

Αρμονική Ανάλυση

Μάθημα 2

Φεβρουάριος 2024

Σκοπός μας είναι να συζητήσουμε τους κλασικούς χώρους ολοκληρώσιμων συναρτήσεων. Θα ξεκινήσουμε όμως με τον γενικό ορισμό του μετρικού χώρου και του χώρου με νόρμα.

Μετρική

Σκοπός μας είναι να συζητήσουμε τους κλασικούς χώρους ολοκληρώσιμων συναρτήσεων. Θα ξεκινήσουμε όμως με τον γενικό ορισμό του μετρικού χώρου και του χώρου με νόρμα.

Μετρική

Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Μετρική στο X λέγεται κάθε συνάρτηση $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ με τις παρακάτω ιδιότητες:

- (α) $d(x, y) \geq 0$ για κάθε $x, y \in X$ και $d(x, y) = 0$ αν και μόνον αν $x = y$.
- (β) $d(x, y) = d(y, x)$ για κάθε $x, y \in X$.
- (γ) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ για κάθε $x, y, z \in X$.

Μετρική

Σκοπός μας είναι να συζητήσουμε τους κλασικούς χώρους ολοκληρώσιμων συναρτήσεων. Θα ξεκινήσουμε όμως με τον γενικό ορισμό του μετρικού χώρου και του χώρου με νόρμα.

Μετρική

Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Μετρική στο X λέγεται κάθε συνάρτηση $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ με τις παρακάτω ιδιότητες:

- (α) $d(x, y) \geq 0$ για κάθε $x, y \in X$ και $d(x, y) = 0$ αν και μόνον αν $x = y$.
- (β) $d(x, y) = d(y, x)$ για κάθε $x, y \in X$.
- (γ) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ για κάθε $x, y, z \in X$.

Σκεφτόμαστε την $d(x, y)$ ως την απόσταση των x και y . Η (γ) είναι η λεγόμενη *τριγωνική ανισότητα*. Αν d είναι μια μετρική στο X τότε το ζεύγος (X, d) λέγεται *μετρικός χώρος*. Τα στοιχεία του X θα λέγονται και *σημεία*.

Μετρική

Σκοπός μας είναι να συζητήσουμε τους κλασικούς χώρους ολοκληρώσιμων συναρτήσεων. Θα ξεκινήσουμε όμως με τον γενικό ορισμό του μετρικού χώρου και του χώρου με νόρμα.

Μετρική

Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Μετρική στο X λέγεται κάθε συνάρτηση $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ με τις παρακάτω ιδιότητες:

(α) $d(x, y) \geq 0$ για κάθε $x, y \in X$ και $d(x, y) = 0$ αν και μόνον αν $x = y$.

(β) $d(x, y) = d(y, x)$ για κάθε $x, y \in X$.

(γ) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ για κάθε $x, y, z \in X$.

Σκεφτόμαστε την $d(x, y)$ ως την απόσταση των x και y . Η (γ) είναι η λεγόμενη *τριγωνική ανισότητα*. Αν d είναι μια μετρική στο X τότε το ζεύγος (X, d) λέγεται *μετρικός χώρος*. Τα στοιχεία του X θα λέγονται και *σημεία*. Το κλασικό παράδειγμα είναι η *συνήθης μετρική* στο $\mathbb{R}$ που ορίζεται ως εξής:

$$d(x, y) = |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Νόρμα

Έστω X ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$, όπου $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$. *Νόρμα* στον X είναι κάθε συνάρτηση $\| \cdot \| : X \rightarrow \mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες:

- (α) $\|x\| \geq 0$ για κάθε $x \in X$ και $\|x\| = 0$ αν και μόνον αν $x = 0$.
- (β) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{K}$ και κάθε $x \in X$.
- (γ) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ για κάθε $x, y \in X$.

Νόρμα

Έστω X ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$, όπου $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$. *Νόρμα* στον X είναι κάθε συνάρτηση $\| \cdot \| : X \rightarrow \mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες:

(α) $\|x\| \geq 0$ για κάθε $x \in X$ και $\|x\| = 0$ αν και μόνον αν $x = 0$.

(β) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{K}$ και κάθε $x \in X$.

(γ) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ για κάθε $x, y \in X$.

Σκεφτόμαστε τη νόρμα $\|x\|$ του x ως την απόσταση του x από το 0. Η (γ) είναι η λεγόμενη *τριγωνική ανισότητα*. Αν $\| \cdot \|$ είναι μια νόρμα στον X , τότε το ζεύγος $(X, \| \cdot \|)$ λέγεται *χώρος με νόρμα*.

Επαγόμενη μετρική

Αν $\|\cdot\|$ είναι μια νόρμα στον X , τότε η συνάρτηση $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad x, y \in X$$

είναι μετρική (η μετρική που επάγεται στον X από τη νόρμα).

Επαγόμενη μετρική

Αν $\|\cdot\|$ είναι μια νόρμα στον X , τότε η συνάρτηση $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad x, y \in X$$

είναι μετρική (η μετρική που επάγεται στον X από τη νόρμα). Πράγματι,

- $d(x, y) = \|x - y\| \geq 0$ για κάθε $x, y \in X$ και ισχύει $d(x, y) = \|x - y\| = 0$ αν και μόνο αν $x = y$.

Επαγόμενη μετρική

Αν $\|\cdot\|$ είναι μια νόρμα στον X , τότε η συνάρτηση $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad x, y \in X$$

είναι μετρική (η μετρική που επάγεται στον X από τη νόρμα). Πράγματι,

- $d(x, y) = \|x - y\| \geq 0$ για κάθε $x, y \in X$ και ισχύει $d(x, y) = \|x - y\| = 0$ αν και μόνο αν $x = y$.
- $d(y, x) = \|y - x\| = \|(-1)(x - y)\| = |-1| \cdot \|x - y\| = \|x - y\| = d(x, y)$ για κάθε $x, y \in X$.

