλίνει κατά σημείο σε μια μη ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

- Θεωρούμε μια αρίθμηση $q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$ του $[a, b] \cap \mathbb{Q}$.

Άσκηση 3.24

Δώστε παράδειγμα ακολουθίας ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ που συγκλίνει κατά σημείο σε μια μη ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

- Θεωρούμε μια αρίθμηση $q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$ του $[a, b] \cap \mathbb{Q}$.
- Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = 1$ αν $x \in D_n = \{q_1, \dots, q_n\}$ και $f_n(x) = 0$ αν $x \notin D_n$.

Άσκηση 3.24

Δώστε παράδειγμα ακολουθίας ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ που συγκλίνει κατά σημείο σε μια μη ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

- Θεωρούμε μια αρίθμηση $q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$ του $[a, b] \cap \mathbb{Q}$.
- Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = 1$ αν $x \in D_n = \{q_1, \dots, q_n\}$ και $f_n(x) = 0$ αν $x \notin D_n$.
- Παρατηρήστε ότι κάθε f_n έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία ασυνέχειας, τα $q_1, \dots, q_n$, άρα είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

Άσκηση 3.24

Δώστε παράδειγμα ακολουθίας ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ που συγκλίνει κατά σημείο σε μια μη ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

- Θεωρούμε μια αρίθμηση $q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$ του $[a, b] \cap \mathbb{Q}$.
- Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = 1$ αν $x \in D_n = \{q_1, \dots, q_n\}$ και $f_n(x) = 0$ αν $x \notin D_n$.
- Παρατηρήστε ότι κάθε f_n έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία ασυνέχειας, τα $q_1, \dots, q_n$, άρα είναι Riemann ολοκληρώσιμη.
- Επίσης, $f_n(x) \rightarrow f(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$, όπου $f(x) = 1$ αν $x \in \mathbb{Q} \cap [a, b]$ και $f(x) = 0$ αλλιώς (παρατηρήστε ότι: αν $x = q_m$ για κάποιον $m \in \mathbb{N}$, τότε $f_n(x) = 1$ για κάθε $n \geq m$, άρα $f_n(x) \rightarrow 1 = f(x)$).

Άσκηση 3.24

Δώστε παράδειγμα ακολουθίας ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ που συγκλίνει κατά σημείο σε μια μη ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

- Θεωρούμε μια αρίθμηση $q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$ του $[a, b] \cap \mathbb{Q}$.
- Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = 1$ αν $x \in D_n = \{q_1, \dots, q_n\}$ και $f_n(x) = 0$ αν $x \notin D_n$.
- Παρατηρήστε ότι κάθε f_n έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία ασυνέχειας, τα $q_1, \dots, q_n$, άρα είναι Riemann ολοκληρώσιμη.
- Επίσης, $f_n(x) \rightarrow f(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$, όπου $f(x) = 1$ αν $x \in \mathbb{Q} \cap [a, b]$ και $f(x) = 0$ αλλιώς (παρατηρήστε ότι: αν $x = q_m$ για κάποιον $m \in \mathbb{N}$, τότε $f_n(x) = 1$ για κάθε $n \geq m$, άρα $f_n(x) \rightarrow 1 = f(x)$).
- Τέλος, η f δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη (κάθε άνω άθροισμα της f είναι ίσο με $b - a$ και κάθε κάτω άθροισμα της f είναι ίσο με 0).

Άσκηση 3.26

Έστω $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ακολουθία συναρτήσεων και έστω ότι $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα, όπου $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Αν κάθε f_n έχει ρίζα, αποδείξτε ότι η f έχει ρίζα.

Άσκηση 3.26

Έστω $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ακολουθία συναρτήσεων και έστω ότι $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα, όπου $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Αν κάθε f_n έχει ρίζα, αποδείξτε ότι η f έχει ρίζα.

- Από την υπόθεση, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n \in [0, 1]$ ώστε $f_n(x_n) = 0$.

Άσκηση 3.26

Έστω $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ακολουθία συναρτήσεων και έστω ότι $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα, όπου $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Αν κάθε f_n έχει ρίζα, αποδείξτε ότι η f έχει ρίζα.

