

Αρμονική Ανάλυση

Μάθημα 3

Φεβρουάριος 2024

Ακολουθίες συναρτήσεων: κατά σημείο σύγκλιση

- Έστω I διάστημα στο $\mathbb{R}$ και $f_n, f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Ακολουθίες συναρτήσεων: κατά σημείο σύγκλιση

- Έστω I διάστημα στο $\mathbb{R}$ και $f_n, f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.
- Λέμε ότι η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) συγκλίνει κατά σημείο στη συνάρτηση f αν για κάθε $x \in I$ ισχύει

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Γράφουμε τότε ότι $f_n \rightarrow f$ κατά σημείο ή ακόμη ότι $f_n(x) \rightarrow f(x)$ για κάθε $x \in I$.

Ακολουθίες συναρτήσεων: κατά σημείο σύγκλιση

- Έστω I διάστημα στο $\mathbb{R}$ και $f_n, f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.
- Λέμε ότι η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) συγκλίνει κατά σημείο στη συνάρτηση f αν για κάθε $x \in I$ ισχύει

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Γράφουμε τότε ότι $f_n \rightarrow f$ κατά σημείο ή ακόμη ότι $f_n(x) \rightarrow f(x)$ για κάθε $x \in I$.

Κατά σημείο σύγκλιση και πράξεις

Έστω I διάστημα στο $\mathbb{R}$, $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ και $(f_n), (g_n)$ ακολουθίες συναρτήσεων από το I στο $\mathbb{R}$.

Ακολουθίες συναρτήσεων: κατά σημείο σύγκλιση

- Έστω I διάστημα στο $\mathbb{R}$ και $f_n, f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.
- Λέμε ότι η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) συγκλίνει κατά σημείο στη συνάρτηση f αν για κάθε $x \in I$ ισχύει

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Γράφουμε τότε ότι $f_n \rightarrow f$ κατά σημείο ή ακόμη ότι $f_n(x) \rightarrow f(x)$ για κάθε $x \in I$.

Κατά σημείο σύγκλιση και πράξεις

Έστω I διάστημα στο $\mathbb{R}$, $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ και $(f_n), (g_n)$ ακολουθίες συναρτήσεων από το I στο $\mathbb{R}$. Αν $f_n \rightarrow f$ κατά σημείο και $g_n \rightarrow g$ κατά σημείο, τότε: (i) για κάθε $t, s \in \mathbb{R}$ ισχύει $tf_n + sg_n \rightarrow tf + sg$ κατά σημείο, και (ii) $f_n g_n \rightarrow fg$ κατά σημείο.

Ακολουθίες συναρτήσεων: κατά σημείο σύγκλιση

- Έστω I διάστημα στο $\mathbb{R}$ και $f_n, f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.
- Λέμε ότι η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) συγκλίνει κατά σημείο στη συνάρτηση f αν για κάθε $x \in I$ ισχύει

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Γράφουμε τότε ότι $f_n \rightarrow f$ κατά σημείο ή ακόμη ότι $f_n(x) \rightarrow f(x)$ για κάθε $x \in I$.

Κατά σημείο σύγκλιση και πράξεις

Έστω I διάστημα στο $\mathbb{R}$, $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ και $(f_n), (g_n)$ ακολουθίες συναρτήσεων από το I στο $\mathbb{R}$. Αν $f_n \rightarrow f$ κατά σημείο και $g_n \rightarrow g$ κατά σημείο, τότε: (i) για κάθε $t, s \in \mathbb{R}$ ισχύει $tf_n + sg_n \rightarrow tf + sg$ κατά σημείο, και (ii) $f_n g_n \rightarrow fg$ κατά σημείο. Πράγματι, για κάθε $x \in I$ έχουμε

$$(tf_n + sg_n)(x) = tf_n(x) + sg_n(x) \rightarrow tf(x) + sg(x) = (tf + sg)(x)$$

και

$$(f_n g_n)(x) = f_n(x)g_n(x) \rightarrow f(x)g(x) = (fg)(x),$$

από τις αντίστοιχες ιδιότητες των ορίων ακολουθιών πραγματικών αριθμών.

Κατά σημείο σύγκλιση και συνέχεια

Η κατά σημείο σύγκλιση είναι ασθενής: δεν συμπεριφέρεται πάντοτε καλά σε σχέση με τη συνέχεια, το ολοκλήρωμα, την παραγωγή και την εναλλαγή ορίων.

Κατά σημείο σύγκλιση και συνέχεια

Η κατά σημείο σύγκλιση είναι ασθενής: δεν συμπεριφέρεται πάντοτε καλά σε σχέση με τη συνέχεια, το ολοκλήρωμα, την παραγωγή και την εναλλαγή ορίων.

Πρόβλημα 1: Έστω $f_n, f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $f_n \rightarrow f$ κατά σημείο και κάθε f_n είναι συνεχής συνάρτηση, είναι σωστό ότι η f είναι συνεχής;

Κατά σημείο σύγκλιση και συνέχεια

Η κατά σημείο σύγκλιση είναι ασθενής: δεν συμπεριφέρεται πάντοτε καλά σε σχέση με τη συνέχεια, το ολοκλήρωμα, την παραγωγή και την εναλλαγή ορίων.

Πρόβλημα 1: Έστω $f_n, f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $f_n \rightarrow f$ κατά σημείο και κάθε f_n είναι συνεχής συνάρτηση, είναι σωστό ότι η f είναι συνεχής;

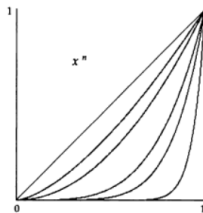
- Η απάντηση είναι αρνητική: ένα παράδειγμα μας δίνει η ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = x^n$.

Κατά σημείο σύγκλιση και συνέχεια

Η κατά σημείο σύγκλιση είναι ασθενής: δεν συμπεριφέρεται πάντοτε καλά σε σχέση με τη συνέχεια, το ολοκλήρωμα, την παραγωγή και την εναλλαγή ορίων.

Πρόβλημα 1: Έστω $f_n, f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $f_n \rightarrow f$ κατά σημείο και κάθε f_n είναι συνεχής συνάρτηση, είναι σωστό ότι η f είναι συνεχής;

- Η απάντηση είναι αρνητική: ένα παράδειγμα μας δίνει η ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = x^n$.

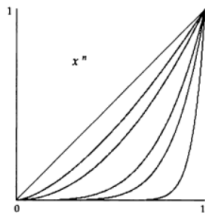


Κατά σημείο σύγκλιση και συνέχεια

Η κατά σημείο σύγκλιση είναι ασθενής: δεν συμπεριφέρεται πάντοτε καλά σε σχέση με τη συνέχεια, το ολοκλήρωμα, την παραγωγή και την εναλλαγή ορίων.