Επαγόμενη μετρική

Αν $\| \cdot \|$ είναι μια νόρμα στον X , τότε η συνάρτηση $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad x, y \in X$$

είναι μετρική (η μετρική που επάγεται στον X από τη νόρμα). Πράγματι,

- $d(x, y) = \|x - y\| \geq 0$ για κάθε $x, y \in X$ και ισχύει $d(x, y) = \|x - y\| = 0$ αν και μόνο αν $x = y$.
- $d(y, x) = \|y - x\| = \|(-1)(x - y)\| = |-1| \cdot \|x - y\| = \|x - y\| = d(x, y)$ για κάθε $x, y \in X$.
- Αν $x, y, z \in X$ τότε
 $d(x, z) = \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z)$.

Επαγόμενη μετρική

Αν $\| \cdot \|$ είναι μια νόρμα στον X , τότε η συνάρτηση $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad x, y \in X$$

είναι μετρική (η μετρική που επάγεται στον X από τη νόρμα). Πράγματι,

- $d(x, y) = \|x - y\| \geq 0$ για κάθε $x, y \in X$ και ισχύει $d(x, y) = \|x - y\| = 0$ αν και μόνο αν $x = y$.
- $d(y, x) = \|y - x\| = \|(-1)(x - y)\| = |-1| \cdot \|x - y\| = \|x - y\| = d(x, y)$ για κάθε $x, y \in X$.
- Αν $x, y, z \in X$ τότε
 $d(x, z) = \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z)$.

Επιπλέον, η d είναι συμβατή με τη γραμμική δομή του χώρου:

- Η d είναι αναλλοίωτη ως προς μεταφορές, δηλαδή $d(x + z, y + z) = d(x, y)$ για κάθε $x, y, z \in X$.

Επαγόμενη μετρική

Αν $\|\cdot\|$ είναι μια νόρμα στον X , τότε η συνάρτηση $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad x, y \in X$$

είναι μετρική (η μετρική που επάγεται στον X από τη νόρμα). Πράγματι,

- $d(x, y) = \|x - y\| \geq 0$ για κάθε $x, y \in X$ και ισχύει $d(x, y) = \|x - y\| = 0$ αν και μόνο αν $x = y$.
- $d(y, x) = \|y - x\| = \|(-1)(x - y)\| = |-1| \cdot \|x - y\| = \|x - y\| = d(x, y)$ για κάθε $x, y \in X$.
- Αν $x, y, z \in X$ τότε
 $d(x, z) = \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z)$.

Επιπλέον, η d είναι συμβατή με τη γραμμική δομή του χώρου:

- Η d είναι αναλλοίωτη ως προς μεταφορές, δηλαδή $d(x + z, y + z) = d(x, y)$ για κάθε $x, y, z \in X$.
- Η d είναι ομογενής, δηλαδή $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$ για κάθε $x, y \in X$ και για κάθε $\lambda \in \mathbb{K}$.

Ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων

Έστω $[a, b]$ κλειστό διάστημα στο $\mathbb{R}$. Ο χώρος $\mathcal{C}[a, b]$ των συνεχών (πραγματικών) συναρτήσεων επί του $[a, b]$ είναι το σύνολο

$$\mathcal{C}[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ συνεχής}\}.$$

Ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων

Έστω $[a, b]$ κλειστό διάστημα στο $\mathbb{R}$. Ο χώρος $\mathcal{C}[a, b]$ των συνεχών (πραγματικών) συναρτήσεων επί του $[a, b]$ είναι το σύνολο

$$\mathcal{C}[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ συνεχής}\}.$$

Ο χώρος $\mathcal{C}[a, b]$ είναι γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$ με τις κατά σημείο πράξεις. Αν $f, g \in \mathcal{C}[a, b]$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ ορίζουμε $f + g, \lambda \cdot f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$(\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x) \quad \text{και} \quad (f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad x \in [a, b].$$

Γνωρίζουμε ότι $f + g, \lambda \cdot f \in \mathcal{C}[a, b]$, και εύκολα ελέγχουμε ότι η τριάδα $(\mathcal{C}[a, b], +, \cdot)$ ικανοποιεί τα αξιώματα του διανυσματικού χώρου.

Ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων

Έστω $[a, b]$ κλειστό διάστημα στο $\mathbb{R}$. Ο χώρος $\mathcal{C}[a, b]$ των συνεχών (πραγματικών) συναρτήσεων επί του $[a, b]$ είναι το σύνολο

$$\mathcal{C}[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ συνεχής}\}.$$

Ο χώρος $\mathcal{C}[a, b]$ είναι γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$ με τις κατά σημείο πράξεις. Αν $f, g \in \mathcal{C}[a, b]$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ ορίζουμε $f + g, \lambda \cdot f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$(\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x) \quad \text{και} \quad (f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad x \in [a, b].$$

Γνωρίζουμε ότι $f + g, \lambda \cdot f \in \mathcal{C}[a, b]$, και εύκολα ελέγχουμε ότι η τριάδα $(\mathcal{C}[a, b], +, \cdot)$ ικανοποιεί τα αξιώματα του διανυσματικού χώρου.

Ο χώρος $\mathcal{R}[a, b]$ των ολοκληρώσιμων (πραγματικών) συναρτήσεων επί του $[a, b]$ είναι το σύνολο

$$\mathcal{R}[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ ολοκληρώσιμη}\}.$$

Ο χώρος $\mathcal{R}[a, b]$ είναι γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$ με τις κατά σημείο πράξεις.

Νόρμες στον $\mathcal{C}[a, b]$

Στον $\mathcal{C}[a, b]$ ορίζουμε την $\|\cdot\|_\infty : \mathcal{C}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, με

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}.$$

Νόρμες στον $\mathcal{C}[a, b]$

Στον $\mathcal{C}[a, b]$ ορίζουμε την $\|\cdot\|_\infty : \mathcal{C}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, με

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}.$$

Παρατηρήστε ότι το $\sup$ όντως υπάρχει, αφού κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη, και το $\sup$ είναι στην πραγματικότητα $\max$ διότι η $|f|$ ως συνεχής συνάρτηση και ορισμένη σε κλειστό διάστημα παίρνει μέγιστη τιμή. Επίσης, εξ ορισμού έχουμε $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Νόρμες στον $\mathcal{C}[a, b]$

Στον $\mathcal{C}[a, b]$ ορίζουμε την $\|\cdot\|_\infty : \mathcal{C}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, με