- Από την υπόθεση, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n \in [0, 1]$ ώστε $f_n(x_n) = 0$.
- Από το θεώρημα Bolzano-Weierstrass μπορούμε να βρούμε υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) ώστε $x_{k_n} \rightarrow x \in [0, 1]$.

Άσκηση 3.26

Έστω $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ακολουθία συναρτήσεων και έστω ότι $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα, όπου $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Αν κάθε f_n έχει ρίζα, αποδείξτε ότι η f έχει ρίζα.

- Από την υπόθεση, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n \in [0, 1]$ ώστε $f_n(x_n) = 0$.
- Από το θεώρημα Bolzano-Weierstrass μπορούμε να βρούμε υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) ώστε $x_{k_n} \rightarrow x \in [0, 1]$.
- Τότε,

$$\begin{aligned}
 (*) \quad |f(x)| &= |f(x) - f_{k_n}(x_{k_n})| \leq |f(x) - f(x_{k_n})| + |f(x_{k_n}) - f_{k_n}(x_{k_n})| \\
 &\leq |f(x) - f(x_{k_n})| + \|f - f_{k_n}\|_{\infty} \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

διότι $f(x_{k_n}) \rightarrow f(x)$ από την αρχή της μεταφοράς για τη συνεχή συνάρτηση f στο σημείο x , και $\|f - f_{k_n}\|_{\infty} \rightarrow 0$ λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης των f_n (άρα και των f_{k_n}) στην f .

Άσκηση 3.26

Έστω $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ακολουθία συναρτήσεων και έστω ότι $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα, όπου $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Αν κάθε f_n έχει ρίζα, αποδείξτε ότι η f έχει ρίζα.

- Από την υπόθεση, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n \in [0, 1]$ ώστε $f_n(x_n) = 0$.
- Από το θεώρημα Bolzano-Weierstrass μπορούμε να βρούμε υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) ώστε $x_{k_n} \rightarrow x \in [0, 1]$.
- Τότε,

$$\begin{aligned}
 (*) \quad |f(x)| &= |f(x) - f_{k_n}(x_{k_n})| \leq |f(x) - f(x_{k_n})| + |f(x_{k_n}) - f_{k_n}(x_{k_n})| \\
 &\leq |f(x) - f(x_{k_n})| + \|f - f_{k_n}\|_{\infty} \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

διότι $f(x_{k_n}) \rightarrow f(x)$ από την αρχή της μεταφοράς για τη συνεχή συνάρτηση f στο σημείο x , και $\|f - f_{k_n}\|_{\infty} \rightarrow 0$ λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης των f_n (άρα και των f_{k_n}) στην f .

- Από την $(*)$ έπεται άμεσα ότι $f(x) = 0$, δηλαδή η f έχει ρίζα.

Άσκηση 2.1

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει διαμέριση P του $[a, b]$ ώστε $L(f, P) = U(f, P)$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

Άσκηση 2.1

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει διαμέριση P του $[a, b]$ ώστε $L(f, P) = U(f, P)$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

- Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ διαμέριση του $[a, b]$ ώστε $U(f, P) = L(f, P)$.

Άσκηση 2.1

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει διαμέριση P του $[a, b]$ ώστε $L(f, P) = U(f, P)$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

- Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ διαμέριση του $[a, b]$ ώστε $U(f, P) = L(f, P)$.
- Αυτό σημαίνει ότι $\sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)(x_{k+1} - x_k) = U(f, P) - L(f, P) = 0$.

