

Αρμονική Ανάλυση

Μάθημα 4

Φεβρουάριος 2024

Ακολουθίες συναρτήσεων: ομοιόμορφη σύγκλιση

Ορισμός

Έστω I διάστημα και $f_n, f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Λέμε ότι η ακολουθία (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στην f αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $x \in I$ ισχύει $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

Ακολουθίες συναρτήσεων: ομοιόμορφη σύγκλιση

Ορισμός

Έστω I διάστημα και $f_n, f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Λέμε ότι η ακολουθία (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στην f αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $x \in I$ ισχύει $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

Ένας άλλος τρόπος να περιγράψουμε την ομοιόμορφη σύγκλιση είναι ο εξής: Η ακολουθία (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στην f αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$, ή πιο απλά:

Η ακολουθία (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στην f αν $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$.

Ομοιόμορφη σύγκλιση και συνέχεια

Θεώρημα

Έστω I διάστημα, $f, f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ και $x_0 \in I$. Υποθέτουμε ότι:

- ❶ $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο I , και
- ❷ κάθε f_n είναι συνεχής στο x_0 .

Τότε, η f είναι κι αυτή συνεχής στο x_0 .

Ομοιόμορφη σύγκλιση και συνέχεια

Θεώρημα

Έστω I διάστημα, $f, f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ και $x_0 \in I$. Υποθέτουμε ότι:

- ❶ $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο I , και
- ❷ κάθε f_n είναι συνεχής στο x_0 .

Τότε, η f είναι κι αυτή συνεχής στο x_0 . Ειδικότερα, αν κάθε f_n είναι συνεχής στο I , τότε η f είναι συνεχής στο I .

Θεώρημα

Έστω I διάστημα, $f, f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ και $x_0 \in I$. Υποθέτουμε ότι:

- ❶ $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο I , και
- ❷ κάθε f_n είναι συνεχής στο x_0 .

Τότε, η f είναι κι αυτή συνεχής στο x_0 . Ειδικότερα, αν κάθε f_n είναι συνεχής στο I , τότε η f είναι συνεχής στο I .

- Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\|f_{n_0} - f\|_{\infty} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ομοιόμορφη σύγκλιση και συνέχεια

Θεώρημα

Έστω I διάστημα, $f, f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ και $x_0 \in I$. Υποθέτουμε ότι:

- 1 $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο I , και
- 2 κάθε f_n είναι συνεχής στο x_0 .

Τότε, η f είναι κι αυτή συνεχής στο x_0 . Ειδικότερα, αν κάθε f_n είναι συνεχής στο I , τότε η f είναι συνεχής στο I .

- Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\|f_{n_0} - f\|_{\infty} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

- Αφού η f_{n_0} είναι συνεχής στο x_0 , υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: για κάθε $x \in I$ με $|x - x_0| < \delta$,

$$|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ομοιόμορφη σύγκλιση και συνέχεια

- Τότε, για κάθε $x \in I$ με $|x - x_0| < \delta$ γράφουμε

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq \|f_{n_0} - f\|_{\infty} + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + \|f_{n_0} - f\|_{\infty} \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ομοιόμορφη σύγκλιση και συνέχεια

- Τότε, για κάθε $x \in I$ με $|x - x_0| < \delta$ γράφουμε

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \\&\leq \|f_{n_0} - f\|_{\infty} + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + \|f_{n_0} - f\|_{\infty} \\&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

- Άρα, η f είναι συνεχής στο x_0 .

Ομοιόμορφη σύγκλιση και συνέχεια

- Τότε, για κάθε $x \in I$ με $|x - x_0| < \delta$ γράφουμε

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq \|f_{n_0} - f\|_{\infty} + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + \|f_{n_0} - f\|_{\infty} \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

- Άρα, η f είναι συνεχής στο x_0 .

Σημείωση. Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, αν μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων συγκλίνει κατά σημείο σε ασυνεχή συνάρτηση, τότε η σύγκλιση δεν μπορεί να είναι ομοιόμορφη.

Ομοιόμορφη σύγκλιση και ολοκλήρωμα

Θεώρημα

Έστω (f_n) ακολουθία συναρτήσεων που είναι ορισμένες σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$. Υποθέτουμε ότι κάθε $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι Riemann-ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και ότι $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$. Τότε, η f είναι Riemann-ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και

$$\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx.$$

Ομοιόμορφη σύγκλιση και ολοκλήρωμα

Θεώρημα

Έστω (f_n) ακολουθία συναρτήσεων που είναι ορισμένες σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$. Υποθέτουμε ότι κάθε $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι Riemann-ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και ότι $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$. Τότε, η f είναι Riemann-ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και

$$\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx.$$

- Απόδειξη: Δείχνουμε πρώτα ότι η f είναι ολοκληρώσιμη.

Ομοιόμορφη σύγκλιση και ολοκλήρωμα

Θεώρημα

Έστω (f_n) ακολουθία συναρτήσεων που είναι ορισμένες σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$. Υποθέτουμε ότι κάθε $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι Riemann-ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και ότι $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$. Τότε, η f είναι Riemann-ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και

$$\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx.$$

- Απόδειξη: Δείχνουμε πρώτα ότι η f είναι ολοκληρώσιμη.
- Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και βρίσκουμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$. Αυτό είναι δυνατό, διότι $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$.