Πρόβλημα 1: Έστω $f_n, f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $f_n \rightarrow f$ κατά σημείο και κάθε f_n είναι συνεχής συνάρτηση, είναι σωστό ότι η f είναι συνεχής;

- Η απάντηση είναι αρνητική: ένα παράδειγμα μας δίνει η ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = x^n$.



- Εύκολα ελέγχουμε ότι $f_n \rightarrow f$ κατά σημείο, όπου η $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ορίζεται από την

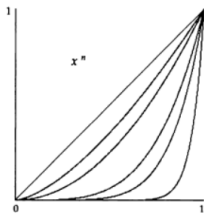
$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Κατά σημείο σύγκλιση και συνέχεια

Η κατά σημείο σύγκλιση είναι ασθενής: δεν συμπεριφέρεται πάντοτε καλά σε σχέση με τη συνέχεια, το ολοκλήρωμα, την παραγωγή και την εναλλαγή ορίων.

Πρόβλημα 1: Έστω $f_n, f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $f_n \rightarrow f$ κατά σημείο και κάθε f_n είναι συνεχής συνάρτηση, είναι σωστό ότι η f είναι συνεχής;

- Η απάντηση είναι αρνητική: ένα παράδειγμα μας δίνει η ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = x^n$.



- Εύκολα ελέγχουμε ότι $f_n \rightarrow f$ κατά σημείο, όπου η $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ορίζεται από την

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

- Παρατηρήστε ότι η f είναι ασυνεχής στο σημείο $x_0 = 1$.

Κατά σημείο σύγκλιση και συνέχεια

- Μπορούμε μάλιστα να δώσουμε παράδειγμα ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων η οποία συγκλίνει σε συνάρτηση με άπειρα το πλήθος σημεία ασυνέχειας.

Κατά σημείο σύγκλιση και συνέχεια

- Μπορούμε μάλιστα να δώσουμε παράδειγμα ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων η οποία συγκλίνει σε συνάρτηση με άπειρα το πλήθος σημεία ασυνέχειας.
- Θεωρούμε το σύνολο $A = \{1/k : k = 1, 2, \dots\}$ και, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε συνάρτηση $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ως εξής: με κέντρο καθένα από τα σημεία $1/k$, $k = 1, \dots, n$ θεωρούμε το διάστημα $I_{n,k} = \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{3n(n+1)}, \frac{1}{k} + \frac{1}{3n(n+1)} \right]$ και ορίζουμε την f_n να είναι «τριγωνική» σε κάθε $I_{n,k}$ ώστε στο σημείο $1/k$ να παίρνει την τιμή 1 και $f_n(x) = 0$ αν $x \notin \bigcup_{k=1}^n I_{n,k}$.

Κατά σημείο σύγκλιση και συνέχεια

- Μπορούμε μάλιστα να δώσουμε παράδειγμα ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων η οποία συγκλίνει σε συνάρτηση με άπειρα το πλήθος σημεία ασυνέχειας.
- Θεωρούμε το σύνολο $A = \{1/k : k = 1, 2, \dots\}$ και, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε συνάρτηση $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ως εξής: με κέντρο καθένα από τα σημεία $1/k$, $k = 1, \dots, n$ θεωρούμε το διάστημα $I_{n,k} = \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{3n(n+1)}, \frac{1}{k} + \frac{1}{3n(n+1)} \right]$ και ορίζουμε την f_n να είναι «τριγωνική» σε κάθε $I_{n,k}$ ώστε στο σημείο $1/k$ να παίρνει την τιμή 1 και $f_n(x) = 0$ αν $x \notin \bigcup_{k=1}^n I_{n,k}$.
- Τότε, κάθε f_n είναι συνεχής και συγκλίνει (κατά σημείο) στη συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in [0, 1] \setminus A \end{cases}$$

η οποία είναι ασυνεχής σε κάθε σημείο του A .

Πρόβλημα 2: Έστω $f_n, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $f_n \rightarrow f$ κατά σημείο, και κάθε f_n είναι Riemann-ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, είναι σωστό ότι η f είναι Riemann-ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και ότι

$$\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx;$$

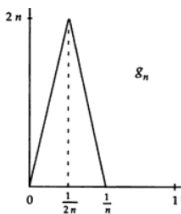
Πρόβλημα 2: Έστω $f_n, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $f_n \rightarrow f$ κατά σημείο, και κάθε f_n είναι Riemann-ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, είναι σωστό ότι η f είναι Riemann-ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και ότι

$$\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx;$$

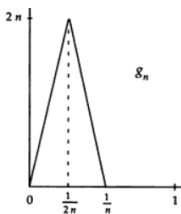
- Η απάντηση είναι αρνητική: για παράδειγμα, θεωρούμε την ακολουθία των συνεχών συναρτήσεων $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = \begin{cases} 4n^2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ -4n^2\left(x - \frac{1}{n}\right), & \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Κατά σημείο σύγκλιση και ολοκλήρωμα

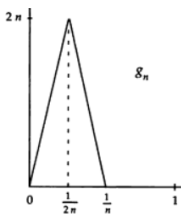


Κατά σημείο σύγκλιση και ολοκλήρωμα



- Εύκολα ελέγχουμε ότι $f_n \rightarrow f \equiv 0$ κατά σημείο.

Κατά σημείο σύγκλιση και ολοκλήρωμα



- Εύκολα ελέγχουμε ότι $f_n \rightarrow f \equiv 0$ κατά σημείο.
- Όμως,

$$\int_0^1 f_n(x) dx = 1 \not\rightarrow 0 \int_0^1 f(x) dx.$$

Κατά σημείο σύγκλιση και ολοκλήρωμα

- Ένα άλλο παράδειγμα μας δίνει η ακολουθία των συναρτήσεων $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = n^2 x(1-x)^n$.

Κατά σημείο σύγκλιση και ολοκλήρωμα

- Ένα άλλο παράδειγμα μας δίνει η ακολουθία των συναρτήσεων $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = n^2 x(1-x)^n$.
- Αν $x = 0$ τότε $f_n(0) = 0 \rightarrow 0$.

Κατά σημείο σύγκλιση και ολοκλήρωμα

- Ένα άλλο παράδειγμα μας δίνει η ακολουθία των συναρτήσεων $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = n^2 x(1-x)^n$.
- Αν $x = 0$ τότε $f_n(0) = 0 \rightarrow 0$.
- Όμοια, αν $x = 1$ τότε $f_n(1) = 0 \rightarrow 0$.

Κατά σημείο σύγκλιση και ολοκλήρωμα

- Ένα άλλο παράδειγμα μας δίνει η ακολουθία των συναρτήσεων $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = n^2 x(1-x)^n$.
- Αν $x = 0$ τότε $f_n(0) = 0 \rightarrow 0$.
- Όμοια, αν $x = 1$ τότε $f_n(1) = 0 \rightarrow 0$.
- Στην περίπτωση $0 < x < 1$ εφαρμόζουμε το κριτήριο του λόγου:

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{(n+1)^2 x(1-x)^{n+1}}{n^2 x(1-x)^n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} (1-x) \rightarrow 1-x < 1.$$

Συνεπώς, $f_n(x) \rightarrow 0$ όταν $n \rightarrow \infty$.