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}.$$

Παρατηρήστε ότι το $\sup$ όντως υπάρχει, αφού κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη, και το $\sup$ είναι στην πραγματικότητα $\max$ διότι η $|f|$ ως συνεχής συνάρτηση και ορισμένη σε κλειστό διάστημα παίρνει μέγιστη τιμή. Επίσης, εξ ορισμού έχουμε $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Στον $\mathcal{C}[a, b]$ μπορούμε επίσης να θεωρήσουμε την «1-νόρμα»

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)| dx$$

και γενικότερα, για κάθε $1 \leq p < \infty$, την « p -νόρμα»

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Νόρμες στον $\mathcal{C}[a, b]$

Στον $\mathcal{C}[a, b]$ ορίζουμε την $\|\cdot\|_\infty : \mathcal{C}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, με

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}.$$

Παρατηρήστε ότι το $\sup$ όντως υπάρχει, αφού κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη, και το $\sup$ είναι στην πραγματικότητα $\max$ διότι η $|f|$ ως συνεχής συνάρτηση και ορισμένη σε κλειστό διάστημα παίρνει μέγιστη τιμή. Επίσης, εξ ορισμού έχουμε $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Στον $\mathcal{C}[a, b]$ μπορούμε επίσης να θεωρήσουμε την «1-νόρμα»

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)| dx$$

και γενικότερα, για κάθε $1 \leq p < \infty$, την « p -νόρμα»

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Οι ποσότητες αυτές είναι καλά ορισμένες: αν $f \in \mathcal{C}([a, b])$ τότε $|f|^p \in \mathcal{C}[a, b]$, άρα η $|f|^p$ είναι ολοκληρώσιμη. Γενικότερα, στο προηγούμενο μάθημα είδαμε ότι αν $f \in \mathcal{R}[a, b]$ τότε για κάθε $p > 0$ η συνάρτηση $|f|^p$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

Νόρμες στον $C[a, b]$

Θα δείξουμε ότι για κάθε $1 \leq p \leq \infty$ η $\|\cdot\|_p$ ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα στον $C[a, b]$. Οι περιπτώσεις $p = 1$ και $p = \infty$ είναι απλές:

Νόρμες στον $\mathcal{C}[a, b]$

Θα δείξουμε ότι για κάθε $1 \leq p \leq \infty$ η $\|\cdot\|_p$ ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα στον $\mathcal{C}[a, b]$. Οι περιπτώσεις $p = 1$ και $p = \infty$ είναι απλές:

- (i) $p = 1$: Έστω $f, g \in \mathcal{C}[a, b]$. Τότε,

$$\begin{aligned}\|f + g\|_1 &= \int_a^b |f(x) + g(x)| \, dx \leq \int_a^b (|f(x)| + |g(x)|) \, dx \\ &= \int_a^b |f(x)| \, dx + \int_a^b |g(x)| \, dx = \|f\|_1 + \|g\|_1.\end{aligned}$$

Νόρμες στον $\mathcal{C}[a, b]$

Θα δείξουμε ότι για κάθε $1 \leq p \leq \infty$ η $\|\cdot\|_p$ ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα στον $\mathcal{C}[a, b]$. Οι περιπτώσεις $p = 1$ και $p = \infty$ είναι απλές:

- (i) $p = 1$: Έστω $f, g \in \mathcal{C}[a, b]$. Τότε,

$$\begin{aligned}\|f + g\|_1 &= \int_a^b |f(x) + g(x)| dx \leq \int_a^b (|f(x)| + |g(x)|) dx \\ &= \int_a^b |f(x)| dx + \int_a^b |g(x)| dx = \|f\|_1 + \|g\|_1.\end{aligned}$$

- (i) $p = \infty$: Έστω $f, g \in \mathcal{C}[a, b]$. Για κάθε $x \in [a, b]$ έχουμε

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty,$$

άρα

$$\|f + g\|_\infty = \sup\{|f(x) + g(x)| : x \in [a, b]\} \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Ανισότητα Hölder

Για να αποδείξουμε την τριγωνική ανισότητα στην περίπτωση $1 < p < \infty$ θα χρειαστεί να συζητήσουμε τις ανισότητες Hölder και Minkowski.

Για να αποδείξουμε την τριγωνική ανισότητα στην περίπτωση $1 < p < \infty$ θα χρειαστεί να συζητήσουμε τις ανισότητες Hölder και Minkowski.

Συζυγείς εκθέτες

Αν $p, q > 1$ και $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, τότε λέμε ότι οι p και q είναι συζυγείς εκθέτες. Συμφωνούμε επίσης ότι ο συζυγής εκθέτης του $p = 1$ είναι ο $q = \infty$.

Ανισότητα Hölder

Για να αποδείξουμε την τριγωνική ανισότητα στην περίπτωση $1 < p < \infty$ θα χρειαστεί να συζητήσουμε τις ανισότητες Hölder και Minkowski.

Συζυγείς εκθέτες

Αν $p, q > 1$ και $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, τότε λέμε ότι οι p και q είναι συζυγείς εκθέτες. Συμφωνούμε επίσης ότι ο συζυγής εκθέτης του $p = 1$ είναι ο $q = \infty$.

Ανισότητα Hölder

Έστω $p, q > 1$ συζυγείς εκθέτες. Τότε, για κάθε $f, g \in C[a, b]$ ισχύει ότι

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{1/q},$$

δηλαδή

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Ανισότητα Young

Η απόδειξη που θα δώσουμε βασίζεται στην ανισότητα Young.

Ανισότητα Young

Αν $x, y \geq 0$ και $p, q > 1$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, τότε $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$ με ισότητα μόνο αν $x^p = y^q$.

Ανισότητα Young

Η απόδειξη που θα δώσουμε βασίζεται στην ανισότητα Young.

Ανισότητα Young

Αν $x, y \geq 0$ και $p, q > 1$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, τότε $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$ με ισότητα μόνο αν $x^p = y^q$.

- Απόδειξη: Η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln x$ είναι γνησίως κοίλη. Αν λοιπόν $a, b > 0$ και $t \in (0, 1)$, τότε $t \ln a + (1 - t) \ln b \leq \ln(ta + (1 - t)b)$ με ισότητα μόνο αν $a = b$.