Άσκηση 2.1

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει διαμέριση P του $[a, b]$ ώστε $L(f, P) = U(f, P)$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

- Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ διαμέριση του $[a, b]$ ώστε $U(f, P) = L(f, P)$.
- Αυτό σημαίνει ότι $\sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)(x_{k+1} - x_k) = U(f, P) - L(f, P) = 0$.
- Αφού $m_k \leq M_k$ για κάθε $k = 0, 1, \dots, n-1$, συμπεραίνουμε ότι

$$m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\} = \sup\{f(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\} = M_k$$

για κάθε $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Άσκηση 2.1

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει διαμέριση P του $[a, b]$ ώστε $L(f, P) = U(f, P)$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

- Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ διαμέριση του $[a, b]$ ώστε $U(f, P) = L(f, P)$.
- Αυτό σημαίνει ότι $\sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)(x_{k+1} - x_k) = U(f, P) - L(f, P) = 0$.
- Αφού $m_k \leq M_k$ για κάθε $k = 0, 1, \dots, n-1$, συμπεραίνουμε ότι

$$m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\} = \sup\{f(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\} = M_k$$

για κάθε $k = 0, 1, \dots, n-1$.

- Δηλαδή, η $f(x) = m_k = M_k$ για κάθε $x \in [x_k, x_{k+1}]$.

Άσκηση 2.1

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει διαμέριση P του $[a, b]$ ώστε $L(f, P) = U(f, P)$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

- Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ διαμέριση του $[a, b]$ ώστε $U(f, P) = L(f, P)$.
- Αυτό σημαίνει ότι $\sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)(x_{k+1} - x_k) = U(f, P) - L(f, P) = 0$.
- Αφού $m_k \leq M_k$ για κάθε $k = 0, 1, \dots, n-1$, συμπεραίνουμε ότι

$$m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\} = \sup\{f(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\} = M_k$$

για κάθε $k = 0, 1, \dots, n-1$.

- Δηλαδή, η $f(x) = m_k = M_k$ για κάθε $x \in [x_k, x_{k+1}]$.
- Παρατηρήστε τώρα ότι: $x_1 \in [x_0, x_1]$, άρα $f(x_1) = m_0 = M_0$. Όμως, $x_1 \in [x_1, x_2]$, άρα $f(x_1) = m_1 = M_1$. Δηλαδή, $m_0 = M_0 = m_1 = M_1$.

Άσκηση 2.1

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει διαμέριση P του $[a, b]$ ώστε $L(f, P) = U(f, P)$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

- Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ διαμέριση του $[a, b]$ ώστε $U(f, P) = L(f, P)$.
- Αυτό σημαίνει ότι $\sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)(x_{k+1} - x_k) = U(f, P) - L(f, P) = 0$.
- Αφού $m_k \leq M_k$ για κάθε $k = 0, 1, \dots, n-1$, συμπεραίνουμε ότι

$$m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\} = \sup\{f(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\} = M_k$$

για κάθε $k = 0, 1, \dots, n-1$.

- Δηλαδή, η $f(x) = m_k = M_k$ για κάθε $x \in [x_k, x_{k+1}]$.
- Παρατηρήστε τώρα ότι: $x_1 \in [x_0, x_1]$, άρα $f(x_1) = m_0 = M_0$. Όμως, $x_1 \in [x_1, x_2]$, άρα $f(x_1) = m_1 = M_1$. Δηλαδή, $m_0 = M_0 = m_1 = M_1$.
- Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο (για τα επόμενα υποδιαστήματα), συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\alpha = m_0 = M_0 = m_1 = M_1 = \dots = m_k = M_k = \dots = m_{n-1} = M_{n-1}.$$

Άσκηση 2.1

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει διαμέριση P του $[a, b]$ ώστε $L(f, P) = U(f, P)$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

- Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ διαμέριση του $[a, b]$ ώστε $U(f, P) = L(f, P)$.
- Αυτό σημαίνει ότι $\sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)(x_{k+1} - x_k) = U(f, P) - L(f, P) = 0$.
- Αφού $m_k \leq M_k$ για κάθε $k = 0, 1, \dots, n-1$, συμπεραίνουμε ότι

$$m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\} = \sup\{f(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\} = M_k$$

για κάθε $k = 0, 1, \dots, n-1$.