Κατά σημείο σύγκλιση και ολοκλήρωμα

- Ένα άλλο παράδειγμα μας δίνει η ακολουθία των συναρτήσεων $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = n^2 x(1-x)^n$.
- Αν $x = 0$ τότε $f_n(0) = 0 \rightarrow 0$.
- Όμοια, αν $x = 1$ τότε $f_n(1) = 0 \rightarrow 0$.
- Στην περίπτωση $0 < x < 1$ εφαρμόζουμε το κριτήριο του λόγου:

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{(n+1)^2 x(1-x)^{n+1}}{n^2 x(1-x)^n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} (1-x) \rightarrow 1-x < 1.$$

Συνεπώς, $f_n(x) \rightarrow 0$ όταν $n \rightarrow \infty$.

- Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι $f_n \rightarrow f \equiv 0$ κατά σημείο.

Κατά σημείο σύγκλιση και ολοκλήρωμα

- Ένα άλλο παράδειγμα μας δίνει η ακολουθία των συναρτήσεων $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = n^2 x(1-x)^n$.
- Αν $x = 0$ τότε $f_n(0) = 0 \rightarrow 0$.
- Όμοια, αν $x = 1$ τότε $f_n(1) = 0 \rightarrow 0$.
- Στην περίπτωση $0 < x < 1$ εφαρμόζουμε το κριτήριο του λόγου:

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{(n+1)^2 x(1-x)^{n+1}}{n^2 x(1-x)^n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} (1-x) \rightarrow 1-x < 1.$$

Συνεπώς, $f_n(x) \rightarrow 0$ όταν $n \rightarrow \infty$.

- Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι $f_n \rightarrow f \equiv 0$ κατά σημείο.
- Όμως,

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(x) dx &= n^2 \int_0^1 x(1-x)^n dx = n^2 \int_0^1 (1-t)t^n dt = n^2 \int_0^1 (t^n - t^{n+1}) dt \\ &= n^2 \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \rightarrow 1. \end{aligned}$$

Κατά σημείο σύγκλιση και ολοκλήρωμα

- Ένα άλλο παράδειγμα μας δίνει η ακολουθία των συναρτήσεων $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = n^2 x(1-x)^n$.
- Αν $x = 0$ τότε $f_n(0) = 0 \rightarrow 0$.
- Όμοια, αν $x = 1$ τότε $f_n(1) = 0 \rightarrow 0$.
- Στην περίπτωση $0 < x < 1$ εφαρμόζουμε το κριτήριο του λόγου:

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{(n+1)^2 x(1-x)^{n+1}}{n^2 x(1-x)^n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} (1-x) \rightarrow 1-x < 1.$$

Συνεπώς, $f_n(x) \rightarrow 0$ όταν $n \rightarrow \infty$.

- Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι $f_n \rightarrow f \equiv 0$ κατά σημείο.
- Όμως,

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(x) dx &= n^2 \int_0^1 x(1-x)^n dx = n^2 \int_0^1 (1-t)t^n dt = n^2 \int_0^1 (t^n - t^{n+1}) dt \\ &= n^2 \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \rightarrow 1. \end{aligned}$$

- Συνεπώς,

$$\int_0^1 f_n(x) dx \rightarrow 1 \neq 0 = \int_0^1 f(x) dx.$$

Κατά σημείο σύγκλιση και παράγωγος

Πρόβλημα 3: Έστω I διάστημα στο $\mathbb{R}$ και $f_n, f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $f_n \rightarrow f$ κατά σημείο και κάθε f_n είναι παραγωγίσιμη στο I , είναι σωστό ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο I και ότι $f'_n \rightarrow f'$ κατά σημείο;

Κατά σημείο σύγκλιση και παράγωγος

Πρόβλημα 3: Έστω I διάστημα στο $\mathbb{R}$ και $f_n, f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $f_n \rightarrow f$ κατά σημείο και κάθε f_n είναι παραγωγίσιμη στο I , είναι σωστό ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο I και ότι $f'_n \rightarrow f'$ κατά σημείο;

Όπως δείχνουν τα επόμενα παραδείγματα, η απάντηση είναι αρνητική:

Κατά σημείο σύγκλιση και παράγωγος

Πρόβλημα 3: Έστω I διάστημα στο $\mathbb{R}$ και $f_n, f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $f_n \rightarrow f$ κατά σημείο και κάθε f_n είναι παραγωγίσιμη στο I , είναι σωστό ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο I και ότι $f'_n \rightarrow f'$ κατά σημείο;

Όπως δείχνουν τα επόμενα παραδείγματα, η απάντηση είναι αρνητική:

- (α) Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων (f_n) , όπου η $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ορίζεται από την $f_n(x) = \frac{x}{1+nx}$.

Κατά σημείο σύγκλιση και παράγωγος

Πρόβλημα 3: Έστω I διάστημα στο $\mathbb{R}$ και $f_n, f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $f_n \rightarrow f$ κατά σημείο και κάθε f_n είναι παραγωγίσιμη στο I , είναι σωστό ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο I και ότι $f'_n \rightarrow f'$ κατά σημείο;

Όπως δείχνουν τα επόμενα παραδείγματα, η απάντηση είναι αρνητική:

- (α) Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων (f_n) , όπου η $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ορίζεται από την $f_n(x) = \frac{x}{1+nx}$.
- Τότε: (i) αν $x = 0$ έχουμε $f_n(0) = 0 \rightarrow 0$ και (ii) αν $x > 0$ έχουμε

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx} = \frac{1}{n} \frac{x}{\frac{1}{n} + x} \rightarrow 0.$$

Κατά σημείο σύγκλιση και παράγωγος

Πρόβλημα 3: Έστω I διάστημα στο $\mathbb{R}$ και $f_n, f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $f_n \rightarrow f$ κατά σημείο και κάθε f_n είναι παραγωγίσιμη στο I , είναι σωστό ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο I και ότι $f'_n \rightarrow f'$ κατά σημείο;

Όπως δείχνουν τα επόμενα παραδείγματα, η απάντηση είναι αρνητική:

- (α) Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων (f_n) , όπου η $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ορίζεται από την $f_n(x) = \frac{x}{1+nx}$.
- Τότε: (i) αν $x = 0$ έχουμε $f_n(0) = 0 \rightarrow 0$ και (ii) αν $x > 0$ έχουμε

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx} = \frac{1}{n} \frac{x}{\frac{1}{n} + x} \rightarrow 0.$$

- Άρα, $f_n(x) \rightarrow 0$ για κάθε $x \in [0, \infty)$. Συνεπώς, $f_n \rightarrow f \equiv 0$ κατά σημείο.