Ανισότητα Young

Η απόδειξη που θα δώσουμε βασίζεται στην ανισότητα Young.

Ανισότητα Young

Αν $x, y \geq 0$ και $p, q > 1$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, τότε $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$ με ισότητα μόνο αν $x^p = y^q$.

- Απόδειξη: Η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln x$ είναι γνησίως κοίλη. Αν λοιπόν $a, b > 0$ και $t \in (0, 1)$, τότε $t \ln a + (1 - t) \ln b \leq \ln(ta + (1 - t)b)$ με ισότητα μόνο αν $a = b$.
- Από αυτήν την ανισότητα και τις ιδιότητες του λογαρίθμου, παίρνουμε $a^t b^{1-t} \leq ta + (1 - t)b$.

Ανισότητα Young

Η απόδειξη που θα δώσουμε βασίζεται στην ανισότητα Young.

Ανισότητα Young

Αν $x, y \geq 0$ και $p, q > 1$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, τότε $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$ με ισότητα μόνο αν $x^p = y^q$.

- Απόδειξη: Η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln x$ είναι γνησίως κοίλη. Αν λοιπόν $a, b > 0$ και $t \in (0, 1)$, τότε $t \ln a + (1 - t) \ln b \leq \ln(ta + (1 - t)b)$ με ισότητα μόνο αν $a = b$.
- Από αυτήν την ανισότητα και τις ιδιότητες του λογαρίθμου, παίρνουμε $a^t b^{1-t} \leq ta + (1 - t)b$.
- Έστω τώρα $x, y \geq 0$. Αν $x = 0$ ή $y = 0$ τότε η ανισότητα του λήμματος ισχύει τετριμμένα αφού το αριστερό μέλος είναι ίσο με 0.

Ανισότητα Young

Η απόδειξη που θα δώσουμε βασίζεται στην ανισότητα Young.

Ανισότητα Young

Αν $x, y \geq 0$ και $p, q > 1$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, τότε $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$ με ισότητα μόνο αν $x^p = y^q$.

- Απόδειξη: Η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln x$ είναι γνησίως κοίλη. Αν λοιπόν $a, b > 0$ και $t \in (0, 1)$, τότε $t \ln a + (1 - t) \ln b \leq \ln(ta + (1 - t)b)$ με ισότητα μόνο αν $a = b$.
- Από αυτήν την ανισότητα και τις ιδιότητες του λογαρίθμου, παίρνουμε $a^t b^{1-t} \leq ta + (1 - t)b$.
- Έστω τώρα $x, y \geq 0$. Αν $x = 0$ ή $y = 0$ τότε η ανισότητα του λήμματος ισχύει τετριμμένα αφού το αριστερό μέλος είναι ίσο με 0. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $x, y > 0$. Εφαρμόζουμε την προηγούμενη ανισότητα με $a = x^p$, $b = y^q$. Αφού $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, επιλέγοντας $t = \frac{1}{p}$, συμπεραίνουμε ότι

$$xy = a^{1/p} b^{1/q} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q} = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

με ισότητα μόνο αν $x^p = a = b = y^q$.

Απόδειξη της ανισότητας Hölder

- Υποθέτουμε πρώτα ότι

$$\|f\|_p^p = \int_a^b |f(x)|^p dx = 1, \quad \|g\|_q^q = \int_a^b |g(x)|^q dx = 1.$$

Απόδειξη της ανισότητας Hölder

- Υποθέτουμε πρώτα ότι

$$\|f\|_p^p = \int_a^b |f(x)|^p dx = 1, \quad \|g\|_q^q = \int_a^b |g(x)|^q dx = 1.$$

- Από την ανισότητα Young, για κάθε $x \in [a, b]$ ισχύει ότι

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q.$$

Απόδειξη της ανισότητας Hölder

- Υποθέτουμε πρώτα ότι

$$\|f\|_p^p = \int_a^b |f(x)|^p dx = 1, \quad \|g\|_q^q = \int_a^b |g(x)|^q dx = 1.$$

- Από την ανισότητα Young, για κάθε $x \in [a, b]$ ισχύει ότι

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q.$$

- Ολοκληρώνοντας την τελευταία ανισότητα παίρνουμε

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \frac{1}{p} \int_a^b |f(x)|^p dx + \frac{1}{q} \int_a^b |g(x)|^q dx = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|f\|_p \|g\|_q.$$

Απόδειξη της ανισότητας Hölder

- Στη γενική περίπτωση: μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|f\|_p \neq 0$ και $\|g\|_q \neq 0$. Αλλιώς $f \equiv 0$ ή $g \equiv 0$ (άσκηση!) άρα $fg \equiv 0$ και το αριστερό μέλος της ζητούμενης ανισότητας μηδενίζεται, οπότε δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε.

Απόδειξη της ανισότητας Hölder

- Στη γενική περίπτωση: μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|f\|_p \neq 0$ και $\|g\|_q \neq 0$. Αλλιώς $f \equiv 0$ ή $g \equiv 0$ (άσκηση!) άρα $fg \equiv 0$ και το αριστερό μέλος της ζητούμενης ανισότητας μηδενίζεται, οπότε δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε.
- Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f_1 = \frac{f}{\|f\|_p} \quad \text{και} \quad g_1 = \frac{g}{\|g\|_q}.$$

Απόδειξη της ανισότητας Hölder

- Στη γενική περίπτωση: μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|f\|_p \neq 0$ και $\|g\|_q \neq 0$. Αλλιώς $f \equiv 0$ ή $g \equiv 0$ (άσκηση!) άρα $fg \equiv 0$ και το αριστερό μέλος της ζητούμενης ανισότητας μηδενίζεται, οπότε δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε.
- Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f_1 = \frac{f}{\|f\|_p} \text{ και } g_1 = \frac{g}{\|g\|_q}.$$

- Παρατηρούμε ότι

$$\int_a^b |f_1(x)|^p dx = \frac{1}{\|f\|_p^p} \int_a^b |f(x)|^p dx = 1, \quad \int_a^b |g_1(x)|^q dx = \frac{1}{\|g\|_q^q} \int_a^b |g(x)|^q dx = 1.$$