Ομοιόμορφη σύγκλιση και ολοκλήρωμα

Θεώρημα

Έστω (f_n) ακολουθία συναρτήσεων που είναι ορισμένες σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$. Υποθέτουμε ότι κάθε $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι Riemann-ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και ότι $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$. Τότε, η f είναι Riemann-ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και

$$\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx.$$

- Απόδειξη: Δείχνουμε πρώτα ότι η f είναι ολοκληρώσιμη.
- Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και βρίσκουμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$. Αυτό είναι δυνατό, διότι $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$.
- Αφού η f_n είναι ολοκληρώσιμη, μπορούμε να βρούμε διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b\}$ του $[a, b]$ ώστε

$$U(f_n, P) - L(f_n, P) = \sum_{k=0}^{m-1} (M_k(f_n) - m_k(f_n))(x_{k+1} - x_k) < \frac{\varepsilon}{2}$$

όπου $M_k = \sup\{f_n(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\}$ και $m_k = \inf\{f_n(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\}$.

Ομοιόμορφη σύγκλιση και ολοκλήρωμα

- Χρησιμοποιώντας την $\|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$, ελέγχουμε ότι

$$m_k(f_n) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \leq m_k(f) \leq M_k(f) \leq M_k(f_n) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$$

για κάθε $k = 0, 1, \dots, m-1$.

Ομοιόμορφη σύγκλιση και ολοκλήρωμα

- Χρησιμοποιώντας την $\|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$, ελέγχουμε ότι

$$m_k(f_n) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \leq m_k(f) \leq M_k(f) \leq M_k(f_n) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$$

για κάθε $k = 0, 1, \dots, m-1$.

- Έπεται ότι

$$U(f, P) - L(f, P) \leq U(f_n, P) - L(f_n, P) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (x_{k+1} - x_k) < \varepsilon.$$

Ομοιόμορφη σύγκλιση και ολοκλήρωμα

- Χρησιμοποιώντας την $\|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$, ελέγχουμε ότι

$$m_k(f_n) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \leq m_k(f) \leq M_k(f) \leq M_k(f_n) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$$

για κάθε $k = 0, 1, \dots, m-1$.

- Έπεται ότι

$$U(f, P) - L(f, P) \leq U(f_n, P) - L(f_n, P) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (x_{k+1} - x_k) < \varepsilon.$$

- Από το κριτήριο του Riemann, η f είναι ολοκληρώσιμη.

Ομοιόμορφη σύγκλιση και ολοκλήρωμα

- Χρησιμοποιώντας την $\|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$, ελέγχουμε ότι

$$m_k(f_n) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \leq m_k(f) \leq M_k(f) \leq M_k(f_n) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$$

για κάθε $k = 0, 1, \dots, m-1$.

- Έπεται ότι

$$U(f, P) - L(f, P) \leq U(f_n, P) - L(f_n, P) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (x_{k+1} - x_k) < \varepsilon.$$

- Από το κριτήριο του Riemann, η f είναι ολοκληρώσιμη.
- Η σύγκλιση των ολοκληρωμάτων είναι τώρα άμεση συνέπεια της $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$: παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \int_a^b \|f_n - f\|_\infty dx \\ &= (b-a) \|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0, \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται το θεώρημα.

Ομοιόμορφη σύγκλιση και παράγωγος

- Το παράδειγμα της ακολουθίας συναρτήσεων (f_n) στο $(0, \pi)$ με $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$ δείχνει ότι δεν μπορούμε να περιμένουμε ανάλογα καλή συμπεριφορά για τις παραγώγους.

Ομοιόμορφη σύγκλιση και παράγωγος

- Το παράδειγμα της ακολουθίας συναρτήσεων (f_n) στο $(0, \pi)$ με $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$ δείχνει ότι δεν μπορούμε να περιμένουμε ανάλογα καλή συμπεριφορά για τις παραγώγους.
- Έχουμε $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n} \rightarrow 0$, άρα $f_n \rightarrow 0$ ομοιόμορφα στο $(0, \pi)$.

Ομοιόμορφη σύγκλιση και παράγωγος

- Το παράδειγμα της ακολουθίας συναρτήσεων (f_n) στο $(0, \pi)$ με $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$ δείχνει ότι δεν μπορούμε να περιμένουμε ανάλογα καλή συμπεριφορά για τις παραγώγους.
- Έχουμε $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n} \rightarrow 0$, άρα $f_n \rightarrow 0$ ομοιόμορφα στο $(0, \pi)$.
- Όμως, η ακολουθία $f'_n(x) = \cos(nx)$ δεν συγκλίνει για καμία τιμή του $x \in (0, \pi)$.

Ομοιόμορφη σύγκλιση και παράγωγος

- Το παράδειγμα της ακολουθίας συναρτήσεων (f_n) στο $(0, \pi)$ με $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$ δείχνει ότι δεν μπορούμε να περιμένουμε ανάλογα καλή συμπεριφορά για τις παραγώγους.
- Έχουμε $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n} \rightarrow 0$, άρα $f_n \rightarrow 0$ ομοιόμορφα στο $(0, \pi)$.
- Όμως, η ακολουθία $f'_n(x) = \cos(nx)$ δεν συγκλίνει για καμία τιμή του $x \in (0, \pi)$.
- Παρ' όλα αυτά, ισχύει το εξής:

Ομοιόμορφη σύγκλιση και παράγωγος

- Το παράδειγμα της ακολουθίας συναρτήσεων (f_n) στο $(0, \pi)$ με $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$ δείχνει ότι δεν μπορούμε να περιμένουμε ανάλογα καλή συμπεριφορά για τις παραγώγους.
- Έχουμε $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n} \rightarrow 0$, άρα $f_n \rightarrow 0$ ομοιόμορφα στο $(0, \pi)$.
- Όμως, η ακολουθία $f'_n(x) = \cos(nx)$ δεν συγκλίνει για καμία τιμή του $x \in (0, \pi)$.
- Παρ' όλα αυτά, ισχύει το εξής:

Θεώρημα

Έστω $f_n, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι κάθε f_n είναι παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και ότι η παράγωγός της, f'_n , είναι συνεχής στο $[a, b]$.