Κατά σημείο σύγκλιση και παράγωγος

Πρόβλημα 3: Έστω I διάστημα στο $\mathbb{R}$ και $f_n, f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $f_n \rightarrow f$ κατά σημείο και κάθε f_n είναι παραγωγίσιμη στο I , είναι σωστό ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο I και ότι $f'_n \rightarrow f'$ κατά σημείο;

Όπως δείχνουν τα επόμενα παραδείγματα, η απάντηση είναι αρνητική:

- (α) Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων (f_n) , όπου η $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ορίζεται από την $f_n(x) = \frac{x}{1+nx}$.
- Τότε: (i) αν $x = 0$ έχουμε $f_n(0) = 0 \rightarrow 0$ και (ii) αν $x > 0$ έχουμε

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx} = \frac{1}{n} \frac{x}{\frac{1}{n} + x} \rightarrow 0.$$

- Άρα, $f_n(x) \rightarrow 0$ για κάθε $x \in [0, \infty)$. Συνεπώς, $f_n \rightarrow f \equiv 0$ κατά σημείο.
- Όμως, $f'_n(x) = \frac{1}{(1+nx)^2}$ και για $x = 0$ έχουμε $f'_n(0) = 1 \rightarrow 1$, ενώ για $x > 0$ ισχύει ότι $f'_n(x) \rightarrow 0$.

Κατά σημείο σύγκλιση και παράγωγος

Πρόβλημα 3: Έστω I διάστημα στο $\mathbb{R}$ και $f_n, f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $f_n \rightarrow f$ κατά σημείο και κάθε f_n είναι παραγωγίσιμη στο I , είναι σωστό ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο I και ότι $f'_n \rightarrow f'$ κατά σημείο;

Όπως δείχνουν τα επόμενα παραδείγματα, η απάντηση είναι αρνητική:

- (α) Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων (f_n) , όπου η $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ορίζεται από την $f_n(x) = \frac{x}{1+nx}$.
- Τότε: (i) αν $x = 0$ έχουμε $f_n(0) = 0 \rightarrow 0$ και (ii) αν $x > 0$ έχουμε

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx} = \frac{1}{n} \frac{x}{\frac{1}{n} + x} \rightarrow 0.$$

- Άρα, $f_n(x) \rightarrow 0$ για κάθε $x \in [0, \infty)$. Συνεπώς, $f_n \rightarrow f \equiv 0$ κατά σημείο.
- Όμως, $f'_n(x) = \frac{1}{(1+nx)^2}$ και για $x = 0$ έχουμε $f'_n(0) = 1 \rightarrow 1$, ενώ για $x > 0$ ισχύει ότι $f'_n(x) \rightarrow 0$.
- Δηλαδή, η (f'_n) δεν συγκλίνει κατά σημείο στην $f' \equiv 0$.

Κατά σημείο σύγκλιση και παράγωγος

- (β) Θεωρούμε την ακολουθία των συναρτήσεων $f_n : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$.

Κατά σημείο σύγκλιση και παράγωγος

- (β) Θεωρούμε την ακολουθία των συναρτήσεων $f_n : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$.
- Παρατηρούμε ότι, για κάθε $x \in (0, \pi)$ ισχύει $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$. Άρα, $f_n \rightarrow 0$ κατά σημείο.

Κατά σημείο σύγκλιση και παράγωγος

- (β) Θεωρούμε την ακολουθία των συναρτήσεων $f_n : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$.
- Παρατηρούμε ότι, για κάθε $x \in (0, \pi)$ ισχύει $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$. Άρα, $f_n \rightarrow 0$ κατά σημείο.
- Όμως, η ακολουθία $f'_n : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'_n(x) = \cos nx$ δεν συγκλίνει για καμία τιμή του $x \in (0, \pi)$.

Κατά σημείο σύγκλιση και παράγωγος

- (β) Θεωρούμε την ακολουθία των συναρτήσεων $f_n : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$.
- Παρατηρούμε ότι, για κάθε $x \in (0, \pi)$ ισχύει $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$. Άρα, $f_n \rightarrow 0$ κατά σημείο.
- Όμως, η ακολουθία $f'_n : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'_n(x) = \cos nx$ δεν συγκλίνει για καμία τιμή του $x \in (0, \pi)$.
- Πράγματι: αν υπάρχει $x \in (0, \pi)$ ώστε $\cos nx \rightarrow \alpha \in \mathbb{R}$, τότε $\cos(3nx) \rightarrow \alpha$. Από την ταυτότητα

$$\cos(3nx) = 4\cos^3(nx) - 3\cos(nx)$$

βλέπουμε ότι $\alpha = 4\alpha^3 - 3\alpha$. Συνεπώς, $\alpha = 0$ ή $\alpha^2 = 1$.

Κατά σημείο σύγκλιση και παράγωγος

- (β) Θεωρούμε την ακολουθία των συναρτήσεων $f_n : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$.
- Παρατηρούμε ότι, για κάθε $x \in (0, \pi)$ ισχύει $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$. Άρα, $f_n \rightarrow 0$ κατά σημείο.
- Όμως, η ακολουθία $f'_n : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'_n(x) = \cos nx$ δεν συγκλίνει για καμία τιμή του $x \in (0, \pi)$.
- Πράγματι: αν υπάρχει $x \in (0, \pi)$ ώστε $\cos nx \rightarrow \alpha \in \mathbb{R}$, τότε $\cos(3nx) \rightarrow \alpha$. Από την ταυτότητα

$$\cos(3nx) = 4\cos^3(nx) - 3\cos(nx)$$

βλέπουμε ότι $\alpha = 4\alpha^3 - 3\alpha$. Συνεπώς, $\alpha = 0$ ή $\alpha^2 = 1$.

- Αν $\alpha = 0$ τότε από την ταυτότητα $\sin^2(nx) + \cos^2(nx) = 1$ συμπεραίνουμε ότι $\sin^2(nx) \rightarrow 1$.

Κατά σημείο σύγκλιση και παράγωγος

- (β) Θεωρούμε την ακολουθία των συναρτήσεων $f_n : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$.
- Παρατηρούμε ότι, για κάθε $x \in (0, \pi)$ ισχύει $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$. Άρα, $f_n \rightarrow 0$ κατά σημείο.
- Όμως, η ακολουθία $f'_n : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'_n(x) = \cos nx$ δεν συγκλίνει για καμία τιμή του $x \in (0, \pi)$.
- Πράγματι: αν υπάρχει $x \in (0, \pi)$ ώστε $\cos nx \rightarrow \alpha \in \mathbb{R}$, τότε $\cos(3nx) \rightarrow \alpha$. Από την ταυτότητα

$$\cos(3nx) = 4\cos^3(nx) - 3\cos(nx)$$

βλέπουμε ότι $\alpha = 4\alpha^3 - 3\alpha$. Συνεπώς, $\alpha = 0$ ή $\alpha^2 = 1$.