- Δηλαδή, η $f(x) = m_k = M_k$ για κάθε $x \in [x_k, x_{k+1}]$.
- Παρατηρήστε τώρα ότι: $x_1 \in [x_0, x_1]$, άρα $f(x_1) = m_0 = M_0$. Όμως, $x_1 \in [x_1, x_2]$, άρα $f(x_1) = m_1 = M_1$. Δηλαδή, $m_0 = M_0 = m_1 = M_1$.
- Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο (για τα επόμενα υποδιαστήματα), συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\alpha = m_0 = M_0 = m_1 = M_1 = \dots = m_k = M_k = \dots = m_{n-1} = M_{n-1}.$$

- Έπεται ότι $f(x) = \alpha$ για κάθε $x \in [a, b]$. Δηλαδή, η f είναι σταθερή.

Άσκηση 2.2

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b] \cap \mathbb{Q}$. Αποδείξτε ότι

$$\int_a^b f(x) dx = 0.$$

Άσκηση 2.2

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b] \cap \mathbb{Q}$. Αποδείξτε ότι

$$\int_a^b f(x) dx = 0.$$

- Θεωρήστε τυχούσα διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ του $[a, b]$.

Άσκηση 2.2

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b] \cap \mathbb{Q}$. Αποδείξτε ότι

$$\int_a^b f(x) dx = 0.$$

- Θεωρήστε τυχούσα διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ του $[a, b]$.
- Σε κάθε υποδιάστημα $[x_k, x_{k+1}]$ υπάρχει ρητός αριθμός q_k .

Άσκηση 2.2

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b] \cap \mathbb{Q}$. Αποδείξτε ότι

$$\int_a^b f(x) dx = 0.$$

- Θεωρήστε τυχούσα διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ του $[a, b]$.
- Σε κάθε υποδιάστημα $[x_k, x_{k+1}]$ υπάρχει ρητός αριθμός q_k .
- Από την υπόθεση έχουμε $f(q_k) = 0$, άρα $m_k \leq 0 \leq M_k$.

Άσκηση 2.2

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b] \cap \mathbb{Q}$. Αποδείξτε ότι

$$\int_a^b f(x) dx = 0.$$

- Θεωρήστε τυχούσα διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ του $[a, b]$.
- Σε κάθε υποδιάστημα $[x_k, x_{k+1}]$ υπάρχει ρητός αριθμός q_k .
- Από την υπόθεση έχουμε $f(q_k) = 0$, άρα $m_k \leq 0 \leq M_k$.
- Έπεται ότι

$$L(f, P) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k) \leq 0 \leq \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k) = U(f, P).$$

Άσκηση 2.2

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b] \cap \mathbb{Q}$. Αποδείξτε ότι

$$\int_a^b f(x) dx = 0.$$

- Θεωρήστε τυχούσα διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ του $[a, b]$.
- Σε κάθε υποδιάστημα $[x_k, x_{k+1}]$ υπάρχει ρητός αριθμός q_k .
- Από την υπόθεση έχουμε $f(q_k) = 0$, άρα $m_k \leq 0 \leq M_k$.
- Έπεται ότι

$$L(f, P) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k) \leq 0 \leq \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k) = U(f, P).$$

- Άρα, $\sup_P L(f, P) \leq 0$ και $\inf_P U(f, P) \geq 0$. Η f είναι ολοκληρώσιμη, άρα

$$\int_a^b f(x) dx = \sup_P L(f, P) \leq 0 \quad \text{και} \quad \int_a^b f(x) dx = \inf_P U(f, P) \geq 0.$$

Άσκηση 2.2

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b] \cap \mathbb{Q}$. Αποδείξτε ότι

$$\int_a^b f(x) dx = 0.$$

- Θεωρήστε τυχούσα διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ του $[a, b]$.
- Σε κάθε υποδιάστημα $[x_k, x_{k+1}]$ υπάρχει ρητός αριθμός q_k .
- Από την υπόθεση έχουμε $f(q_k) = 0$, άρα $m_k \leq 0 \leq M_k$.
- Έπεται ότι

$$L(f, P) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k) \leq 0 \leq \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k) = U(f, P).$$

- Άρα, $\sup_P L(f, P) \leq 0$ και $\inf_P U(f, P) \geq 0$. Η f είναι ολοκληρώσιμη, άρα

$$\int_a^b f(x) dx = \sup_P L(f, P) \leq 0 \quad \text{και} \quad \int_a^b f(x) dx = \inf_P U(f, P) \geq 0.$$

- Δηλαδή, $\int_a^b f(x) dx = 0$.