Ομοιόμορφη σύγκλιση και παράγωγος

- Το παράδειγμα της ακολουθίας συναρτήσεων (f_n) στο $(0, \pi)$ με $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$ δείχνει ότι δεν μπορούμε να περιμένουμε ανάλογα καλή συμπεριφορά για τις παραγώγους.
- Έχουμε $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n} \rightarrow 0$, άρα $f_n \rightarrow 0$ ομοιόμορφα στο $(0, \pi)$.
- Όμως, η ακολουθία $f'_n(x) = \cos(nx)$ δεν συγκλίνει για καμία τιμή του $x \in (0, \pi)$.
- Παρ' όλα αυτά, ισχύει το εξής:

Θεώρημα

Έστω $f_n, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι κάθε f_n είναι παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και ότι η παράγωγός της, f'_n , είναι συνεχής στο $[a, b]$. Υποθέτουμε επίσης ότι:

- 1 $f'_n \rightarrow g$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$, και
- 2 υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ ώστε η $(f_n(x_0))$ να είναι συγκλίνουσα σε κάποιον $\xi \in \mathbb{R}$.

Ομοιόμορφη σύγκλιση και παράγωγος

- Το παράδειγμα της ακολουθίας συναρτήσεων (f_n) στο $(0, \pi)$ με $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$ δείχνει ότι δεν μπορούμε να περιμένουμε ανάλογα καλή συμπεριφορά για τις παραγώγους.
- Έχουμε $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n} \rightarrow 0$, άρα $f_n \rightarrow 0$ ομοιόμορφα στο $(0, \pi)$.
- Όμως, η ακολουθία $f'_n(x) = \cos(nx)$ δεν συγκλίνει για καμία τιμή του $x \in (0, \pi)$.
- Παρ' όλα αυτά, ισχύει το εξής:

Θεώρημα

Έστω $f_n, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι κάθε f_n είναι παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και ότι η παράγωγός της, f'_n , είναι συνεχής στο $[a, b]$. Υποθέτουμε επίσης ότι:

- 1 $f'_n \rightarrow g$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$, και
- 2 υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ ώστε η $(f_n(x_0))$ να είναι συγκλίνουσα σε κάποιον $\xi \in \mathbb{R}$.

Τότε, η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, η f είναι παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και $f' \equiv g$.

- Απόδειξη: Από το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού,

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(s) ds, \quad x \in [a, b].$$

Ομοιόμορφη σύγκλιση και παράγωγος

- Απόδειξη: Από το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού,

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(s) ds, \quad x \in [a, b].$$

- Από το προηγούμενο θεώρημα συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{x_0}^x f'_n(s) ds \rightarrow \int_{x_0}^x g(s) dx, \quad x \in [a, b].$$

Ομοιόμορφη σύγκλιση και παράγωγος

- Απόδειξη: Από το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού,

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(s) ds, \quad x \in [a, b].$$

- Από το προηγούμενο θεώρημα συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{x_0}^x f'_n(s) ds \rightarrow \int_{x_0}^x g(s) dx, \quad x \in [a, b].$$

- Συνεπώς,

$$f_n(x) \rightarrow \xi + \int_{x_0}^x g(s) ds.$$

Ομοιόμορφη σύγκλιση και παράγωγος

- Ορίζουμε

$$f(x) = \xi + \int_{x_0}^x g(s) ds.$$

Ομοιόμορφη σύγκλιση και παράγωγος

- Ορίζουμε

$$f(x) = \xi + \int_{x_0}^x g(s) ds.$$

- Από το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού έχουμε $f'(x) = g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Ομοιόμορφη σύγκλιση και παράγωγος

- Ορίζουμε

$$f(x) = \xi + \int_{x_0}^x g(s) ds.$$

- Από το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού έχουμε $f'(x) = g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$.
- Μένει να δείξουμε ότι $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(s) ds - \xi - \int_{x_0}^x g(s) ds \right| \\ &\leq |f_n(x_0) - \xi| + \left| \int_{x_0}^x (f'_n(s) - g(s)) ds \right| \\ &\leq |f_n(x_0) - \xi| + |x - x_0| \|f'_n - g\|_{\infty} \\ &\leq |f_n(x_0) - \xi| + |b - a| \|f'_n - g\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Ομοιόμορφη σύγκλιση και παράγωγος

- Ορίζουμε

$$f(x) = \xi + \int_{x_0}^x g(s) ds.$$

- Από το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού έχουμε $f'(x) = g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$.
- Μένει να δείξουμε ότι $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(s) ds - \xi - \int_{x_0}^x g(s) ds \right| \\ &\leq |f_n(x_0) - \xi| + \left| \int_{x_0}^x (f'_n(s) - g(s)) ds \right| \\ &\leq |f_n(x_0) - \xi| + |x - x_0| \|f'_n - g\|_\infty \\ &\leq |f_n(x_0) - \xi| + |b - a| \|f'_n - g\|_\infty. \end{aligned}$$

- Έπεται ότι $\|f_n - f\|_\infty \leq |f_n(x_0) - \xi| + |b - a| \|f'_n - g\|_\infty \rightarrow 0$.

Ομοιόμορφη σύγκλιση και παράγωγος

Θεώρημα

Αν $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συναρτήσεις με συνεχή παράγωγο, ώστε $f_n(x) \rightarrow f(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$ και $f'_n \rightarrow g$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$, τότε η f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο την g .

Ομοιόμορφη σύγκλιση και παράγωγος

Θεώρημα

Αν $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συναρτήσεις με συνεχή παράγωγο, ώστε $f_n(x) \rightarrow f(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$ και $f'_n \rightarrow g$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$, τότε η f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο την g .

- Λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης $f'_n \rightarrow g$, για κάθε $x \in [a, b]$ έχουμε

$$\int_a^x f'_n(t) dt \rightarrow \int_a^x g(t) dt.$$

Ομοιόμορφη σύγκλιση και παράγωγος

Θεώρημα

Αν $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συναρτήσεις με συνεχή παράγωγο, ώστε $f_n(x) \rightarrow f(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$ και $f'_n \rightarrow g$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$, τότε η f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο την g .

- Λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης $f'_n \rightarrow g$, για κάθε $x \in [a, b]$ έχουμε

$$\int_a^x f'_n(t) dt \rightarrow \int_a^x g(t) dt.$$

- Αλλά από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού έχουμε

$$\int_a^x f'_n(t) dt = f_n(x) - f_n(a).$$

Ομοιόμορφη σύγκλιση και παράγωγος

Θεώρημα

Αν $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συναρτήσεις με συνεχή παράγωγο, ώστε $f_n(x) \rightarrow f(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$ και $f'_n \rightarrow g$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$, τότε η f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο την g .

- Λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης $f'_n \rightarrow g$, για κάθε $x \in [a, b]$ έχουμε

$$\int_a^x f'_n(t) dt \rightarrow \int_a^x g(t) dt.$$

- Αλλά από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού έχουμε

$$\int_a^x f'_n(t) dt = f_n(x) - f_n(a).$$

- Επειδή $f_n(x) \rightarrow f(x)$ και $f_n(a) \rightarrow f(a)$ έπεται ότι

$$f(x) - f(a) = \int_a^x g(t) dt.$$

Ομοιόμορφη σύγκλιση και παράγωγος

Θεώρημα

Αν $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συναρτήσεις με συνεχή παράγωγο, ώστε $f_n(x) \rightarrow f(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$ και $f'_n \rightarrow g$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$, τότε η f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο την g .

- Λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης $f'_n \rightarrow g$, για κάθε $x \in [a, b]$ έχουμε

$$\int_a^x f'_n(t) dt \rightarrow \int_a^x g(t) dt.$$

- Αλλά από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού έχουμε

$$\int_a^x f'_n(t) dt = f_n(x) - f_n(a).$$

- Επειδή $f_n(x) \rightarrow f(x)$ και $f_n(a) \rightarrow f(a)$ έπεται ότι

$$f(x) - f(a) = \int_a^x g(t) dt.$$

- Αλλά η g είναι συνεχής συνάρτηση, ως ομοιόμορφο όριο συνεχών συναρτήσεων. Κατά συνέπεια το αόριστο ολοκλήρωμά της είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση με παράγωγο την g . Δηλαδή η f είναι παραγωγίσιμη και $f' = g$.

Πληρότητα του $(\mathcal{B}(I), \|\cdot\|_\infty)$

- Θεωρούμε ένα διάστημα I και τον χώρο $\mathcal{B}(I)$ των φραγμένων συναρτήσεων $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ με νόρμα την $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in I\}$.

Πληρότητα του $(\mathcal{B}(I), \|\cdot\|_\infty)$

- Θεωρούμε ένα διάστημα I και τον χώρο $\mathcal{B}(I)$ των φραγμένων συναρτήσεων $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ με νόρμα την $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in I\}$.

Θεώρημα

Έστω I διάστημα. Ο χώρος με νόρμα $(\mathcal{B}(I), \|\cdot\|_\infty)$ είναι πλήρης.

Πληρότητα του $(\mathcal{B}(I), \|\cdot\|_\infty)$

- Θεωρούμε ένα διάστημα I και τον χώρο $\mathcal{B}(I)$ των φραγμένων συναρτήσεων $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ με νόρμα την $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in I\}$.

Θεώρημα

Έστω I διάστημα. Ο χώρος με νόρμα $(\mathcal{B}(I), \|\cdot\|_\infty)$ είναι πλήρης.

- Έστω (f_n) βασική ακολουθία στον $\mathcal{B}(I)$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $f \in \mathcal{B}(I)$ ώστε $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$.

Πληρότητα του $(\mathcal{B}(I), \|\cdot\|_\infty)$

- Θεωρούμε ένα διάστημα I και τον χώρο $\mathcal{B}(I)$ των φραγμένων συναρτήσεων $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ με νόρμα την $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in I\}$.

Θεώρημα

Έστω I διάστημα. Ο χώρος με νόρμα $(\mathcal{B}(I), \|\cdot\|_\infty)$ είναι πλήρης.

- Έστω (f_n) βασική ακολουθία στον $\mathcal{B}(I)$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $f \in \mathcal{B}(I)$ ώστε $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$.
- Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n, s \geq n_0$ τότε

$$\|f_n - f_s\|_\infty = \sup\{|f_n(x) - f_s(x)| : x \in I\} \leq \varepsilon.$$

Πληρότητα του $(\mathcal{B}(I), \|\cdot\|_\infty)$

- Θεωρούμε ένα διάστημα I και τον χώρο $\mathcal{B}(I)$ των φραγμένων συναρτήσεων $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ με νόρμα την $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in I\}$.

Θεώρημα

Έστω I διάστημα. Ο χώρος με νόρμα $(\mathcal{B}(I), \|\cdot\|_\infty)$ είναι πλήρης.

- Έστω (f_n) βασική ακολουθία στον $\mathcal{B}(I)$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $f \in \mathcal{B}(I)$ ώστε $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$.
- Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n, s \geq n_0$ τότε

$$\|f_n - f_s\|_\infty = \sup\{|f_n(x) - f_s(x)| : x \in I\} \leq \varepsilon.$$

- Στο προηγούμενο μάθημα είδαμε ότι υπάρχει $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ (κριτήριο Cauchy).