- Αν $\alpha = 0$ τότε από την ταυτότητα $\sin^2(nx) + \cos^2(nx) = 1$ συμπεραίνουμε ότι $\sin^2(nx) \rightarrow 1$. Όμως,

$$\sin^2(nx) = \frac{1 - \cos(2nx)}{2}$$

οπότε $\cos(2nx) \rightarrow -1$, άτοπο.

Κατά σημείο σύγκλιση και παράγωγος

- (β) Θεωρούμε την ακολουθία των συναρτήσεων $f_n : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$.
- Παρατηρούμε ότι, για κάθε $x \in (0, \pi)$ ισχύει $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$. Άρα, $f_n \rightarrow 0$ κατά σημείο.
- Όμως, η ακολουθία $f'_n : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'_n(x) = \cos nx$ δεν συγκλίνει για καμία τιμή του $x \in (0, \pi)$.
- Πράγματι: αν υπάρχει $x \in (0, \pi)$ ώστε $\cos nx \rightarrow \alpha \in \mathbb{R}$, τότε $\cos(3nx) \rightarrow \alpha$. Από την ταυτότητα

$$\cos(3nx) = 4\cos^3(nx) - 3\cos(nx)$$

βλέπουμε ότι $\alpha = 4\alpha^3 - 3\alpha$. Συνεπώς, $\alpha = 0$ ή $\alpha^2 = 1$.

- Αν $\alpha = 0$ τότε από την ταυτότητα $\sin^2(nx) + \cos^2(nx) = 1$ συμπεραίνουμε ότι $\sin^2(nx) \rightarrow 1$. Όμως,

$$\sin^2(nx) = \frac{1 - \cos(2nx)}{2}$$

οπότε $\cos(2nx) \rightarrow -1$, άτοπο.

- Αν $\alpha^2 = 1$, από την ταυτότητα $\sin^2(nx) + \cos^2(nx) = 1$ έχουμε ότι $\sin(nx) \rightarrow 0$.

Κατά σημείο σύγκλιση και παράγωγος

- (β) Θεωρούμε την ακολουθία των συναρτήσεων $f_n : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$.
- Παρατηρούμε ότι, για κάθε $x \in (0, \pi)$ ισχύει $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$. Άρα, $f_n \rightarrow 0$ κατά σημείο.
- Όμως, η ακολουθία $f'_n : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'_n(x) = \cos nx$ δεν συγκλίνει για καμία τιμή του $x \in (0, \pi)$.
- Πράγματι: αν υπάρχει $x \in (0, \pi)$ ώστε $\cos nx \rightarrow \alpha \in \mathbb{R}$, τότε $\cos(3nx) \rightarrow \alpha$. Από την ταυτότητα

$$\cos(3nx) = 4\cos^3(nx) - 3\cos(nx)$$

βλέπουμε ότι $\alpha = 4\alpha^3 - 3\alpha$. Συνεπώς, $\alpha = 0$ ή $\alpha^2 = 1$.

- Αν $\alpha = 0$ τότε από την ταυτότητα $\sin^2(nx) + \cos^2(nx) = 1$ συμπεραίνουμε ότι $\sin^2(nx) \rightarrow 1$. Όμως,

$$\sin^2(nx) = \frac{1 - \cos(2nx)}{2}$$

οπότε $\cos(2nx) \rightarrow -1$, άτοπο.

- Αν $\alpha^2 = 1$, από την ταυτότητα $\sin^2(nx) + \cos^2(nx) = 1$ έχουμε ότι $\sin(nx) \rightarrow 0$. Τότε, από την

$$\sin(n+1)x = \sin(nx)\cos x + \sin x \cos(nx)$$

παίρνουμε

$$\sin x \cos(nx) \rightarrow 0$$

και επειδή $\sin x \neq 0$ για $x \in (0, \pi)$ έπεται ότι $\cos(nx) \rightarrow 0$, άτοπο.

Κατά σημείο σύγκλιση και εναλλαγή ορίων

- Η κατά σημείο σύγκλιση δεν συμπεριφέρεται καλά ούτε ως προς την εναλλαγή ορίων: υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ και $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f_n(x) \rightarrow f(x)$ για κάθε $x \in [0, 1]$ αλλά $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) \neq f(0)$.

Κατά σημείο σύγκλιση και εναλλαγή ορίων

- Η κατά σημείο σύγκλιση δεν συμπεριφέρεται καλά ούτε ως προς την εναλλαγή ορίων: υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ και $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f_n(x) \rightarrow f(x)$ για κάθε $x \in [0, 1]$ αλλά $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) \neq f(0)$.
- Με άλλα λόγια δεν ισχύει η εναλλαγή των ορίων

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow x} f_n(t) = \lim_{t \rightarrow x} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t).$$

Κατά σημείο σύγκλιση και εναλλαγή ορίων

- Η κατά σημείο σύγκλιση δεν συμπεριφέρεται καλά ούτε ως προς την εναλλαγή ορίων: υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ και $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f_n(x) \rightarrow f(x)$ για κάθε $x \in [0, 1]$ αλλά $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) \neq f(0)$.
- Με άλλα λόγια δεν ισχύει η εναλλαγή των ορίων

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow x} f_n(t) = \lim_{t \rightarrow x} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t).$$

- (α) Ένα παράδειγμα μας δίνουν οι $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(t) = (1 - t)^n$. Έχουμε $f_n(t) \rightarrow f(t)$ για κάθε $t \in [0, 1]$ όπου

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & 0 < t \leq 1 \end{cases}$$

Κατά σημείο σύγκλιση και εναλλαγή ορίων

- Η κατά σημείο σύγκλιση δεν συμπεριφέρεται καλά ούτε ως προς την εναλλαγή ορίων: υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ και $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f_n(x) \rightarrow f(x)$ για κάθε $x \in [0, 1]$ αλλά $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) \neq f(0)$.
- Με άλλα λόγια δεν ισχύει η εναλλαγή των ορίων

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow x} f_n(t) = \lim_{t \rightarrow x} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t).$$

- (α) Ένα παράδειγμα μας δίνουν οι $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(t) = (1 - t)^n$. Έχουμε $f_n(t) \rightarrow f(t)$ για κάθε $t \in [0, 1]$ όπου

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & 0 < t \leq 1 \end{cases}$$

- Παρατηρήστε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow 0} f_n(t) = 1 \neq 0 = \lim_{t \rightarrow 0} f(t).$$

Κατά σημείο σύγκλιση και εναλλαγή ορίων

- (β) Πολύ περισσότερο, μπορούμε να έχουμε ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία να συγκλίνει σε μια συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία να μην έχει όριο στο σημείο 0.