Άσκηση 2.3

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε: για κάθε $[\gamma, \delta] \subseteq [a, b]$ ισχύει $\inf\{f(x) : \gamma \leq x \leq \delta\} \leq \lambda$. Αποδείξτε ότι

$$\int_a^b f(x) dx \leq \lambda(b - a).$$

Άσκηση 2.3

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε: για κάθε $[\gamma, \delta] \subseteq [a, b]$ ισχύει $\inf\{f(x) : \gamma \leq x \leq \delta\} \leq \lambda$. Αποδείξτε ότι

$$\int_a^b f(x) dx \leq \lambda(b - a).$$

- Θεωρήστε τυχούσα διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ του $[a, b]$.

Άσκηση 2.3

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε: για κάθε $[\gamma, \delta] \subseteq [a, b]$ ισχύει $\inf\{f(x) : \gamma \leq x \leq \delta\} \leq \lambda$. Αποδείξτε ότι

$$\int_a^b f(x) dx \leq \lambda(b - a).$$

- Θεωρήστε τυχούσα διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ του $[a, b]$.
- Από την υπόθεση, για κάθε υποδιάστημα $[x_k, x_{k+1}]$ έχουμε $m_k = \inf\{f(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\} \leq \lambda$.

Άσκηση 2.3

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε: για κάθε $[\gamma, \delta] \subseteq [a, b]$ ισχύει $\inf\{f(x) : \gamma \leq x \leq \delta\} \leq \lambda$. Αποδείξτε ότι

$$\int_a^b f(x)dx \leq \lambda(b-a).$$

- Θεωρήστε τυχούσα διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ του $[a, b]$.
- Από την υπόθεση, για κάθε υποδιάστημα $[x_k, x_{k+1}]$ έχουμε $m_k = \inf\{f(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\} \leq \lambda$.
- Συνεπώς,

$$L(f, P) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \lambda(x_{k+1} - x_k) = \lambda(b-a).$$

Άσκηση 2.3

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε: για κάθε $[\gamma, \delta] \subseteq [a, b]$ ισχύει $\inf\{f(x) : \gamma \leq x \leq \delta\} \leq \lambda$. Αποδείξτε ότι

$$\int_a^b f(x)dx \leq \lambda(b-a).$$

- Θεωρήστε τυχούσα διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ του $[a, b]$.
- Από την υπόθεση, για κάθε υποδιάστημα $[x_k, x_{k+1}]$ έχουμε $m_k = \inf\{f(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\} \leq \lambda$.
- Συνεπώς,

$$L(f, P) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \lambda(x_{k+1} - x_k) = \lambda(b-a).$$

- Έπεται ότι

$$\int_a^b f(x)dx = \sup\{L(f, P) : P \text{ διαμέριση του } [a, b]\} \leq \lambda(b-a).$$

Άσκηση 2.4

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση με $\int_a^b f(x)dx > 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\lambda > 0$ και μη τετριμμένο υποδιάστημα $[\gamma, \delta] \subseteq [a, b]$ ώστε $f(x) \geq \lambda$ για κάθε $x \in [\gamma, \delta]$.

Άσκηση 2.4

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση με $\int_a^b f(x)dx > 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\lambda > 0$ και μη τετριμμένο υποδιάστημα $[\gamma, \delta] \subseteq [a, b]$ ώστε $f(x) \geq \lambda$ για κάθε $x \in [\gamma, \delta]$.

- Από την υπόθεση έχουμε

$$\int_a^b f(x)dx = \sup\{L(f, P) : P \text{ διαμέριση του } [a, b]\} > 0.$$

Άσκηση 2.4

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση με $\int_a^b f(x)dx > 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\lambda > 0$ και μη τετριμμένο υποδιάστημα $[\gamma, \delta] \subseteq [a, b]$ ώστε $f(x) \geq \lambda$ για κάθε $x \in [\gamma, \delta]$.