Πληρότητα του $(\mathcal{B}(I), \|\cdot\|_\infty)$

- Θεωρούμε ένα διάστημα I και τον χώρο $\mathcal{B}(I)$ των φραγμένων συναρτήσεων $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ με νόρμα την $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in I\}$.

Θεώρημα

Έστω I διάστημα. Ο χώρος με νόρμα $(\mathcal{B}(I), \|\cdot\|_\infty)$ είναι πλήρης.

- Έστω (f_n) βασική ακολουθία στον $\mathcal{B}(I)$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $f \in \mathcal{B}(I)$ ώστε $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$.
- Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n, s \geq n_0$ τότε

$$\|f_n - f_s\|_\infty = \sup\{|f_n(x) - f_s(x)| : x \in I\} \leq \varepsilon.$$

- Στο προηγούμενο μάθημα είδαμε ότι υπάρχει $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ (κριτήριο Cauchy).
- Μένει να δείξουμε ότι $f \in \mathcal{B}(I)$. Παίρνουμε $\varepsilon = 1$ και βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\|f_{n_0} - f\|_\infty \leq 1$.

Πληρότητα του $(\mathcal{B}(I), \|\cdot\|_\infty)$

- Θεωρούμε ένα διάστημα I και τον χώρο $\mathcal{B}(I)$ των φραγμένων συναρτήσεων $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ με νόρμα την $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in I\}$.

Θεώρημα

Έστω I διάστημα. Ο χώρος με νόρμα $(\mathcal{B}(I), \|\cdot\|_\infty)$ είναι πλήρης.

- Έστω (f_n) βασική ακολουθία στον $\mathcal{B}(I)$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $f \in \mathcal{B}(I)$ ώστε $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$.
- Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n, s \geq n_0$ τότε

$$\|f_n - f_s\|_\infty = \sup\{|f_n(x) - f_s(x)| : x \in I\} \leq \varepsilon.$$

- Στο προηγούμενο μάθημα είδαμε ότι υπάρχει $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ (κριτήριο Cauchy).
- Μένει να δείξουμε ότι $f \in \mathcal{B}(I)$. Παίρνουμε $\varepsilon = 1$ και βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\|f_{n_0} - f\|_\infty \leq 1$.
- Τότε, $f_{n_0}, f - f_{n_0} \in \mathcal{B}(I)$, άρα

$$f = f_{n_0} + (f - f_{n_0}) \in \mathcal{B}(I).$$

Πληρότητα του $(\mathcal{B}(I), \|\cdot\|_\infty)$

- Θεωρούμε ένα διάστημα I και τον χώρο $\mathcal{B}(I)$ των φραγμένων συναρτήσεων $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ με νόρμα την $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in I\}$.

Θεώρημα

Έστω I διάστημα. Ο χώρος με νόρμα $(\mathcal{B}(I), \|\cdot\|_\infty)$ είναι πλήρης.

- Έστω (f_n) βασική ακολουθία στον $\mathcal{B}(I)$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $f \in \mathcal{B}(I)$ ώστε $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$.
- Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n, s \geq n_0$ τότε

$$\|f_n - f_s\|_\infty = \sup\{|f_n(x) - f_s(x)| : x \in I\} \leq \varepsilon.$$

- Στο προηγούμενο μάθημα είδαμε ότι υπάρχει $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ (κριτήριο Cauchy).
- Μένει να δείξουμε ότι $f \in \mathcal{B}(I)$. Παίρνουμε $\varepsilon = 1$ και βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\|f_{n_0} - f\|_\infty \leq 1$.
- Τότε, $f_{n_0}, f - f_{n_0} \in \mathcal{B}(I)$, άρα

$$f = f_{n_0} + (f - f_{n_0}) \in \mathcal{B}(I).$$

- Πιο συγκεκριμένα, $\|f\|_\infty \leq \|f_{n_0}\|_\infty + \|f - f_{n_0}\|_\infty \leq \|f_{n_0}\|_\infty + 1 < +\infty$.

Πληρότητα του $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$

- Κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι φραγμένη, άρα ο χώρος $C[a, b]$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $B[a, b]$.

Πληρότητα του $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$

- Κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι φραγμένη, άρα ο χώρος $C[a, b]$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $B[a, b]$.
- Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο $(B[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ είναι πλήρης, μπορούμε να δείξουμε το εξής.

Πληρότητα του $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$

- Κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι φραγμένη, άρα ο χώρος $C[a, b]$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $B[a, b]$.
- Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο $(B[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ είναι πλήρης, μπορούμε να δείξουμε το εξής.

Θεώρημα

Ο χώρος $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ είναι πλήρης.

Πληρότητα του $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$

- Κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι φραγμένη, άρα ο χώρος $C[a, b]$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $B[a, b]$.
- Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο $(B[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ είναι πλήρης, μπορούμε να δείξουμε το εξής.

Θεώρημα

Ο χώρος $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ είναι πλήρης.

- Απόδειξη: Έστω (f_n) βασική ακολουθία στον $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$.

Πληρότητα του $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$

- Κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι φραγμένη, άρα ο χώρος $C[a, b]$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $B[a, b]$.
- Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο $(B[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ είναι πλήρης, μπορούμε να δείξουμε το εξής.

Θεώρημα

Ο χώρος $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ είναι πλήρης.

- Απόδειξη: Έστω (f_n) βασική ακολουθία στον $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$.
- Τότε, οι f_n ανήκουν στον $B[a, b]$ και η (f_n) είναι βασική ως προς την $\|\cdot\|_\infty$, άρα υπάρχει $f \in B[a, b]$ ώστε $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$.