Κατά σημείο σύγκλιση και εναλλαγή ορίων

- (β) Πολύ περισσότερο, μπορούμε να έχουμε ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία να συγκλίνει σε μια συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία να μην έχει όριο στο σημείο 0.
- Για παράδειγμα, θεωρήστε τις $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1/n \\ \sin(\pi/t), & 1/n \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Κατά σημείο σύγκλιση και εναλλαγή ορίων

- (β) Πολύ περισσότερο, μπορούμε να έχουμε ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία να συγκλίνει σε μια συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία να μην έχει όριο στο σημείο 0.
- Για παράδειγμα, θεωρήστε τις $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1/n \\ \sin(\pi/t), & 1/n \leq t \leq 1 \end{cases}$$

- Εύκολα βλέπουμε ότι

$$f_n(t) \rightarrow f(t) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ \sin(\pi/t), & 0 < t \leq 1 \end{cases}$$

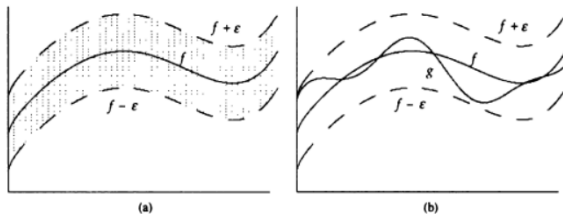
Ακολουθίες συναρτήσεων: ομοιόμορφη σύγκλιση

Ορισμός

Έστω I διάστημα και $f_n, f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Λέμε ότι η ακολουθία (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στην f αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $x \in I$ ισχύει $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

Ορισμός

Έστω I διάστημα και $f_n, f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Λέμε ότι η ακολουθία (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στην f αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $x \in I$ ισχύει $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.



Ακολουθίες συναρτήσεων: ομοιόμορφη σύγκλιση

- Συμβολίζουμε με $\mathcal{B}(I)$ τον χώρο των φραγμένων συναρτήσεων $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Ακολουθίες συναρτήσεων: ομοιόμορφη σύγκλιση

- Συμβολίζουμε με $\mathcal{B}(I)$ τον χώρο των φραγμένων συναρτήσεων $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.
- Εύκολα ελέγχουμε ότι η συνάρτηση $\|\cdot\|_\infty : \mathcal{B}(I) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$\|g\|_\infty = \sup\{|g(x)| : x \in I\}$$

είναι νόρμα και ότι « $|g(x)| \leq \varepsilon$ για κάθε $x \in I$ » αν και μόνο αν $\|g\|_\infty \leq \varepsilon$.

Ακολουθίες συναρτήσεων: ομοιόμορφη σύγκλιση

- Συμβολίζουμε με $\mathcal{B}(I)$ τον χώρο των φραγμένων συναρτήσεων $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.
- Εύκολα ελέγχουμε ότι η συνάρτηση $\|\cdot\|_\infty : \mathcal{B}(I) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$\|g\|_\infty = \sup\{|g(x)| : x \in I\}$$

είναι νόρμα και ότι « $|g(x)| \leq \varepsilon$ για κάθε $x \in I$ » αν και μόνο αν $\|g\|_\infty \leq \varepsilon$.

- Συνεπώς, ένας άλλος τρόπος να περιγράψουμε την ομοιόμορφη σύγκλιση είναι ο εξής: Η ακολουθία (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στην f αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$, ή πιο απλά:

Ακολουθίες συναρτήσεων: ομοιόμορφη σύγκλιση

- Συμβολίζουμε με $\mathcal{B}(I)$ τον χώρο των φραγμένων συναρτήσεων $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.
- Εύκολα ελέγχουμε ότι η συνάρτηση $\|\cdot\|_\infty : \mathcal{B}(I) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$\|g\|_\infty = \sup\{|g(x)| : x \in I\}$$

είναι νόρμα και ότι « $|g(x)| \leq \varepsilon$ για κάθε $x \in I$ » αν και μόνο αν $\|g\|_\infty \leq \varepsilon$.

- Συνεπώς, ένας άλλος τρόπος να περιγράψουμε την ομοιόμορφη σύγκλιση είναι ο εξής: Η ακολουθία (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στην f αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$, ή πιο απλά:

Η ακολουθία (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στην f αν $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$.

Ακολουθίες συναρτήσεων: ομοιόμορφη σύγκλιση

- Δύο χρήσιμες παρατηρήσεις για την $\| \cdot \|_{\infty}$ είναι οι εξής:

Ακολουθίες συναρτήσεων: ομοιόμορφη σύγκλιση

- Δύο χρήσιμες παρατηρήσεις για την $\|\cdot\|_\infty$ είναι οι εξής:
- Αν $f, g \in \mathcal{B}(I)$ τότε $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ για κάθε $x \in I$ (και ομοίως, $|g(x)| \leq \|g\|_\infty$ για κάθε $x \in I$).

- Δύο χρήσιμες παρατηρήσεις για την $\|\cdot\|_\infty$ είναι οι εξής:
- Αν $f, g \in \mathcal{B}(I)$ τότε $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ για κάθε $x \in I$ (και ομοίως, $|g(x)| \leq \|g\|_\infty$ για κάθε $x \in I$).
- Επίσης, $|f(x)g(x)| = |f(x)| |g(x)| \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$ για κάθε $x \in I$, άρα

$$\|fg\|_\infty = \sup\{|f(x)g(x)| : x \in I\} \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty.$$

Ακολουθίες συναρτήσεων: ομοιόμορφη σύγκλιση

Συγκρίνοντας τους δύο ορισμούς βλέπουμε ότι η ομοιόμορφη σύγκλιση είναι πιο ισχυρή από την κατά σημείο σύγκλιση:

Πρόταση

Έστω $f_n, f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Αν $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα, τότε $f_n \rightarrow f$ κατά σημείο.

Ακολουθίες συναρτήσεων: ομοιόμορφη σύγκλιση

Συγκρίνοντας τους δύο ορισμούς βλέπουμε ότι η ομοιόμορφη σύγκλιση είναι πιο ισχυρή από την κατά σημείο σύγκλιση:

Πρόταση

Έστω $f_n, f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Αν $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα, τότε $f_n \rightarrow f$ κατά σημείο.

- Απόδειξη: Αφού $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα, έχουμε ότι $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$.

Ακολουθίες συναρτήσεων: ομοιόμορφη σύγκλιση

Συγκρίνοντας τους δύο ορισμούς βλέπουμε ότι η ομοιόμορφη σύγκλιση είναι πιο ισχυρή από την κατά σημείο σύγκλιση:

Πρόταση

Έστω $f_n, f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Αν $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα, τότε $f_n \rightarrow f$ κατά σημείο.