- Από την υπόθεση έχουμε

$$\int_a^b f(x)dx = \sup\{L(f, P) : P \text{ διαμέριση του } [a, b]\} > 0.$$

- Συνεπώς, υπάρχει διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ του $[a, b]$ τέτοια ώστε

$$L(f, P) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k) > 0.$$

Άσκηση 2.4

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση με $\int_a^b f(x)dx > 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\lambda > 0$ και μη τετριμμένο υποδιάστημα $[\gamma, \delta] \subseteq [a, b]$ ώστε $f(x) \geq \lambda$ για κάθε $x \in [\gamma, \delta]$.

- Από την υπόθεση έχουμε

$$\int_a^b f(x)dx = \sup\{L(f, P) : P \text{ διαμέριση του } [a, b]\} > 0.$$

- Συνεπώς, υπάρχει διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ του $[a, b]$ τέτοια ώστε

$$L(f, P) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k) > 0.$$

- Αυτό συνεπάγεται ότι υπάρχει $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ ώστε $m_k(x_{k+1} - x_k) > 0$, άρα $m_k = \inf\{f(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\} = \lambda > 0$.

Άσκηση 2.4

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση με $\int_a^b f(x)dx > 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\lambda > 0$ και μη τετριμμένο υποδιάστημα $[\gamma, \delta] \subseteq [a, b]$ ώστε $f(x) \geq \lambda$ για κάθε $x \in [\gamma, \delta]$.

- Από την υπόθεση έχουμε

$$\int_a^b f(x)dx = \sup\{L(f, P) : P \text{ διαμέριση του } [a, b]\} > 0.$$

- Συνεπώς, υπάρχει διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ του $[a, b]$ τέτοια ώστε

$$L(f, P) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k) > 0.$$

- Αυτό συνεπάγεται ότι υπάρχει $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ ώστε $m_k(x_{k+1} - x_k) > 0$, άρα $m_k = \inf\{f(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\} = \lambda > 0$.
- Τότε, για το μη τετριμμένο υποδιάστημα $[x_k, x_{k+1}] \subseteq [a, b]$ έχουμε $f(x) \geq \lambda$ για κάθε $x \in [x_k, x_{k+1}]$.

Άσκηση 2.5

(α) Έστω $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η g είναι συνεχής παντού, εκτός από ένα σημείο $x_0 \in (a, b)$. Αποδείξτε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη.

Άσκηση 2.5

(α) Έστω $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η g είναι συνεχής παντού, εκτός από ένα σημείο $x_0 \in (a, b)$. Αποδείξτε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη.

- (α) Θα χρησιμοποιήσουμε τον ισχυρισμό που αποδείξαμε στο Μάθημα 1: «Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και $c \in (a, b)$ με την ιδιότητα ότι για κάθε μικρό $\delta > 0$ η f είναι ολοκληρώσιμη στα διαστήματα $[a, c - \delta]$ και $[c + \delta, b]$. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη.»

Άσκηση 2.5

(α) Έστω $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η g είναι συνεχής παντού, εκτός από ένα σημείο $x_0 \in (a, b)$. Αποδείξτε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη.

- (α) Θα χρησιμοποιήσουμε τον ισχυρισμό που αποδείξαμε στο Μάθημα 1: «Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και $c \in (a, b)$ με την ιδιότητα ότι για κάθε μικρό $\delta > 0$ η f είναι ολοκληρώσιμη στα διαστήματα $[a, c - \delta]$ και $[c + \delta, b]$. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη.»
- Μας δίνεται φραγμένη συνάρτηση $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής παντού εκτός από το σημείο $x_0 \in (a, b)$.

Άσκηση 2.5

(α) Έστω $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η g είναι συνεχής παντού, εκτός από ένα σημείο $x_0 \in (a, b)$. Αποδείξτε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη.