Απόδειξη της ανισότητας Hölder

- Στη γενική περίπτωση: μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|f\|_p \neq 0$ και $\|g\|_q \neq 0$. Αλλιώς $f \equiv 0$ ή $g \equiv 0$ (άσκηση!) άρα $fg \equiv 0$ και το αριστερό μέλος της ζητούμενης ανισότητας μηδενίζεται, οπότε δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε.
- Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f_1 = \frac{f}{\|f\|_p} \text{ και } g_1 = \frac{g}{\|g\|_q}.$$

- Παρατηρούμε ότι

$$\int_a^b |f_1(x)|^p dx = \frac{1}{\|f\|_p^p} \int_a^b |f(x)|^p dx = 1, \quad \int_a^b |g_1(x)|^q dx = \frac{1}{\|g\|_q^q} \int_a^b |g(x)|^q dx = 1.$$

- Από την ειδική περίπτωση της ανισότητας που δείξαμε παραπάνω, έχουμε

$$\int_a^b |f_1(x)g_1(x)| dx \leq 1, \text{ δηλαδή, } \int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Ανισότητα Cauchy-Schwarz

- Στην ειδική περίπτωση $p = 2$, οπότε ο συζυγής εκθέτης του p είναι ο $q = 2$, η ανισότητα Hölder παίρνει την εξής μορφή: Για κάθε $f, g \in \mathcal{C}[a, b]$ ισχύει ότι

$$\int_a^b |f(x)g(x)| \, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b |g(x)|^2 \, dx \right)^{1/2},$$

δηλαδή $\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2$. Αυτή είναι η κλασική ανισότητα Cauchy-Schwarz.

Ανισότητα Cauchy-Schwarz

- Στην ειδική περίπτωση $p = 2$, οπότε ο συζυγής εκθέτης του p είναι ο $q = 2$, η ανισότητα Hölder παίρνει την εξής μορφή: Για κάθε $f, g \in \mathcal{C}[a, b]$ ισχύει ότι

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

δηλαδή $\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2$. Αυτή είναι η κλασική ανισότητα Cauchy-Schwarz.

Ανισότητα Minkowski

Έστω $1 < p < \infty$. Αν $f, g \in \mathcal{C}[a, b]$, τότε

$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

δηλαδή

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Ανισότητα Minkowski

- Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|f + g\|_p > 0$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\|f + g\|_p^p &= \int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx = \int_a^b |f(x) + g(x)|^{p-1} |f(x) + g(x)| dx \\ &\leq \int_a^b |f(x) + g(x)|^{p-1} |f(x)| dx + \int_a^b |f(x) + g(x)|^{p-1} |g(x)| dx \\ &\leq \left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^{(p-1)q} dx \right)^{1/q} \|f\|_p + \left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^{(p-1)q} dx \right)^{1/q} \|g\|_p,\end{aligned}$$

όπου, στο τελευταίο βήμα, εφαρμόσαμε την ανισότητα Hölder για τα ζευγάρια $|f + g|^{p-1}, |f|$ και $|f + g|^{p-1}, |g|$.

Ανισότητα Minkowski

- Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|f + g\|_p > 0$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\|f + g\|_p^p &= \int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx = \int_a^b |f(x) + g(x)|^{p-1} |f(x) + g(x)| dx \\ &\leq \int_a^b |f(x) + g(x)|^{p-1} |f(x)| dx + \int_a^b |f(x) + g(x)|^{p-1} |g(x)| dx \\ &\leq \left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^{(p-1)q} dx \right)^{1/q} \|f\|_p + \left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^{(p-1)q} dx \right)^{1/q} \|g\|_p,\end{aligned}$$

όπου, στο τελευταίο βήμα, εφαρμόσαμε την ανισότητα Hölder για τα ζευγάρια $|f + g|^{p-1}, |f|$ και $|f + g|^{p-1}, |g|$.

- Παρατηρούμε ότι $(p - 1)q = p$ (οι p και q είναι συζυγείς εκθέτες).

Ανισότητα Minkowski

- Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|f + g\|_p > 0$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\|f + g\|_p^p &= \int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx = \int_a^b |f(x) + g(x)|^{p-1} |f(x) + g(x)| dx \\&\leq \int_a^b |f(x) + g(x)|^{p-1} |f(x)| dx + \int_a^b |f(x) + g(x)|^{p-1} |g(x)| dx \\&\leq \left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^{(p-1)q} dx \right)^{1/q} \|f\|_p + \left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^{(p-1)q} dx \right)^{1/q} \|g\|_p,\end{aligned}$$

όπου, στο τελευταίο βήμα, εφαρμόσαμε την ανισότητα Hölder για τα ζευγάρια $|f + g|^{p-1}$, $|f|$ και $|f + g|^{p-1}$, $|g|$.

- Παρατηρούμε ότι $(p-1)q = p$ (οι p και q είναι συζυγείς εκθέτες). Συνεπώς,

$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^{(p-1)q} dx \right)^{1/q} = \left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{1/q} = \|f + g\|_p^{p/q}.$$

Έπεται ότι

$$\|f + g\|_p^p \leq \|f + g\|_p^{p/q} (\|f\|_p + \|g\|_p).$$

Ανισότητα Minkowski

- Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|f + g\|_p > 0$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\|f + g\|_p^p &= \int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx = \int_a^b |f(x) + g(x)|^{p-1} |f(x) + g(x)| dx \\ &\leq \int_a^b |f(x) + g(x)|^{p-1} |f(x)| dx + \int_a^b |f(x) + g(x)|^{p-1} |g(x)| dx \\ &\leq \left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^{(p-1)q} dx \right)^{1/q} \|f\|_p + \left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^{(p-1)q} dx \right)^{1/q} \|g\|_p,\end{aligned}$$

όπου, στο τελευταίο βήμα, εφαρμόσαμε την ανισότητα Hölder για τα ζευγάρια $|f + g|^{p-1}$, $|f|$ και $|f + g|^{p-1}$, $|g|$.