Πληρότητα του $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$

- Κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι φραγμένη, άρα ο χώρος $C[a, b]$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $B[a, b]$.
- Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο $(B[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ είναι πλήρης, μπορούμε να δείξουμε το εξής.

Θεώρημα

Ο χώρος $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ είναι πλήρης.

- Απόδειξη: Έστω (f_n) βασική ακολουθία στον $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$.
- Τότε, οι f_n ανήκουν στον $B[a, b]$ και η (f_n) είναι βασική ως προς την $\|\cdot\|_\infty$, άρα υπάρχει $f \in B[a, b]$ ώστε $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$.
- Οι f_n είναι συνεχείς και $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα, άρα η f είναι συνεχής.

Πληρότητα του $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$

- Κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι φραγμένη, άρα ο χώρος $C[a, b]$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $B[a, b]$.
- Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο $(B[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ είναι πλήρης, μπορούμε να δείξουμε το εξής.

Θεώρημα

Ο χώρος $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ είναι πλήρης.

- Απόδειξη: Έστω (f_n) βασική ακολουθία στον $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$.
- Τότε, οι f_n ανήκουν στον $B[a, b]$ και η (f_n) είναι βασική ως προς την $\|\cdot\|_\infty$, άρα υπάρχει $f \in B[a, b]$ ώστε $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$.
- Οι f_n είναι συνεχείς και $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα, άρα η f είναι συνεχής.
- Συνεπώς, $f \in C[a, b]$ και $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$, το οποίο σημαίνει ότι η (f_n) είναι συγκλίνουσα στον $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$.

Ορισμός

Έστω I διάστημα και $f_k : I \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$.

Ορισμός

Έστω I διάστημα και $f_k : I \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τη συνάρτηση $s_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x).$$

Ορισμός

Έστω I διάστημα και $f_k : I \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τη συνάρτηση $s_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x).$$

Αν υπάρχει συνάρτηση $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $s_n \rightarrow s$ κατά σημείο στο I , τότε λέμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει κατά σημείο στην s στο I και γράφουμε

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} f_k.$$

Ορισμός

Έστω I διάστημα και $f_k : I \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τη συνάρτηση $s_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x).$$

Αν υπάρχει συνάρτηση $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $s_n \rightarrow s$ κατά σημείο στο I , τότε λέμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει κατά σημείο στην s στο I και γράφουμε

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} f_k.$$

Αν, επιπλέον, $s_n \rightarrow s$ ομοιόμορφα στο I , τότε λέμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην s στο I .

Ακολουθίες συναρτήσεων: κατά σημείο σύγκλιση

Πρόταση

Έστω $f_k : I \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην s στο I , τότε συγκλίνει κατά σημείο στην s στο I .

Ακολουθίες συναρτήσεων: κατά σημείο σύγκλιση

Πρόταση

Έστω $f_k : I \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην s στο I , τότε συγκλίνει κατά σημείο στην s στο I .

- Απόδειξη: Αρκεί να θυμηθούμε ότι αν $s_n \rightarrow s$ ομοιόμορφα τότε $s_n \rightarrow s$ κατά σημείο.

Ακολουθίες συναρτήσεων: κατά σημείο σύγκλιση

Πρόταση

Έστω $f_k : I \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην s στο I , τότε συγκλίνει κατά σημείο στην s στο I .

- Απόδειξη: Αρκεί να θυμηθούμε ότι αν $s_n \rightarrow s$ ομοιόμορφα τότε $s_n \rightarrow s$ κατά σημείο.

Πρόταση

Έστω $f_k, g_k : I \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ και $a, b \in \mathbb{R}$. Αν $\sum_{k=1}^{\infty} f_k = s$ και $\sum_{k=1}^{\infty} g_k = t$ ομοιόμορφα στο I , τότε $\sum_{k=1}^{\infty} (af_k + bg_k) = as + bt$ ομοιόμορφα στο I . Το ίδιο ισχύει για την κατά σημείο σύγκλιση.

Ακολουθίες συναρτήσεων: κατά σημείο σύγκλιση

Πρόταση

Έστω $f_k : I \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην s στο I , τότε συγκλίνει κατά σημείο στην s στο I .

- Απόδειξη: Αρκεί να θυμηθούμε ότι αν $s_n \rightarrow s$ ομοιόμορφα τότε $s_n \rightarrow s$ κατά σημείο.

Πρόταση

Έστω $f_k, g_k : I \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ και $a, b \in \mathbb{R}$. Αν $\sum_{k=1}^{\infty} f_k = s$ και $\sum_{k=1}^{\infty} g_k = t$ ομοιόμορφα στο I , τότε $\sum_{k=1}^{\infty} (af_k + bg_k) = as + bt$ ομοιόμορφα στο I . Το ίδιο ισχύει για την κατά σημείο σύγκλιση.

- Απόδειξη: Άμεση από τις αντίστοιχες προτάσεις για ακολουθίες συναρτήσεων.

Κριτήριο Cauchy

Έστω $f_k : I \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα (σε κάποια συνάρτηση) στο I αν και μόνον αν ισχύει το εξής: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n > m \geq n_0$ και για κάθε $x \in I$,

$$|f_{m+1}(x) + \cdots + f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Κριτήριο Cauchy

Έστω $f_k : I \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα (σε κάποια συνάρτηση) στο I αν και μόνον αν ισχύει το εξής: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n > m \geq n_0$ και για κάθε $x \in I$,

$$|f_{m+1}(x) + \cdots + f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

- Απόδειξη: Εφαρμόζουμε το κριτήριο Cauchy στην ακολουθία συναρτήσεων (s_n) .