- (α) Θα χρησιμοποιήσουμε τον ισχυρισμό που αποδείξαμε στο Μάθημα 1: «Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και $c \in (a, b)$ με την ιδιότητα ότι για κάθε μικρό $\delta > 0$ η f είναι ολοκληρώσιμη στα διαστήματα $[a, c - \delta]$ και $[c + \delta, b]$. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη.»
- Μας δίνεται φραγμένη συνάρτηση $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής παντού εκτός από το σημείο $x_0 \in (a, b)$.
- Για κάθε $\delta > 0$ αρκετά μικρό ώστε να έχουμε $x_0 \pm \delta \in (a, b)$ ισχύει ότι η g είναι συνεχής στα διαστήματα $[a, x_0 - \delta]$ και $[x_0 + \delta, b]$, άρα είναι ολοκληρώσιμη στα διαστήματα $[a, x_0 - \delta]$ και $[x_0 + \delta, b]$.

Άσκηση 2.5

(α) Έστω $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η g είναι συνεχής παντού, εκτός από ένα σημείο $x_0 \in (a, b)$. Αποδείξτε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη.

- (α) Θα χρησιμοποιήσουμε τον ισχυρισμό που αποδείξαμε στο Μάθημα 1: «Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και $c \in (a, b)$ με την ιδιότητα ότι για κάθε μικρό $\delta > 0$ η f είναι ολοκληρώσιμη στα διαστήματα $[a, c - \delta]$ και $[c + \delta, b]$. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη.»
- Μας δίνεται φραγμένη συνάρτηση $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής παντού εκτός από το σημείο $x_0 \in (a, b)$.
- Για κάθε $\delta > 0$ αρκετά μικρό ώστε να έχουμε $x_0 \pm \delta \in (a, b)$ ισχύει ότι η g είναι συνεχής στα διαστήματα $[a, x_0 - \delta]$ και $[x_0 + \delta, b]$, άρα είναι ολοκληρώσιμη στα διαστήματα $[a, x_0 - \delta]$ και $[x_0 + \delta, b]$.
- Από τον ισχυρισμό έπεται ότι η g είναι ολοκληρώσιμη.

Άσκηση 2.5

(β) Αποδείξτε ότι κάθε τμηματικά συνεχής συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη.

Άσκηση 2.5

(β) Αποδείξτε ότι κάθε τμηματικά συνεχής συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη.

- (β) Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ τμηματικά συνεχής συνάρτηση.

Άσκηση 2.5

(β) Αποδείξτε ότι κάθε τμηματικά συνεχής συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη.

- (β) Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ τμηματικά συνεχής συνάρτηση.
- Αυτό σημαίνει ότι η f είναι φραγμένη και έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία ασυνέχειας $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_m \leq b$.

Άσκηση 2.5

(β) Αποδείξτε ότι κάθε τμηματικά συνεχής συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη.

- (β) Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ τμηματικά συνεχής συνάρτηση.
- Αυτό σημαίνει ότι η f είναι φραγμένη και έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία ασυνέχειας $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_m \leq b$.
- Επιλέγουμε $y_1, \dots, y_{m-1}$ ώστε $x_k < y_k < x_{k+1}$ για κάθε $k = 1, \dots, m-1$.

Άσκηση 2.5

(β) Αποδείξτε ότι κάθε τμηματικά συνεχής συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη.

- (β) Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ τμηματικά συνεχής συνάρτηση.
- Αυτό σημαίνει ότι η f είναι φραγμένη και έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία ασυνέχειας $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_m \leq b$.
- Επιλέγουμε $y_1, \dots, y_{m-1}$ ώστε $x_k < y_k < x_{k+1}$ για κάθε $k = 1, \dots, m-1$.
- Παρατηρούμε ότι η f έχει ένα σημείο ασυνέχειας σε καθένα από τα διαστήματα $[a, y_1], [y_1, y_2], \dots, [y_{m-2}, y_{m-1}]$ και $[y_{m-1}, b]$.

Άσκηση 2.5

(β) Αποδείξτε ότι κάθε τμηματικά συνεχής συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη.

- (β) Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ τμηματικά συνεχής συνάρτηση.
- Αυτό σημαίνει ότι η f είναι φραγμένη και έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία ασυνέχειας $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_m \leq b$.
- Επιλέγουμε $y_1, \dots, y_{m-1}$ ώστε $x_k < y_k < x_{k+1}$ για κάθε $k = 1, \dots, m-1$.
- Παρατηρούμε ότι η f έχει ένα σημείο ασυνέχειας σε καθένα από τα διαστήματα $[a, y_1], [y_1, y_2], \dots, [y_{m-2}, y_{m-1}]$ και $[y_{m-1}, b]$.
- Από το (α) η f είναι ολοκληρώσιμη σε καθένα από αυτά τα διαδοχικά διαστήματα, και από την προσθετικότητα του ολοκληρώματος έπεται ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.

Άσκηση 2.11

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

Άσκηση 2.11

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

- Θέτουμε $M = \|f\|_\infty = \max\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$. Έστω $\varepsilon > 0$.

Άσκηση 2.11

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

- Θέτουμε $M = \|f\|_\infty = \max\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$. Έστω $\varepsilon > 0$.
- Παρατηρήστε ότι

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b M^p dx \right)^{1/p} = M(b-a)^{1/p}$$

και $M(b-a)^{1/p} \rightarrow M$ όταν $p \rightarrow \infty$, άρα υπάρχει $p_1 \geq 1$ ώστε

$$\|f\|_p < M + \varepsilon \quad \text{για κάθε } p \geq p_1.$$

Άσκηση 2.11

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

Άσκηση 2.11

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

- Αφού η $|f|$ είναι συνεχής στο $[a, b]$, παίρνει τη μέγιστη τιμή της: υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ ώστε $|f(x_0)| = M$.

Άσκηση 2.11

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

- Αφού η $|f|$ είναι συνεχής στο $[a, b]$, παίρνει τη μέγιστη τιμή της: υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ ώστε $|f(x_0)| = M$.
- Αφού η f είναι συνεχής στο x_0 , υπάρχει κάποιο διάστημα $J \subset [a, b]$ με μήκος $\delta > 0$ και $x_0 \in J$, ώστε $|f(x)| > M - \frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $x \in J$.

Άσκηση 2.11

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

- Αφού η $|f|$ είναι συνεχής στο $[a, b]$, παίρνει τη μέγιστη τιμή της: υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ ώστε $|f(x_0)| = M$.
- Αφού η f είναι συνεχής στο x_0 , υπάρχει κάποιο διάστημα $J \subset [a, b]$ με μήκος $\delta > 0$ και $x_0 \in J$, ώστε $|f(x)| > M - \frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $x \in J$.
- Επίσης, αφού $\delta^{1/p} \rightarrow 1$ όταν $p \rightarrow \infty$, υπάρχει $p_2 \geq 1$ ώστε: για κάθε $p \geq p_2$,

$$\left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \geq \left(\int_J |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \geq \left(M - \frac{\varepsilon}{2} \right) \delta^{1/p} > M - \varepsilon.$$

Άσκηση 2.11

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

- Αφού η $|f|$ είναι συνεχής στο $[a, b]$, παίρνει τη μέγιστη τιμή της: υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ ώστε $|f(x_0)| = M$.
- Αφού η f είναι συνεχής στο x_0 , υπάρχει κάποιο διάστημα $J \subset [a, b]$ με μήκος $\delta > 0$ και $x_0 \in J$, ώστε $|f(x)| > M - \frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $x \in J$.
- Επίσης, αφού $\delta^{1/p} \rightarrow 1$ όταν $p \rightarrow \infty$, υπάρχει $p_2 \geq 1$ ώστε: για κάθε $p \geq p_2$,

$$\left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \geq \left(\int_J |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \geq \left(M - \frac{\varepsilon}{2} \right) \delta^{1/p} > M - \varepsilon.$$

- Τότε, για κάθε $p \geq p_0 = \max\{p_1, p_2\}$ έχουμε

$$|\|f\|_p - M| = \left| \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} - M \right| < \varepsilon.$$

Δηλαδή, $\|f\|_p \rightarrow M$.