- Παρατηρούμε ότι $(p-1)q = p$ (οι p και q είναι συζυγείς εκθέτες). Συνεπώς,

$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^{(p-1)q} dx \right)^{1/q} = \left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{1/q} = \|f + g\|_p^{p/q}.$$

Έπεται ότι

$$\|f + g\|_p^p \leq \|f + g\|_p^{p/q} (\|f\|_p + \|g\|_p).$$

- Χρησιμοποιώντας την $p - \frac{p}{q} = 1$ συμπεραίνουμε ότι

$$\|f + g\|_p = \frac{\|f + g\|_p^p}{\|f + g\|_p^{p/q}} \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

$O(\mathcal{C}[a, b], \|\cdot\|_p)$

Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι για κάθε $1 \leq p \leq \infty$ η $\|\cdot\|_p$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις (α) και (β) της νόρμας. Συνεπώς, έχουμε αποδείξει το εξής.

Θεώρημα

Για κάθε $1 \leq p \leq \infty$ ο $(\mathcal{C}[a, b], \|\cdot\|_p)$ είναι χώρος με νόρμα.

Ακολουθίες σε χώρους με νόρμα

- Σε κάθε χώρο με νόρμα μπορούμε να μιλήσουμε για συγκλίνουσες ακολουθίες.

Ακολουθίες σε χώρους με νόρμα

- Σε κάθε χώρο με νόρμα μπορούμε να μιλήσουμε για συγκλίνουσες ακολουθίες.
- Αν $(X, \|\cdot\|)$ είναι ένας χώρος με νόρμα και (x_n) μια ακολουθία στον X , λέμε ότι η ακολουθία (x_n) συγκλίνει σε κάποιο $x \in X$, και γράφουμε $x_n \rightarrow x$, αν

$$\|x_n - x\| \longrightarrow 0$$

καθώς $n \rightarrow \infty$.

Ακολουθίες σε χώρους με νόρμα

- Σε κάθε χώρο με νόρμα μπορούμε να μιλήσουμε για συγκλίνουσες ακολουθίες.
- Αν $(X, \|\cdot\|)$ είναι ένας χώρος με νόρμα και (x_n) μια ακολουθία στον X , λέμε ότι η ακολουθία (x_n) συγκλίνει σε κάποιο $x \in X$, και γράφουμε $x_n \rightarrow x$, αν

$$\|x_n - x\| \longrightarrow 0$$

καθώς $n \rightarrow \infty$.

Έστω (x_n) μια ακολουθία στον X . Μιμούμενοι τις γνωστές αποδείξεις από τον Απειροστικό Λογισμό, μπορούμε να δείξουμε ότι:

- (α) Αν $x_n \rightarrow x$ και $x_n \rightarrow y$ για κάποια $x, y \in X$, τότε $x = y$ (μοναδικότητα του ορίου).
- (β) Αν $x_n \rightarrow x$ για κάποιο $x \in X$, τότε η (x_n) είναι φραγμένη. Δηλαδή, υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|x_n\| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

- Μια ακολουθία (x_n) στον X λέγεται *βασική* (ή *ακολουθία Cauchy*) αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $m, n \geq n_0$ να έχουμε

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

- Μια ακολουθία (x_n) στον X λέγεται *βασική* (ή *ακολουθία Cauchy*) αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $m, n \geq n_0$ να έχουμε

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Πάλι, μιμούμενοι τις γνωστές αποδείξεις από τον Απειροστικό Λογισμό, μπορούμε να δείξουμε ότι:

- (α) Αν η (x_n) είναι βασική, τότε είναι φραγμένη.
- (β) Αν $x_n \rightarrow x$ για κάποιο $x \in X$, τότε η (x_n) είναι βασική.

Χώρος Banach

Ένας χώρος με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται *πλήρης* (ή *χώρος Banach*) αν κάθε βασική ακολουθία (x_n) στον X είναι συγκλίνουσα, δηλαδή υπάρχει $x \in X$ ώστε $x_n \rightarrow 0$.

Χώρος Banach

Ένας χώρος με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται *πλήρης* (ή *χώρος Banach*) αν κάθε βασική ακολουθία (x_n) στον X είναι συγκλίνουσα, δηλαδή υπάρχει $x \in X$ ώστε $x_n \rightarrow 0$.

- Γνωρίζουμε ότι για ακολουθίες (x_n) στο $\mathbb{R}$ ισχύει ότι κάθε βασική ακολουθία συγκλίνει. Δηλαδή, ο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ είναι *πλήρης*.

Χώρος Banach

Ένας χώρος με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται *πλήρης* (ή *χώρος Banach*) αν κάθε βασική ακολουθία (x_n) στον X είναι συγκλίνουσα, δηλαδή υπάρχει $x \in X$ ώστε $x_n \rightarrow 0$.

- Γνωρίζουμε ότι για ακολουθίες (x_n) στο $\mathbb{R}$ ισχύει ότι κάθε βασική ακολουθία συγκλίνει. Δηλαδή, ο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ είναι *πλήρης*.
- Δεν είναι σωστό ότι κάθε χώρος με νόρμα είναι πλήρης. Μάλιστα, οι χώροι συναρτήσεων που συζητάμε σε αυτή την ενότητα (με την εξαίρεση του $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$) δεν είναι πλήρεις.

Πρόταση

Έστω $1 \leq p < \infty$. Ο χώρος $(C[a, b], \|\cdot\|_p)$ δεν είναι πλήρης.

Παράδειγμα

- Θα δείξουμε ότι ο $(C[0, 1], \|\cdot\|_1)$ δεν είναι πλήρης.