Κριτήριο Cauchy

Έστω $f_k : I \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα (σε κάποια συνάρτηση) στο I αν και μόνον αν ισχύει το εξής: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n > m \geq n_0$ και για κάθε $x \in I$,

$$|f_{m+1}(x) + \cdots + f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

- Απόδειξη: Εφαρμόζουμε το κριτήριο Cauchy στην ακολουθία συναρτήσεων (s_n) .
- Παρατηρήστε ότι: αν $n > m$ τότε $s_n - s_m = f_{m+1} + \cdots + f_n$.

Κριτήριο Weierstrass

Έστω $f_k : I \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένες συναρτήσεις, $k \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι

$$\sup\{|f_k(x)| : x \in I\} \leq M_k, \quad k \in \mathbb{N}$$

δηλαδή ότι ο M_k είναι άνω φράγμα της $|f_k|$, και ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_k < +\infty.$$

Τότε, η $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο I .

Κριτήριο Weierstrass

- Απόδειξη: Παρατηρούμε πρώτα ότι, για κάθε $x \in I$ η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ συγκλίνει απολύτως, αφού

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} M_k < +\infty.$$

Κριτήριο Weierstrass

- Απόδειξη: Παρατηρούμε πρώτα ότι, για κάθε $x \in I$ η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ συγκλίνει απολύτως, αφού

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} M_k < +\infty.$$

- Συνεπώς, η σειρά συναρτήσεων $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει κατά σημείο στο I .

Κριτήριο Weierstrass

- Απόδειξη: Παρατηρούμε πρώτα ότι, για κάθε $x \in I$ η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ συγκλίνει απολύτως, αφού

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} M_k < +\infty.$$

- Συνεπώς, η σειρά συναρτήσεων $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει κατά σημείο στο I .
- Θέτουμε $s = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in I$ έχουμε

$$\begin{aligned} |s(x) - s_n(x)| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k. \end{aligned}$$

Κριτήριο Weierstrass

- Απόδειξη: Παρατηρούμε πρώτα ότι, για κάθε $x \in I$ η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ συγκλίνει απολύτως, αφού

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} M_k < +\infty.$$

- Συνεπώς, η σειρά συναρτήσεων $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει κατά σημείο στο I .
- Θέτουμε $s = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in I$ έχουμε

$$\begin{aligned} |s(x) - s_n(x)| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k. \end{aligned}$$

Από την $\sum_{k=1}^{\infty} M_k < +\infty$ έχουμε

$$\|s - s_n\|_{\infty} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k \rightarrow 0$$

όταν $n \rightarrow \infty$.

Κριτήριο Weierstrass

- Απόδειξη: Παρατηρούμε πρώτα ότι, για κάθε $x \in I$ η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ συγκλίνει απολύτως, αφού

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} M_k < +\infty.$$

- Συνεπώς, η σειρά συναρτήσεων $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει κατά σημείο στο I .
- Θέτουμε $s = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in I$ έχουμε

$$\begin{aligned} |s(x) - s_n(x)| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k. \end{aligned}$$

Από την $\sum_{k=1}^{\infty} M_k < +\infty$ έχουμε

$$\|s - s_n\|_{\infty} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k \rightarrow 0$$

όταν $n \rightarrow \infty$.

- Άρα, η σύγκλιση της σειράς $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ είναι ομοιόμορφη.

Παράδειγμα

Έστω $\alpha > 1/2$. Αποδείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k^{\alpha}(1+kx^2)}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα

Έστω $\alpha > 1/2$. Αποδείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k^{\alpha}(1+kx^2)}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

- Θεωρούμε τη συνάρτηση $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_k(x) = \frac{x}{k^{\alpha}(1+kx^2)}$.

Παράδειγμα

Έστω $\alpha > 1/2$. Αποδείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k^{\alpha}(1+kx^2)}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

- Θεωρούμε τη συνάρτηση $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_k(x) = \frac{x}{k^{\alpha}(1+kx^2)}$.
- Παραγωγίζοντας βλέπουμε ότι $f'_k(x) = \frac{1-kx^2}{k^{\alpha}(1+kx^2)^2}$.

Ακολουθίες συναρτήσεων: κατά σημείο σύγκλιση

Παράδειγμα

Έστω $\alpha > 1/2$. Αποδείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k^{\alpha}(1+kx^2)}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

- Θεωρούμε τη συνάρτηση $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_k(x) = \frac{x}{k^{\alpha}(1+kx^2)}$.
- Παραγωγίζοντας βλέπουμε ότι $f'_k(x) = \frac{1-kx^2}{k^{\alpha}(1+kx^2)^2}$.
- Η f_k παίρνει μέγιστη τιμή στο $[0, \infty)$ όταν $x = \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Ακολουθίες συναρτήσεων: κατά σημείο σύγκλιση

Παράδειγμα

Έστω $\alpha > 1/2$. Αποδείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k^{\alpha}(1+kx^2)}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

- Θεωρούμε τη συνάρτηση $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_k(x) = \frac{x}{k^{\alpha}(1+kx^2)}$.
- Παραγωγίζοντας βλέπουμε ότι $f'_k(x) = \frac{1-kx^2}{k^{\alpha}(1+kx^2)^2}$.
- Η f_k παίρνει μέγιστη τιμή στο $[0, \infty)$ όταν $x = \frac{1}{\sqrt{k}}$.
- Αφού η f_k είναι περιττή συνάρτηση, συμπεραίνουμε ότι $\|f_k\|_{\infty} = f_k\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) = \frac{1}{2k^{\alpha+\frac{1}{2}}}$.

Παράδειγμα

Έστω $\alpha > 1/2$. Αποδείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k^{\alpha}(1+kx^2)}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

- Θεωρούμε τη συνάρτηση $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_k(x) = \frac{x}{k^{\alpha}(1+kx^2)}$.
- Παραγωγίζοντας βλέπουμε ότι $f'_k(x) = \frac{1-kx^2}{k^{\alpha}(1+kx^2)^2}$.
- Η f_k παίρνει μέγιστη τιμή στο $[0, \infty)$ όταν $x = \frac{1}{\sqrt{k}}$.
- Αφού η f_k είναι περιττή συνάρτηση, συμπεραίνουμε ότι $\|f_k\|_{\infty} = f_k\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) = \frac{1}{2k^{\alpha+\frac{1}{2}}}$.
- Από την υπόθεση για το α έχουμε $\alpha + \frac{1}{2} > 1$, άρα η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{\infty} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^{\alpha+\frac{1}{2}}}$ συγκλίνει.

Παράδειγμα

Έστω $\alpha > 1/2$. Αποδείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k^{\alpha}(1+kx^2)}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

- Θεωρούμε τη συνάρτηση $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_k(x) = \frac{x}{k^{\alpha}(1+kx^2)}$.
- Παραγωγίζοντας βλέπουμε ότι $f'_k(x) = \frac{1-kx^2}{k^{\alpha}(1+kx^2)^2}$.
- Η f_k παίρνει μέγιστη τιμή στο $[0, \infty)$ όταν $x = \frac{1}{\sqrt{k}}$.
- Αφού η f_k είναι περιττή συνάρτηση, συμπεραίνουμε ότι $\|f_k\|_{\infty} = f_k\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) = \frac{1}{2k^{\alpha+\frac{1}{2}}}$.
- Από την υπόθεση για το α έχουμε $\alpha + \frac{1}{2} > 1$, άρα η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{\infty} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^{\alpha+\frac{1}{2}}}$ συγκλίνει.
- Από το κριτήριο του Weierstrass έπεται ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}(1+kx^2)}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

Ομοιόμορφη σύγκλιση σειρών συναρτήσεων

- Τα επόμενα τρία θεωρήματα προκύπτουν άμεσα από τα αντίστοιχα θεωρήματα για ακολουθίες συναρτήσεων.

Ομοιόμορφη σύγκλιση σειρών συναρτήσεων

- Τα επόμενα τρία θεωρήματα προκύπτουν άμεσα από τα αντίστοιχα θεωρήματα για ακολουθίες συναρτήσεων.

Θεώρημα

Έστω I διάστημα, $f, f_k : I \rightarrow \mathbb{R}$ και $x_0 \in I$. Υποθέτουμε ότι:

- ❶ η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο I , και
- ❷ κάθε f_k είναι συνεχές στο x_0 .

Τότε, η f είναι κι αυτή συνεχής στο x_0 .

Ομοιόμορφη σύγκλιση σειρών συναρτήσεων

- Τα επόμενα τρία θεωρήματα προκύπτουν άμεσα από τα αντίστοιχα θεωρήματα για ακολουθίες συναρτήσεων.

Θεώρημα

Έστω I διάστημα, $f, f_k : I \rightarrow \mathbb{R}$ και $x_0 \in I$. Υποθέτουμε ότι:

- ❶ η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο I , και
- ❷ κάθε f_k είναι συνεχής στο x_0 .

Τότε, η f είναι κι αυτή συνεχής στο x_0 . Ειδικότερα, αν κάθε f_k είναι συνεχής στο I , τότε η f είναι συνεχής στο I .

Ομοιόμορφη σύγκλιση σειρών συναρτήσεων

- Τα επόμενα τρία θεωρήματα προκύπτουν άμεσα από τα αντίστοιχα θεωρήματα για ακολουθίες συναρτήσεων.

Θεώρημα

Έστω I διάστημα, $f, f_k : I \rightarrow \mathbb{R}$ και $x_0 \in I$. Υποθέτουμε ότι:

- ❶ η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο I , και
- ❷ κάθε f_k είναι συνεχής στο x_0 .

Τότε, η f είναι κι αυτή συνεχής στο x_0 . Ειδικότερα, αν κάθε f_k είναι συνεχής στο I , τότε η f είναι συνεχής στο I .

Θεώρημα

Έστω (f_k) ακολουθία συναρτήσεων που είναι ορισμένες σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$. Υποθέτουμε ότι κάθε $f_k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι Riemann-ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο $[a, b]$. Τότε, η f είναι Riemann-ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x) dx.$$

Ομοιόμορφη σύγκλιση σειρών συναρτήσεων

Θεώρημα

Έστω $f_k, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι κάθε f_k είναι παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και ότι η παράγωγός της, f'_k , είναι συνεχής στο $[a, b]$. Υποθέτουμε επίσης ότι:

- 1 η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f'_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην g στο $[a, b]$, και
- 2 υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ ώστε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ να συγκλίνει σε κάποιον $\xi \in \mathbb{R}$.

Θεώρημα

Έστω $f_k, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι κάθε f_k είναι παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και ότι η παράγωγός της, f'_k , είναι συνεχής στο $[a, b]$. Υποθέτουμε επίσης ότι:

- 1 η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f'_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην g στο $[a, b]$, και
- 2 υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ ώστε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ να συγκλίνει σε κάποιον $\xi \in \mathbb{R}$.

Τότε, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, η f είναι παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και $f' \equiv g$.

Ομοιόμορφη σύγκλιση σειρών συναρτήσεων

Θεώρημα

Έστω $f_k, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι κάθε f_k είναι παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και ότι η παράγωγός της, f'_k , είναι συνεχής στο $[a, b]$. Υποθέτουμε επίσης ότι:

- 1 η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f'_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην g στο $[a, b]$, και
- 2 υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ ώστε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ να συγκλίνει σε κάποιον $\xi \in \mathbb{R}$.

Τότε, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, η f είναι παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και $f' \equiv g$. Δηλαδή,

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k.$$