- Απόδειξη: Αφού $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα, έχουμε ότι $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$.
- Από τον ορισμό της $\|\cdot\|_\infty$, για κάθε $x \in I$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0.$$

Ακολουθίες συναρτήσεων: ομοιόμορφη σύγκλιση

Συγκρίνοντας τους δύο ορισμούς βλέπουμε ότι η ομοιόμορφη σύγκλιση είναι πιο ισχυρή από την κατά σημείο σύγκλιση:

Πρόταση

Έστω $f_n, f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Αν $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα, τότε $f_n \rightarrow f$ κατά σημείο.

- Απόδειξη: Αφού $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα, έχουμε ότι $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$.
- Από τον ορισμό της $\|\cdot\|_\infty$, για κάθε $x \in I$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0.$$

- Έπεται ότι $f_n(x) \rightarrow f(x)$ για κάθε $x \in I$.

Ακολουθίες συναρτήσεων: ομοιόμορφη σύγκλιση

Ορισμός

Έστω $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) λέγεται ομοιόμορφα φραγμένη στο I αν υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$|f_n(x)| \leq M \text{ για κάθε } x \in I \text{ και για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Ακολουθίες συναρτήσεων: ομοιόμορφη σύγκλιση

Ορισμός

Έστω $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) λέγεται ομοιόμορφα φραγμένη στο I αν υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$|f_n(x)| \leq M \text{ για κάθε } x \in I \text{ και για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Ισοδύναμα, αν $\|f_n\|_\infty \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δηλαδή, αν ο M είναι κοινό φράγμα για όλες τις $|f_n|$.

Ακολουθίες συναρτήσεων: ομοιόμορφη σύγκλιση

Ορισμός

Έστω $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) λέγεται ομοιόμορφα φραγμένη στο I αν υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$|f_n(x)| \leq M \text{ για κάθε } x \in I \text{ και για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Ισοδύναμα, αν $\|f_n\|_\infty \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δηλαδή, αν ο M είναι κοινό φράγμα για όλες τις $|f_n|$.

Πρόταση

Έστω I διάστημα, $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ και $(f_n), (g_n)$ ακολουθίες συναρτήσεων από το I στο $\mathbb{R}$ και $t, s \in \mathbb{R}$.

(α) Αν $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα και $g_n \rightarrow g$ ομοιόμορφα στο I , τότε $tf_n + sg_n \rightarrow tf + sg$ ομοιόμορφα στο I .

Ακολουθίες συναρτήσεων: ομοιόμορφη σύγκλιση

Ορισμός

Έστω $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) λέγεται ομοιόμορφα φραγμένη στο I αν υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$|f_n(x)| \leq M \text{ για κάθε } x \in I \text{ και για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Ισοδύναμα, αν $\|f_n\|_\infty \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δηλαδή, αν ο M είναι κοινό φράγμα για όλες τις $|f_n|$.

Πρόταση

Έστω I διάστημα, $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ και $(f_n), (g_n)$ ακολουθίες συναρτήσεων από το I στο $\mathbb{R}$ και $t, s \in \mathbb{R}$.

(α) Αν $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα και $g_n \rightarrow g$ ομοιόμορφα στο I , τότε $tf_n + sg_n \rightarrow tf + sg$ ομοιόμορφα στο I .

- (α) Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \|(tf_n + sg_n) - (tf + sg)\|_\infty &= \|t(f_n - f) + s(g_n - g)\|_\infty \\ &\leq |t| \|f_n - f\|_\infty + |s| \|g_n - g\|_\infty \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Πρόταση

(β) Αν, επιπλέον, οι $(f_n), (g_n)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένες, τότε $f_n g_n \rightarrow fg$ ομοιόμορφα στο I .

Πρόταση

(β) Αν, επιπλέον, οι $(f_n), (g_n)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένες, τότε $f_n g_n \rightarrow fg$ ομοιόμορφα στο I .

- (β) Υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f_n(x)| \leq M$ και $|g_n(x)| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in I$. Δηλαδή, $\|f_n\|_\infty \leq M$ και $\|g_n\|_\infty \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Πρόταση

(β) Αν, επιπλέον, οι $(f_n), (g_n)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένες, τότε $f_n g_n \rightarrow fg$ ομοιόμορφα στο I .

- (β) Υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f_n(x)| \leq M$ και $|g_n(x)| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in I$. Δηλαδή, $\|f_n\|_\infty \leq M$ και $\|g_n\|_\infty \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
- Επίσης, αφού $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο I , έχουμε $f_n \rightarrow f$ κατά σημείο.

Πρόταση

(β) Αν, επιπλέον, οι $(f_n), (g_n)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένες, τότε $f_n g_n \rightarrow fg$ ομοιόμορφα στο I .

- (β) Υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f_n(x)| \leq M$ και $|g_n(x)| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in I$. Δηλαδή, $\|f_n\|_\infty \leq M$ και $\|g_n\|_\infty \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
- Επίσης, αφού $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο I , έχουμε $f_n \rightarrow f$ κατά σημείο.
- Άρα, για κάθε $x \in I$ ισχύει $|f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x)| \leq M$. Δηλαδή, $\|f\|_\infty \leq M$.

Πρόταση

(β) Αν, επιπλέον, οι $(f_n), (g_n)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένες, τότε $f_n g_n \rightarrow fg$ ομοιόμορφα στο I .

- (β) Υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f_n(x)| \leq M$ και $|g_n(x)| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in I$. Δηλαδή, $\|f_n\|_\infty \leq M$ και $\|g_n\|_\infty \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
- Επίσης, αφού $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο I , έχουμε $f_n \rightarrow f$ κατά σημείο.
- Άρα, για κάθε $x \in I$ ισχύει $|f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x)| \leq M$. Δηλαδή, $\|f\|_\infty \leq M$.
- Τώρα γράφουμε

$$\begin{aligned}\|f_n g_n - fg\|_\infty &= \|(f_n - f)g_n + f(g_n - g)\|_\infty \\ &\leq \|(f_n - f)g_n\|_\infty + \|f(g_n - g)\|_\infty \\ &\leq \|f_n - f\|_\infty \|g_n\|_\infty + \|f\|_\infty \|g_n - g\|_\infty \\ &\leq \|f_n - f\|_\infty \cdot M + M \cdot \|g_n - g\|_\infty \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Ακολουθίες συναρτήσεων: ομοιόμορφη σύγκλιση

Το επόμενο θεώρημα, γνωστό ως κριτήριο Cauchy, μας δίνει μια χρήσιμη ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ομοιόμορφη σύγκλιση μιας ακολουθίας συναρτήσεων (f_n) .

Ακολουθίες συναρτήσεων: ομοιόμορφη σύγκλιση

Το επόμενο θεώρημα, γνωστό ως κριτήριο Cauchy, μας δίνει μια χρήσιμη ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ομοιόμορφη σύγκλιση μιας ακολουθίας συναρτήσεων (f_n) .

Κριτήριο Cauchy

Έστω $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια συνάρτηση $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon)$ ώστε: αν $n, m \geq n_0$ τότε $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$.