- Θα δείξουμε ότι ο $(C[0, 1], \|\cdot\|_1)$ δεν είναι πλήρης.
- Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $(f_n)_{n \geq 2}$ με

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ n(x - \frac{1}{2}) & \text{αν } \frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 1 & \text{αν } \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

- Δείχνουμε πρώτα ότι η (f_n) είναι βασική ακολουθία ως προς την $\|\cdot\|_1$. Για κάθε $n > m$ έχουμε $a_m = \frac{1}{2} + \frac{1}{m} > \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = a_n$ και

$$\begin{aligned}\|f_n - f_m\|_1 &= \int_0^{1/2} |f_n(x) - f_m(x)| dx + \int_{1/2}^{a_m} |f_n(x) - f_m(x)| dx + \int_{a_m}^1 |f_n(x) - f_m(x)| dx \\ &= \int_{1/2}^{a_m} |f_n(x) - f_m(x)| dx \leq a_m - \frac{1}{2} = \frac{1}{m}.\end{aligned}$$

- Δείχνουμε πρώτα ότι η (f_n) είναι βασική ακολουθία ως προς την $\|\cdot\|_1$. Για κάθε $n > m$ έχουμε $a_m = \frac{1}{2} + \frac{1}{m} > \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = a_n$ και

$$\begin{aligned}\|f_n - f_m\|_1 &= \int_0^{1/2} |f_n(x) - f_m(x)| dx + \int_{1/2}^{a_m} |f_n(x) - f_m(x)| dx + \int_{a_m}^1 |f_n(x) - f_m(x)| dx \\ &= \int_{1/2}^{a_m} |f_n(x) - f_m(x)| dx \leq a_m - \frac{1}{2} = \frac{1}{m}.\end{aligned}$$

- Έστω τώρα $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$, και αν $n > m \geq n_0$, τότε

$$\|f_n - f_m\|_1 \leq \frac{1}{m} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon,$$

δηλαδή, η (f_n) είναι βασική.

Παράδειγμα

- Ας υποθέσουμε ότι $f_n \rightarrow f$ (ως προς την $\|\cdot\|_1$) για κάποια συνεχή $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.
Δηλαδή,

$$\int_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx \longrightarrow 0$$

καθώς το $n \rightarrow \infty$.

- Ας υποθέσουμε ότι $f_n \rightarrow f$ (ως προς την $\|\cdot\|_1$) για κάποια συνεχή $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Δηλαδή,

$$\int_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx \rightarrow 0$$

καθώς το $n \rightarrow \infty$.

- Ειδικότερα,

$$0 \leq \int_0^{1/2} |f(x)| dx = \int_0^{1/2} |f_n(x) - f(x)| dx \leq \int_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx \rightarrow 0,$$

δηλαδή $\int_0^{1/2} |f(x)| dx = 0$.

Παράδειγμα

- Ας υποθέσουμε ότι $f_n \rightarrow f$ (ως προς την $\|\cdot\|_1$) για κάποια συνεχή $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Δηλαδή,

$$\int_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx \rightarrow 0$$

καθώς το $n \rightarrow \infty$.

- Ειδικότερα,

$$0 \leq \int_0^{1/2} |f(x)| dx = \int_0^{1/2} |f_n(x) - f(x)| dx \leq \int_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx \rightarrow 0,$$

δηλαδή $\int_0^{1/2} |f(x)| dx = 0$.

- Αφού η f είναι συνεχής στο $[0, 1/2]$, πρέπει να ισχύει $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [0, 1/2]$.

Παράδειγμα

- Έστω τώρα $\delta \in (1/2, 1)$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{2} + \frac{1}{n} < \delta$ για κάθε $n \geq n_0$.

Παράδειγμα

- Έστω τώρα $\delta \in (1/2, 1)$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{2} + \frac{1}{n} < \delta$ για κάθε $n \geq n_0$.
- Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $f_n(x) = 1$ για κάθε $x \in [\delta, 1]$.

Παράδειγμα

- Έστω τώρα $\delta \in (1/2, 1)$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{2} + \frac{1}{n} < \delta$ για κάθε $n \geq n_0$.
- Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $f_n(x) = 1$ για κάθε $x \in [\delta, 1]$.
- Όμως,

$$0 \leq \int_{\delta}^1 |f_n(x) - f(x)| dx \leq \int_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx \rightarrow 0,$$

άρα

$$\int_{\delta}^1 |1 - f(x)| dx = 0.$$

Παράδειγμα

- Έστω τώρα $\delta \in (1/2, 1)$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{2} + \frac{1}{n} < \delta$ για κάθε $n \geq n_0$.
- Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $f_n(x) = 1$ για κάθε $x \in [\delta, 1]$.
- Όμως,

$$0 \leq \int_{\delta}^1 |f_n(x) - f(x)| dx \leq \int_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx \rightarrow 0,$$

άρα

$$\int_{\delta}^1 |1 - f(x)| dx = 0.$$

- Από τη συνέχεια της f συμπεραίνουμε ότι $f(x) = 1$ για κάθε $x \in [\delta, 1]$, και αφού το δ ήταν τυχόν στο $(1/2, 1)$, έπεται ότι $f(x) = 1$ για κάθε $x \in (1/2, 1]$.

Παράδειγμα

- Έστω τώρα $\delta \in (1/2, 1)$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{2} + \frac{1}{n} < \delta$ για κάθε $n \geq n_0$.
- Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $f_n(x) = 1$ για κάθε $x \in [\delta, 1]$.
- Όμως,

$$0 \leq \int_{\delta}^1 |f_n(x) - f(x)| dx \leq \int_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx \rightarrow 0,$$

άρα

$$\int_{\delta}^1 |1 - f(x)| dx = 0.$$

- Από τη συνέχεια της f συμπεραίνουμε ότι $f(x) = 1$ για κάθε $x \in [\delta, 1]$, και αφού το δ ήταν τυχόν στο $(1/2, 1)$, έπεται ότι $f(x) = 1$ για κάθε $x \in (1/2, 1]$.
- Όμως, τότε, η f είναι ασυνεχής στο σημείο $x_0 = 1/2$, το οποίο είναι άτοπο αφού η f υποτέθηκε συνεχής στο $[0, 1]$.

Παράδειγμα

- Έστω τώρα $\delta \in (1/2, 1)$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{2} + \frac{1}{n} < \delta$ για κάθε $n \geq n_0$.
- Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $f_n(x) = 1$ για κάθε $x \in [\delta, 1]$.
- Όμως,

$$0 \leq \int_{\delta}^1 |f_n(x) - f(x)| dx \leq \int_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx \rightarrow 0,$$

άρα

$$\int_{\delta}^1 |1 - f(x)| dx = 0.$$

- Από τη συνέχεια της f συμπεραίνουμε ότι $f(x) = 1$ για κάθε $x \in [\delta, 1]$, και αφού το δ ήταν τυχόν στο $(1/2, 1)$, έπεται ότι $f(x) = 1$ για κάθε $x \in (1/2, 1]$.
- Όμως, τότε, η f είναι ασυνεχής στο σημείο $x_0 = 1/2$, το οποίο είναι άτοπο αφού η f υποτέθηκε συνεχής στο $[0, 1]$.
- Όπως θα δούμε σε επόμενο μάθημα, ο χώρος $(C[a, b], \|\cdot\|_{\infty})$ είναι πλήρης.

Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $1 \leq p < \infty$ ώστε $\int_a^b |f(x)|^p dx = 0$. Αποδείξτε ότι $\int_a^b |f(x)g(x)| dx = 0$.

Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $1 \leq p < \infty$ ώστε $\int_a^b |f(x)|^p dx = 0$. Αποδείξτε ότι $\int_a^b |f(x)g(x)| dx = 0$.

Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση $p = 1$. Η g είναι ολοκληρώσιμη, άρα είναι φραγμένη: υπάρχει $M > 0$ ώστε $|g(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a, b]$. Τότε,

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \int_a^b M|f(x)| dx = M \int_a^b |f(x)| dx = 0,$$

το οποίο αποδεικνύει ότι

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx = 0.$$

Ασκήσεις

Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $1 \leq p < \infty$ ώστε $\int_a^b |f(x)|^p dx = 0$. Αποδείξτε ότι $\int_a^b |f(x)g(x)| dx = 0$.

Ασκήσεις

Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $1 \leq p < \infty$ ώστε $\int_a^b |f(x)|^p dx = 0$. Αποδείξτε ότι $\int_a^b |f(x)g(x)| dx = 0$.

Έστω τώρα ότι $p > 1$. Από την ανισότητα Young, για κάθε $t > 0$ και κάθε $x \in [a, b]$ έχουμε

$$t|f(x)g(x)| = |f(x)| \cdot t|g(x)| \leq \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{t^q}{q}|g(x)|^q,$$

όπου q είναι ο συζυγής εκθέτης του p .

Ασκήσεις

Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $1 \leq p < \infty$ ώστε $\int_a^b |f(x)|^p dx = 0$. Αποδείξτε ότι $\int_a^b |f(x)g(x)| dx = 0$.

Έστω τώρα ότι $p > 1$. Από την ανισότητα Young, για κάθε $t > 0$ και κάθε $x \in [a, b]$ έχουμε

$$t|f(x)g(x)| = |f(x)| \cdot t|g(x)| \leq \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{t^q}{q}|g(x)|^q,$$

όπου q είναι ο συζυγής εκθέτης του p . Ολοκληρώνοντας στο $[a, b]$ παίρνουμε

$$t \int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \frac{1}{p} \int_a^b |f(x)|^p dx + \frac{t^q}{q} \int_a^b |g(x)|^q dx = \frac{t^q}{q} \int_a^b |g(x)|^q dx,$$

Ασκήσεις

Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $1 \leq p < \infty$ ώστε $\int_a^b |f(x)|^p dx = 0$. Αποδείξτε ότι $\int_a^b |f(x)g(x)| dx = 0$.

Έστω τώρα ότι $p > 1$. Από την ανισότητα Young, για κάθε $t > 0$ και κάθε $x \in [a, b]$ έχουμε

$$t|f(x)g(x)| = |f(x)| \cdot t|g(x)| \leq \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{t^q}{q}|g(x)|^q,$$

όπου q είναι ο συζυγής εκθέτης του p . Ολοκληρώνοντας στο $[a, b]$ παίρνουμε

$$t \int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \frac{1}{p} \int_a^b |f(x)|^p dx + \frac{t^q}{q} \int_a^b |g(x)|^q dx = \frac{t^q}{q} \int_a^b |g(x)|^q dx,$$

άρα

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \frac{t^{q-1}}{q} \int_a^b |g(x)|^q dx.$$

Ασκήσεις

Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $1 \leq p < \infty$ ώστε $\int_a^b |f(x)|^p dx = 0$. Αποδείξτε ότι $\int_a^b |f(x)g(x)| dx = 0$.

Έστω τώρα ότι $p > 1$. Από την ανισότητα Young, για κάθε $t > 0$ και κάθε $x \in [a, b]$ έχουμε

$$t|f(x)g(x)| = |f(x)| \cdot t|g(x)| \leq \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{t^q}{q}|g(x)|^q,$$

όπου q είναι ο συζυγής εκθέτης του p . Ολοκληρώνοντας στο $[a, b]$ παίρνουμε

$$t \int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \frac{1}{p} \int_a^b |f(x)|^p dx + \frac{t^q}{q} \int_a^b |g(x)|^q dx = \frac{t^q}{q} \int_a^b |g(x)|^q dx,$$

άρα

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \frac{t^{q-1}}{q} \int_a^b |g(x)|^q dx.$$

Παρατηρήστε ότι $q - 1 > 0$, άρα $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{q-1} = 0$.

Ασκήσεις

Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $1 \leq p < \infty$ ώστε $\int_a^b |f(x)|^p dx = 0$. Αποδείξτε ότι $\int_a^b |f(x)g(x)| dx = 0$.

Έστω τώρα ότι $p > 1$. Από την ανισότητα Young, για κάθε $t > 0$ και κάθε $x \in [a, b]$ έχουμε

$$t|f(x)g(x)| = |f(x)| \cdot t|g(x)| \leq \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{t^q}{q}|g(x)|^q,$$

όπου q είναι ο συζυγής εκθέτης του p . Ολοκληρώνοντας στο $[a, b]$ παίρνουμε

$$t \int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \frac{1}{p} \int_a^b |f(x)|^p dx + \frac{t^q}{q} \int_a^b |g(x)|^q dx = \frac{t^q}{q} \int_a^b |g(x)|^q dx,$$

άρα

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \frac{t^{q-1}}{q} \int_a^b |g(x)|^q dx.$$

Παρατηρήστε ότι $q - 1 > 0$, άρα $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{q-1} = 0$. Έπεται ότι

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^{q-1}}{q} \int_a^b |g(x)|^q dx = 0,$$

δηλαδή

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx = 0.$$