Ακολουθίες συναρτήσεων: ομοιόμορφη σύγκλιση

Το επόμενο θεώρημα, γνωστό ως κριτήριο Cauchy, μας δίνει μια χρήσιμη ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ομοιόμορφη σύγκλιση μιας ακολουθίας συναρτήσεων (f_n) .

Κριτήριο Cauchy

Έστω $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια συνάρτηση $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon)$ ώστε: αν $n, m \geq n_0$ τότε $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$.

- Απόδειξη: Υποθέτουμε πρώτα ότι υπάρχει συνάρτηση $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο I .

Ακολουθίες συναρτήσεων: ομοιόμορφη σύγκλιση

Το επόμενο θεώρημα, γνωστό ως κριτήριο Cauchy, μας δίνει μια χρήσιμη ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ομοιόμορφη σύγκλιση μιας ακολουθίας συναρτήσεων (f_n) .

Κριτήριο Cauchy

Έστω $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια συνάρτηση $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon)$ ώστε: αν $n, m \geq n_0$ τότε $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$.

- Απόδειξη: Υποθέτουμε πρώτα ότι υπάρχει συνάρτηση $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο I .
- Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε, υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon)$ ώστε, για κάθε $n \geq n_0$, $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon/2$.

Ακολουθίες συναρτήσεων: ομοιόμορφη σύγκλιση

Το επόμενο θεώρημα, γνωστό ως κριτήριο Cauchy, μας δίνει μια χρήσιμη ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ομοιόμορφη σύγκλιση μιας ακολουθίας συναρτήσεων (f_n) .

Κριτήριο Cauchy

Έστω $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια συνάρτηση $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon)$ ώστε: αν $n, m \geq n_0$ τότε $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$.

- Απόδειξη: Υποθέτουμε πρώτα ότι υπάρχει συνάρτηση $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο I .
- Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε, υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon)$ ώστε, για κάθε $n \geq n_0$, $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon/2$.
- Συνεπώς, για κάθε $n, m \geq n_0$ έχουμε

$$\begin{aligned}\|f_n - f_m\|_\infty &= \|(f_n - f) + (f - f_m)\|_\infty \leq \|f_n - f\|_\infty + \|f - f_m\|_\infty \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Ακολουθίες συναρτήσεων: ομοιόμορφη σύγκλιση

- Απόδειξη: Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon)$ ώστε: αν $n, m \geq n_0$ τότε $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$.

Ακολουθίες συναρτήσεων: ομοιόμορφη σύγκλιση

- Απόδειξη: Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon)$ ώστε: αν $n, m \geq n_0$ τότε $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$.
- Σταθεροποιούμε $x \in I$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε: αν $n, m \geq n_0$ τότε

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon. \quad (1)$$

Ακολουθίες συναρτήσεων: ομοιόμορφη σύγκλιση

- Απόδειξη: Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon)$ ώστε: αν $n, m \geq n_0$ τότε $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$.
- Σταθεροποιούμε $x \in I$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε: αν $n, m \geq n_0$ τότε

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon. \quad (1)$$

- Άρα, η ακολουθία $(f_n(x))$ είναι βασική ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Συνεπώς, συγκλίνει σε κάποιον αριθμό, ο οποίος εξαρτάται από το x .

Ακολουθίες συναρτήσεων: ομοιόμορφη σύγκλιση

- Απόδειξη: Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon)$ ώστε: αν $n, m \geq n_0$ τότε $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$.
- Σταθεροποιούμε $x \in I$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε: αν $n, m \geq n_0$ τότε

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon. \quad (1)$$

- Άρα, η ακολουθία $(f_n(x))$ είναι βασική ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Συνεπώς, συγκλίνει σε κάποιον αριθμό, ο οποίος εξαρτάται από το x .
- Ορίζουμε $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Προφανώς, $f_n \rightarrow f$ κατά σημείο.

Ακολουθίες συναρτήσεων: ομοιόμορφη σύγκλιση

- Απόδειξη: Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon)$ ώστε: αν $n, m \geq n_0$ τότε $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$.
- Σταθεροποιούμε $x \in I$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε: αν $n, m \geq n_0$ τότε

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon. \quad (1)$$

- Άρα, η ακολουθία $(f_n(x))$ είναι βασική ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Συνεπώς, συγκλίνει σε κάποιον αριθμό, ο οποίος εξαρτάται από το x .
- Ορίζουμε $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Προφανώς, $f_n \rightarrow f$ κατά σημείο.
- Αφήνοντας το $m \rightarrow \infty$ στην (1) παρατηρούμε ότι (για τυχόν $\varepsilon > 0$ και το $n_0 = n_0(\varepsilon)$ που χρησιμοποιήσαμε προηγουμένως): για κάθε $x \in I$ και για κάθε $n \geq n_0$,

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon.$$

Ακολουθίες συναρτήσεων: ομοιόμορφη σύγκλιση

- Απόδειξη: Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon)$ ώστε: αν $n, m \geq n_0$ τότε $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$.
- Σταθεροποιούμε $x \in I$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε: αν $n, m \geq n_0$ τότε

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon. \quad (1)$$

- Άρα, η ακολουθία $(f_n(x))$ είναι βασική ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Συνεπώς, συγκλίνει σε κάποιον αριθμό, ο οποίος εξαρτάται από το x .
- Ορίζουμε $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Προφανώς, $f_n \rightarrow f$ κατά σημείο.
- Αφήνοντας το $m \rightarrow \infty$ στην (1) παρατηρούμε ότι (για τυχόν $\varepsilon > 0$ και το $n_0 = n_0(\varepsilon)$ που χρησιμοποιήσαμε προηγουμένως): για κάθε $x \in I$ και για κάθε $n \geq n_0$,

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon.$$

- Συνεπώς, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in I\} \leq \varepsilon.$$

Ακολουθίες συναρτήσεων: ομοιόμορφη σύγκλιση

- Απόδειξη: Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon)$ ώστε: αν $n, m \geq n_0$ τότε $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$.
- Σταθεροποιούμε $x \in I$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε: αν $n, m \geq n_0$ τότε

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon. \quad (1)$$

- Άρα, η ακολουθία $(f_n(x))$ είναι βασική ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Συνεπώς, συγκλίνει σε κάποιον αριθμό, ο οποίος εξαρτάται από το x .
- Ορίζουμε $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Προφανώς, $f_n \rightarrow f$ κατά σημείο.
- Αφήνοντας το $m \rightarrow \infty$ στην (1) παρατηρούμε ότι (για τυχόν $\varepsilon > 0$ και το $n_0 = n_0(\varepsilon)$ που χρησιμοποιήσαμε προηγουμένως): για κάθε $x \in I$ και για κάθε $n \geq n_0$,

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon.$$

- Συνεπώς, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in I\} \leq \varepsilon.$$

- Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα.