

Αρμονική Ανάλυση

Μάθημα 1

Φεβρουάριος 2024

Fourier

Κάθε συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ αναπαρίσταται ως σειρά της μορφής

$$(*) \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Fourier

Κάθε συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ αναπαρίσταται ως σειρά της μορφής

$$(*) \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Επιπλέον, αν το διάστημα στο οποίο ορίζεται η f είναι το $[0, \pi]$ τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μόνο ημίτονα ή μόνο συνημίτονα σε αυτήν την αναπαράσταση.

Fourier

Κάθε συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ αναπαρίσταται ως σειρά της μορφής

$$(*) \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Επιπλέον, αν το διάστημα στο οποίο ορίζεται η f είναι το $[0, \pi]$ τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μόνο ημίτονα ή μόνο συνημίτονα σε αυτήν την αναπαράσταση.

Ο Fourier ισχυρίστηκε ότι αρκεί να υπολογίσουμε τους *συντελεστές Fourier* $a_0, a_1, \dots, b_1, b_2, \dots$, δηλαδή να επιλύσουμε την $(*)$, και τότε αυτή πρέπει να ισχύει.

Εισαγωγή

Για να βρούμε τον b_m , για παράδειγμα, πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (*) με $\sin(mx)$ και ολοκληρώνοντας στο $[-\pi, \pi]$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(mx) dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} \sin(mx) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) \sin(mx) + b_n \sin(nx) \sin(mx)) \right] dx \\ &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \sin(mx) dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx \\ &= b_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(mx) dx = b_m \pi, \end{aligned}$$

διότι όλα τα υπόλοιπα ολοκληρώματα μηδενίζονται.

Εισαγωγή

Για να βρούμε τον b_m , για παράδειγμα, πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (*) με $\sin(mx)$ και ολοκληρώνοντας στο $[-\pi, \pi]$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(mx) dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} \sin(mx) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) \sin(mx) + b_n \sin(nx) \sin(mx)) \right] dx \\ &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \sin(mx) dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx \\ &= b_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(mx) dx = b_m \pi, \end{aligned}$$

διότι όλα τα υπόλοιπα ολοκληρώματα μηδενίζονται.

Άρα,

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(mx) dx.$$

Εισαγωγή

Ανάλογος υπολογισμός δείχνει ότι

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx.$$

Ανάλογος υπολογισμός δείχνει ότι

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx.$$

Για τον Fourier οι συντελεστές Fourier οποιασδήποτε (ενδεχομένως φραγμένης) συνάρτησης μπορούσαν πάντα να υπολογιστούν. Το πρόβλημα του υπολογισμού του b_m αναγόταν στον υπολογισμό του «εμβαδού» ανάμεσα στην $y = f(x) \sin(mx)$ και τον x -άξονα, από το $-\pi$ ως το π . Έτσι, το πρόβλημα της αναπαράστασης της f ως τριγωνομετρικής σειράς αναγόταν στον «γεωμετρικά προφανή ισχυρισμό» ότι το εμβαδόν κάτω από μια καμπύλη ορίζεται πάντα.

Ανάλογος υπολογισμός δείχνει ότι

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx.$$

Για τον Fourier οι συντελεστές Fourier οποιασδήποτε (ενδεχομένως φραγμένης) συνάρτησης μπορούσαν πάντα να υπολογιστούν. Το πρόβλημα του υπολογισμού του b_m αναγόταν στον υπολογισμό του «εμβαδού» ανάμεσα στην $y = f(x) \sin(mx)$ και τον x -άξονα, από το $-\pi$ ως το π . Έτσι, το πρόβλημα της αναπαράστασης της f ως τριγωνομετρικής σειράς αναγόταν στον «γεωμετρικά προφανή ισχυρισμό» ότι το εμβαδόν κάτω από μια καμπύλη ορίζεται πάντα.

Υπήρχαν όμως διάφορα ασαφή σημεία:

- Πώς ορίζεται το ολοκλήρωμα «τυχούσας» συνάρτησης;
- Γιατί επιτρέπεται να ολοκληρώσουμε όρο προς όρο, όπως κάναμε για να υπολογίσουμε τον b_m ;

Θα χρειαστεί λοιπόν, πριν μπούμε στο θέμα μας, να συνεννοηθούμε για το ολοκλήρωμα που θα χρησιμοποιήσουμε και για τη σχέση της σύγκλισης «σειρών συναρτήσεων» με αυτό το ολοκλήρωμα.

- Έστω $[a, b]$ ένα κλειστό διάστημα. Διαμέριση του $[a, b]$ θα λέμε κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ του $[a, b]$ με $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$. Θα γράφουμε $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ για να τονίσουμε αυτήν ακριβώς τη διάταξη.

- Έστω $[a, b]$ ένα κλειστό διάστημα. Διαμέριση του $[a, b]$ θα λέμε κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ του $[a, b]$ με $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$. Θα γράφουμε $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ για να τονίσουμε αυτήν ακριβώς τη διάταξη.
- Κάθε διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ χωρίζει το $[a, b]$ σε n υποδιαστήματα $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Ονομάζουμε πλάτος της διαμέρισης P τον αριθμό

$$\|P\| = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}\}.$$

Παρατηρήστε ότι δεν απαιτούμε από τα $[x_k, x_{k+1}]$ να έχουν το ίδιο μήκος.

- Έστω $[a, b]$ ένα κλειστό διάστημα. Διαμέριση του $[a, b]$ θα λέμε κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ του $[a, b]$ με $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$. Θα γράφουμε $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ για να τονίσουμε αυτήν ακριβώς τη διάταξη.
- Κάθε διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ χωρίζει το $[a, b]$ σε n υποδιαστήματα $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Ονομάζουμε πλάτος της διαμέρισης P τον αριθμό

$$\|P\| = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}\}.$$

Παρατηρήστε ότι δεν απαιτούμε από τα $[x_k, x_{k+1}]$ να έχουν το ίδιο μήκος.

- Η διαμέριση P_1 λέγεται εκλέπτυνση της P αν $P \subseteq P_1$, δηλαδή αν η P_1 προκύπτει από την P με την προσθήκη πεπερασμένων το πλήθος σημείων. Αν P_1, P_2 είναι δύο διαμερίσεις του $[a, b]$, η κοινή εκλέπτυνση των P_1, P_2 είναι η διαμέριση $P = P_1 \cup P_2$.

Ολοκλήρωμα Riemann

- Θεωρούμε τώρα μια φραγμένη συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ και μια διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ του $[a, b]$. Για κάθε $k = 0, 1, \dots, n-1$ ορίζουμε τους πραγματικούς αριθμούς

$$m_k(f, P) = m_k = \inf\{f(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\}$$

και

$$M_k(f, P) = M_k = \sup\{f(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\}.$$

Ολοκλήρωμα Riemann

- Θεωρούμε τώρα μια φραγμένη συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ και μια διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ του $[a, b]$. Για κάθε $k = 0, 1, \dots, n-1$ ορίζουμε τους πραγματικούς αριθμούς

$$m_k(f, P) = m_k = \inf\{f(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\}$$

και

$$M_k(f, P) = M_k = \sup\{f(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\}.$$

- Το άνω και το κάτω άθροισμα της f ως προς την P είναι οι αριθμοί

$$U(f, P) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k)$$

και

$$L(f, P) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k)$$

αντίστοιχα.

Ολοκλήρωμα Riemann

- Θεωρούμε τώρα μια φραγμένη συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ και μια διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ του $[a, b]$. Για κάθε $k = 0, 1, \dots, n-1$ ορίζουμε τους πραγματικούς αριθμούς

$$m_k(f, P) = m_k = \inf\{f(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\}$$

και

$$M_k(f, P) = M_k = \sup\{f(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\}.$$

- Το άνω και το κάτω άθροισμα της f ως προς την P είναι οι αριθμοί

$$U(f, P) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k)$$

και

$$L(f, P) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k)$$

αντίστοιχα.

- Είναι φανερό ότι για κάθε διαμέριση P ισχύει

$$L(f, P) \leq U(f, P)$$

αφού $m_k \leq M_k$ και $x_{k+1} - x_k > 0$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Ολοκλήρωμα Riemann

Ισχύει όμως μια πολύ πιο ισχυρή ανισότητα:

Λήμμα

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και P_1, P_2 δύο διαμερίσεις του $[a, b]$. Τότε,

$$L(f, P_1) \leq U(f, P_2).$$

Ισχύει όμως μια πολύ πιο ισχυρή ανισότητα:

Λήμμα

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και P_1, P_2 δύο διαμερίσεις του $[a, b]$. Τότε,

$$L(f, P_1) \leq U(f, P_2).$$

- Η απόδειξη βασίζεται στον ακόλουθο ισχυρισμό:

Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_n = b\}$ και $x_k < y < x_{k+1}$ για κάποιο $k = 0, 1, \dots, n-1$. Αν $P_1 = P \cup \{y\}$, τότε

$$L(f, P) \leq L(f, P_1) \leq U(f, P_1) \leq U(f, P).$$

Ισχύει όμως μια πολύ πιο ισχυρή ανισότητα:

Λήμμα

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και P_1, P_2 δύο διαμερίσεις του $[a, b]$. Τότε,

$$L(f, P_1) \leq U(f, P_2).$$

- Η απόδειξη βασίζεται στον ακόλουθο ισχυρισμό:

Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_n = b\}$ και $x_k < y < x_{k+1}$ για κάποιο $k = 0, 1, \dots, n-1$. Αν $P_1 = P \cup \{y\}$, τότε

$$L(f, P) \leq L(f, P_1) \leq U(f, P_1) \leq U(f, P).$$

- Απόδειξη του ισχυρισμού: Θέτουμε $m_k^{(1)} = \inf\{f(x) : x_k \leq x \leq y\}$ και $m_k^{(2)} = \inf\{f(x) : y \leq x \leq x_{k+1}\}$. Τότε, $m_k \leq m_k^{(1)}$ και $m_k \leq m_k^{(2)}$ (διότι $A \subseteq B \implies \inf B \leq \inf A$). Επομένως,

$$L(f, P_1) - L(f, P) = m_k^{(1)}(y - x_k) + m_k^{(2)}(x_{k+1} - y) - m_k(x_{k+1} - x_k) \geq 0.$$

Εντελώς ανάλογα δείχνουμε ότι $U(f, P_1) \leq U(f, P)$.

- Για την απόδειξη του λήμματος θεωρούμε την κοινή εκλέπτυνση $P = P_1 \cup P_2$ των P_1 και P_2 . Η P προκύπτει από την P_1 με προσθήκη πεπερασμένων το πλήθος σημείων. Αν εφαρμόσουμε τον ισχυρισμό πεπερασμένες το πλήθος φορές, παίρνουμε $L(f, P_1) \leq L(f, P)$.

- Για την απόδειξη του λήμματος θεωρούμε την κοινή εκλέπτυνση $P = P_1 \cup P_2$ των P_1 και P_2 . Η P προκύπτει από την P_1 με προσθήκη πεπερασμένων το πλήθος σημείων. Αν εφαρμόσουμε τον ισχυρισμό πεπερασμένες το πλήθος φορές, παίρνουμε $L(f, P_1) \leq L(f, P)$.
- Αφού η P προκύπτει από την P_2 με την προσθήκη πεπερασμένων το πλήθος σημείων, όμοια βλέπουμε ότι $U(f, P) \leq U(f, P_2)$. Από την άλλη πλευρά, $L(f, P) \leq U(f, P)$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω, έχουμε $L(f, P_1) \leq L(f, P) \leq U(f, P) \leq U(f, P_2)$.

Ολοκλήρωμα Riemann

Ορισμός του ολοκληρώματος

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη. Ορίζουμε σαν κάτω ολοκλήρωμα της f στο $[a, b]$ το

$$\int_a^b f(x) dx = \sup \left\{ L(f, P) : P \text{ διαμέριση του } [a, b] \right\}$$

και σαν άνω ολοκλήρωμα της f στο $[a, b]$ το

$$\overline{\int_a^b} f(x) dx = \inf \left\{ U(f, P) : P \text{ διαμέριση του } [a, b] \right\}.$$

Από το Λήμμα έχουμε $\int_a^b f(x) dx \leq \overline{\int_a^b} f(x) dx$.

Ολοκλήρωμα Riemann

Ορισμός του ολοκληρώματος

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη. Ορίζουμε σαν κάτω ολοκλήρωμα της f στο $[a, b]$ το

$$\int_a^b f(x) dx = \sup \left\{ L(f, P) : P \text{ διαμέριση του } [a, b] \right\}$$

και σαν άνω ολοκλήρωμα της f στο $[a, b]$ το

$$\overline{\int_a^b} f(x) dx = \inf \left\{ U(f, P) : P \text{ διαμέριση του } [a, b] \right\}.$$

Από το Λήμμα έχουμε $\int_a^b f(x) dx \leq \overline{\int_a^b} f(x) dx$.

Μια φραγμένη συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται *Riemann ολοκληρώσιμη* αν

$$\int_a^b f(x) dx = \overline{\int_a^b} f(x) dx.$$

Η κοινή αυτή τιμή λέγεται *ολοκλήρωμα Riemann* της f στο $[a, b]$ και συμβολίζεται με

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{ή} \quad \int_a^b f.$$

Το κριτήριο του Riemann

Θεώρημα: το κριτήριο Riemann

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε διαμέριση P του $[a, b]$ τέτοια ώστε

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon.$$

Το κριτήριο του Riemann

Θεώρημα: το κριτήριο Riemann

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε διαμέριση P του $[a, b]$ τέτοια ώστε

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon.$$

- Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Δηλαδή,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \overline{\int_a^b f(x)dx}.$$

Το κριτήριο του Riemann

Θεώρημα: το κριτήριο Riemann

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε διαμέριση P του $[a, b]$ τέτοια ώστε

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon.$$

- Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Δηλαδή,

$$\int_a^b f(x) dx = \underline{\int_a^b f(x) dx} = \overline{\int_a^b f(x) dx}.$$

- Έστω $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό του κάτω ολοκληρώματος, υπάρχει διαμέριση P_1 του $[a, b]$ τέτοια ώστε $\underline{\int_a^b f(x) dx} < L(f, P_1) + \frac{\varepsilon}{2}$.

Το κριτήριο του Riemann

Θεώρημα: το κριτήριο Riemann

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε διαμέριση P του $[a, b]$ τέτοια ώστε

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon.$$

- Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Δηλαδή,

$$\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b f(x)dx} = \overline{\int_a^b f(x)dx}.$$

- Έστω $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό του κάτω ολοκληρώματος, υπάρχει διαμέριση P_1 του $[a, b]$ τέτοια ώστε $\underline{\int_a^b f(x)dx} < L(f, P_1) + \frac{\varepsilon}{2}$.
- Από τον ορισμό του άνω ολοκληρώματος, υπάρχει διαμέριση P_2 του $[a, b]$ τέτοια ώστε $\overline{\int_a^b f(x)dx} > U(f, P_2) - \frac{\varepsilon}{2}$.

Το κριτήριο του Riemann

Θεώρημα: το κριτήριο Riemann

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε διαμέριση P του $[a, b]$ τέτοια ώστε

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon.$$

- Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Δηλαδή,

$$\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b f(x)dx} = \overline{\int_a^b f(x)dx}.$$

- Έστω $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό του κάτω ολοκληρώματος, υπάρχει διαμέριση P_1 του $[a, b]$ τέτοια ώστε $\underline{\int_a^b f(x)dx} < L(f, P_1) + \frac{\varepsilon}{2}$.
- Από τον ορισμό του άνω ολοκληρώματος, υπάρχει διαμέριση P_2 του $[a, b]$ τέτοια ώστε $\overline{\int_a^b f(x)dx} > U(f, P_2) - \frac{\varepsilon}{2}$.
- Θεωρούμε την κοινή εκλέπτυνση $P = P_1 \cup P_2$. Τότε,

$$U(f, P) - \frac{\varepsilon}{2} \leq U(f, P_2) - \frac{\varepsilon}{2} < \overline{\int_a^b f(x)dx} = \underline{\int_a^b f(x)dx} < L(f, P_1) + \frac{\varepsilon}{2} \leq L(f, P) + \frac{\varepsilon}{2},$$

απ' όπου έπεται ότι $0 \leq U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$.

Το κριτήριο του Riemann

- Αντίστροφα: υποθέτουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση P_ε του $[a, b]$ τέτοια ώστε $U(f, P_\varepsilon) < L(f, P_\varepsilon) + \varepsilon$.

Το κριτήριο του Riemann

- Αντίστροφα: υποθέτουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση P_ε του $[a, b]$ τέτοια ώστε $U(f, P_\varepsilon) < L(f, P_\varepsilon) + \varepsilon$.
- Τότε,

$$\overline{\int_a^b f(x)dx} \leq U(f, P_\varepsilon) < L(f, P_\varepsilon) + \varepsilon \leq \underline{\int_a^b f(x)dx} + \varepsilon,$$

δηλαδή

$$\underline{\int_a^b f(x)dx} \leq \overline{\int_a^b f(x)dx} \leq \underline{\int_a^b f(x)dx} + \varepsilon$$

για κάθε $\varepsilon > 0$.

Το κριτήριο του Riemann

- Αντίστροφα: υποθέτουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση P_ε του $[a, b]$ τέτοια ώστε $U(f, P_\varepsilon) < L(f, P_\varepsilon) + \varepsilon$.
- Τότε,

$$\overline{\int_a^b} f(x) dx \leq U(f, P_\varepsilon) < L(f, P_\varepsilon) + \varepsilon \leq \underline{\int_a^b} f(x) dx + \varepsilon,$$

δηλαδή

$$\underline{\int_a^b} f(x) dx \leq \overline{\int_a^b} f(x) dx \leq \underline{\int_a^b} f(x) dx + \varepsilon$$

για κάθε $\varepsilon > 0$.

- Έπεται ότι

$$\underline{\int_a^b} f(x) dx = \overline{\int_a^b} f(x) dx,$$

δηλαδή η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

Το κριτήριο του Riemann

- Αντίστροφα: υποθέτουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση P_ε του $[a, b]$ τέτοια ώστε $U(f, P_\varepsilon) < L(f, P_\varepsilon) + \varepsilon$.
- Τότε,

$$\overline{\int_a^b f(x)dx} \leq U(f, P_\varepsilon) < L(f, P_\varepsilon) + \varepsilon \leq \underline{\int_a^b f(x)dx} + \varepsilon,$$

δηλαδή

$$\underline{\int_a^b f(x)dx} \leq \overline{\int_a^b f(x)dx} \leq \underline{\int_a^b f(x)dx} + \varepsilon$$

για κάθε $\varepsilon > 0$.

- Έπεται ότι

$$\underline{\int_a^b f(x)dx} = \overline{\int_a^b f(x)dx},$$

δηλαδή η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

Παρατήρηση

Είναι μια απλή άσκηση (στις ακολουθίες) να δούμε ότι το κριτήριο του Riemann είναι ισοδύναμο με την εξής πρόταση: Μια φραγμένη συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν μπορούμε να βρούμε ακολουθία $\{P_n\}_{n=1}^\infty$ διαμερίσεων του $[a, b]$ τέτοια ώστε $U(f, P_n) - L(f, P_n) \rightarrow 0$ καθώς το $n \rightarrow \infty$.

Το κριτήριο του Riemann

- Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Riemann μπορούμε να δείξουμε ότι οι μονότονες και οι συνεχείς $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμες.

Το κριτήριο του Riemann

- Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Riemann μπορούμε να δείξουμε ότι οι μονότονες και οι συνεχείς $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμες.

Θεώρημα

Κάθε μονότονη συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

- Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι η f είναι αύξουσα. Η f είναι προφανώς φραγμένη.

Το κριτήριο του Riemann

- Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Riemann μπορούμε να δείξουμε ότι οι μονότονες και οι συνεχείς $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμες.

Θεώρημα

Κάθε μονότονη συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

- Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι η f είναι αύξουσα. Η f είναι προφανώς φραγμένη.
- Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τη διαμέριση $P_n = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$ του $[a, b]$ σε n ίσα υποδιαστήματα. Δηλαδή,

$$x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

- Τότε, αφού η f είναι αύξουσα έχουμε

$$U(f, P_n) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}) \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n} \cdot (f(x_1) + \cdots + f(x_n)),$$

ενώ

$$L(f, P_n) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n} \cdot (f(x_0) + \cdots + f(x_{n-1})).$$

Το κριτήριο του Riemann

- Τότε, αφού η f είναι αύξουσα έχουμε

$$U(f, P_n) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}) \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n} \cdot (f(x_1) + \cdots + f(x_n)),$$

ενώ

$$L(f, P_n) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n} \cdot (f(x_0) + \cdots + f(x_{n-1})).$$

- Άρα,

$$U(f, P_n) - L(f, P_n) = \frac{[f(x_n) - f(x_0)](b-a)}{n} = \frac{[f(b) - f(a)](b-a)}{n} \rightarrow 0.$$

Έπεται ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

Το κριτήριο του Riemann

Θεώρημα

Κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

Θεώρημα

Κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

- Έστω $\varepsilon > 0$. Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$, άρα ομοιόμορφα συνεχής. Μπορούμε λοιπόν να βρούμε $\delta > 0$ με την εξής ιδιότητα:
Αν $x, y \in [a, b]$ και $|x - y| < \delta$, τότε $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.

Θεώρημα

Κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

- Έστω $\varepsilon > 0$. Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$, άρα ομοιόμορφα συνεχής. Μπορούμε λοιπόν να βρούμε $\delta > 0$ με την εξής ιδιότητα:
Αν $x, y \in [a, b]$ και $|x - y| < \delta$, τότε $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.
- Μπορούμε επίσης να βρούμε $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\frac{b-a}{n} < \delta.$$

Χωρίζουμε το $[a, b]$ σε n υποδιαστήματα του ίδιου μήκους $\frac{b-a}{n}$. Θεωρούμε δηλαδή τη διαμέριση P_n που αποτελείται από τα σημεία

$$x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Το κριτήριο του Riemann

- Έστω $k = 0, 1, \dots, n-1$. Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[x_k, x_{k+1}]$, άρα παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή σε αυτό. Υπάρχουν δηλαδή $y'_k, y''_k \in [x_k, x_{k+1}]$ τέτοια ώστε

$$M_k = f(y'_k) \quad \text{και} \quad m_k = f(y''_k).$$

Το κριτήριο του Riemann

- Έστω $k = 0, 1, \dots, n-1$. Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[x_k, x_{k+1}]$, άρα παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή σε αυτό. Υπάρχουν δηλαδή $y'_k, y''_k \in [x_k, x_{k+1}]$ τέτοια ώστε

$$M_k = f(y'_k) \quad \text{και} \quad m_k = f(y''_k).$$

- Επιπλέον, το μήκος του $[x_k, x_{k+1}]$ είναι ίσο με $\frac{b-a}{n} < \delta$, άρα

$$|y'_k - y''_k| < \delta.$$

Το κριτήριο του Riemann

- Έστω $k = 0, 1, \dots, n-1$. Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[x_k, x_{k+1}]$, άρα παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή σε αυτό. Υπάρχουν δηλαδή $y'_k, y''_k \in [x_k, x_{k+1}]$ τέτοια ώστε

$$M_k = f(y'_k) \quad \text{και} \quad m_k = f(y''_k).$$

- Επιπλέον, το μήκος του $[x_k, x_{k+1}]$ είναι ίσο με $\frac{b-a}{n} < \delta$, άρα

$$|y'_k - y''_k| < \delta.$$

- Από την επιλογή του δ παίρνουμε

$$M_k - m_k = f(y'_k) - f(y''_k) = |f(y'_k) - f(y''_k)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Το κριτήριο του Riemann

- Έστω $k = 0, 1, \dots, n-1$. Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[x_k, x_{k+1}]$, άρα παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή σε αυτό. Υπάρχουν δηλαδή $y'_k, y''_k \in [x_k, x_{k+1}]$ τέτοια ώστε

$$M_k = f(y'_k) \quad \text{και} \quad m_k = f(y''_k).$$

- Επιπλέον, το μήκος του $[x_k, x_{k+1}]$ είναι ίσο με $\frac{b-a}{n} < \delta$, άρα

$$|y'_k - y''_k| < \delta.$$

- Από την επιλογή του δ παίρνουμε

$$M_k - m_k = f(y'_k) - f(y''_k) = |f(y'_k) - f(y''_k)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

- Έπεται ότι

$$U(f, P_n) - L(f, P_n) = \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)(x_{k+1} - x_k) < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{b-a} (x_{k+1} - x_k) = \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon.$$

Από το κριτήριο του Riemann, η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

- Μια παρατήρηση που πολλές φορές είναι χρήσιμη για να αποδείξουμε ότι μια φραγμένη συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη είναι η εξής:

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και $c \in (a, b)$ με την ιδιότητα ότι για κάθε μικρό $\delta > 0$ η f είναι ολοκληρώσιμη στα διαστήματα $[a, c - \delta]$ και $[c + \delta, b]$. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη.

- Μια παρατήρηση που πολλές φορές είναι χρήσιμη για να αποδείξουμε ότι μια φραγμένη συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη είναι η εξής:

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και $c \in (a, b)$ με την ιδιότητα ότι για κάθε μικρό $\delta > 0$ η f είναι ολοκληρώσιμη στα διαστήματα $[a, c - \delta]$ και $[c + \delta, b]$. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη.

Απόδειξη

Η f είναι φραγμένη, άρα υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a, b]$. Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και επιλέγουμε $\delta > 0$, αρκετά μικρό, ώστε $4\delta M \leq \varepsilon/3$. Στη συνέχεια βρίσκουμε διαμερίσεις P_1 και P_2 των $[a, c - \delta]$ και $[c + \delta, b]$ αντίστοιχα, έτσι ώστε $U(f, P_1) - L(f, P_1) < \varepsilon/3$ και $U(f, P_2) - L(f, P_2) < \varepsilon/3$. Αυτό μπορεί να γίνει, διότι η f είναι ολοκληρώσιμη σε καθένα από αυτά τα δύο διαστήματα.

Απόδειξη

Τώρα, αν θεωρήσουμε τη διαμέριση $P = P_1 \cup P_2$ παρατηρούμε ότι κάποιο από τα υποδιαστήματα που ορίζει η P είναι το $[c - \delta, c + \delta]$ και ισχύει ότι

$$\begin{aligned} U(f, P) - L(f, P) &= [U(f, P_1) - L(f, P_1)] + (M^* - m^*)((c + \delta) - (c - \delta)) + [U(f, P_2) - L(f, P_2)] \\ &\leq 2\delta(M^* - m^*) + \frac{2\varepsilon}{3}, \end{aligned}$$

όπου

$$M^* = \sup\{f(x) : c - \delta \leq x \leq c + \delta\} \leq M \quad \text{και} \quad m^* = \inf\{f(x) : c - \delta \leq x \leq c + \delta\} \geq -M,$$

άρα $2\delta(M^* - m^*) \leq 4\delta M \leq \varepsilon/3$, και τελικά, $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$.

Απόδειξη

Τώρα, αν θεωρήσουμε τη διαμέριση $P = P_1 \cup P_2$ παρατηρούμε ότι κάποιο από τα υποδιαστήματα που ορίζει η P είναι το $[c - \delta, c + \delta]$ και ισχύει ότι

$$\begin{aligned} U(f, P) - L(f, P) &= [U(f, P_1) - L(f, P_1)] + (M^* - m^*)((c + \delta) - (c - \delta)) + [U(f, P_2) - L(f, P_2)] \\ &\leq 2\delta(M^* - m^*) + \frac{2\varepsilon}{3}, \end{aligned}$$

όπου

$$M^* = \sup\{f(x) : c - \delta \leq x \leq c + \delta\} \leq M \quad \text{και} \quad m^* = \inf\{f(x) : c - \delta \leq x \leq c + \delta\} \geq -M,$$

άρα $2\delta(M^* - m^*) \leq 4\delta M \leq \varepsilon/3$, και τελικά, $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$.

- Μια φραγμένη συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται *τμηματικά συνεχής* αν έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία ασυνέχειας. Χρησιμοποιώντας πεπερασμένες το πλήθος φορές την προηγούμενη παρατήρηση, μία φορά «γύρω» από κάθε σημείο ασυνέχειας, μπορούμε να δείξουμε ότι όλες οι τμηματικά συνεχείς συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες.

Ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann

Στη συνέχεια αναφέρουμε τις πιο βασικές ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann και αποδεικνύουμε μερικές από αυτές. Η απόδειξη των υπολοίπων είναι μια καλή άσκηση.

Ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann

Στη συνέχεια αναφέρουμε τις πιο βασικές ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann και αποδεικνύουμε μερικές από αυτές. Η απόδειξη των υπολοίπων είναι μια καλή άσκηση.

Γραμμικότητα του ολοκληρώματος

Αν $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και $t, s \in \mathbb{R}$, τότε η $tf + sg$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και

$$\int_a^b (tf + sg)(x) dx = t \int_a^b f(x) dx + s \int_a^b g(x) dx.$$

Ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann

Στη συνέχεια αναφέρουμε τις πιο βασικές ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann και αποδεικνύουμε μερικές από αυτές. Η απόδειξη των υπολοίπων είναι μια καλή άσκηση.

Γραμμικότητα του ολοκληρώματος

Αν $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και $t, s \in \mathbb{R}$, τότε η $tf + sg$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και

$$\int_a^b (tf + sg)(x) dx = t \int_a^b f(x) dx + s \int_a^b g(x) dx.$$

Προσθετικότητα

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και $c \in (a, b)$. Η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ αν και μόνο αν είναι ολοκληρώσιμη στα $[a, c]$ και $[c, b]$. Τότε, ισχύει

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Βασική ανισότητα

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [a, b]$. Τότε,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann

Βασική ανισότητα

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [a, b]$. Τότε,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Σημείωση. Ο αριθμός

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

είναι η μέση τιμή της f στο $[a, b]$.

Ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann

Βασική ανισότητα

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [a, b]$. Τότε,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Σημείωση. Ο αριθμός

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

είναι η μέση τιμή της f στο $[a, b]$.

Μονοτονία

Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Τότε,

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

Θεώρημα

Έστω $f : [a, b] \rightarrow [m, M]$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση και $\phi : [m, M] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε, η $\phi \circ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη.

Ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann

Θεώρημα

Έστω $f : [a, b] \rightarrow [m, M]$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση και $\phi : [m, M] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε, η $\phi \circ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη.

Απόδειξη

- Έστω $\varepsilon > 0$. Θα βρούμε διαμέριση P του $[a, b]$ με την ιδιότητα $U(\phi \circ f, P) - L(\phi \circ f, P) < \varepsilon$. Το ζητούμενο έπεται από το κριτήριο του Riemann.

Ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann

Θεώρημα

Έστω $f : [a, b] \rightarrow [m, M]$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση και $\phi : [m, M] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε, η $\phi \circ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη.

Απόδειξη

- Έστω $\varepsilon > 0$. Θα βρούμε διαμέριση P του $[a, b]$ με την ιδιότητα $U(\phi \circ f, P) - L(\phi \circ f, P) < \varepsilon$. Το ζητούμενο έπεται από το κριτήριο του Riemann.
- Η ϕ είναι συνεχής στο $[m, M]$, άρα είναι φραγμένη: υπάρχει $A > 0$ ώστε $|\phi(\xi)| \leq A$ για κάθε $\xi \in [m, M]$. Επίσης, η ϕ είναι ομοιόμορφα συνεχής: αν θέσουμε $\varepsilon_1 = \varepsilon / (2A + b - a) > 0$, υπάρχει $0 < \delta < \varepsilon_1$ ώστε, για κάθε $\xi, \eta \in [m, M]$ με $|\xi - \eta| < \delta$ ισχύει $|\phi(\xi) - \phi(\eta)| < \varepsilon_1$.

Ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann

Απόδειξη

- Εφαρμόζοντας το κριτήριο του Riemann για την ολοκληρώσιμη συνάρτηση f , βρίσκουμε διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < x_{k+1} < \cdots < x_n = b\}$ ώστε

$$U(f, P) - L(f, P) = \sum_{k=0}^{n-1} (M_k(f) - m_k(f))(x_{k+1} - x_k) < \delta^2.$$

Ορίζουμε

$$I = \{0 \leq k \leq n-1 : M_k(f) - m_k(f) < \delta\}$$

$$J = \{0 \leq k \leq n-1 : M_k(f) - m_k(f) \geq \delta\}.$$

Ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann

Απόδειξη

- Παρατηρούμε τα εξής:

Απόδειξη

- Παρατηρούμε τα εξής:
- (i) Αν $k \in I$, τότε για κάθε $x, x' \in [x_k, x_{k+1}]$ έχουμε $|f(x) - f(x')| \leq M_k(f) - m_k(f) < \delta$. Παίρνοντας $\xi = f(x)$ και $\eta = f(x')$, έχουμε $\xi, \eta \in [m, M]$ και $|\xi - \eta| < \delta$. Άρα,

$$|(\phi \circ f)(x) - (\phi \circ f)(x')| = |\phi(\xi) - \phi(\eta)| < \varepsilon_1.$$

Αφού τα x, x' ήταν τυχόντα στο $[x_k, x_{k+1}]$, συμπεραίνουμε ότι $M_k(\phi \circ f) - m_k(\phi \circ f) \leq \varepsilon_1$ (εξηγήστε γιατί). Έπεται ότι

$$\sum_{k \in I} (M_k(\phi \circ f) - m_k(\phi \circ f))(x_{k+1} - x_k) \leq \varepsilon \sum_{k \in I} (x_{k+1} - x_k) \leq (b - a)\varepsilon_1.$$

Απόδειξη

- (ii) Για το J έχουμε

$$\delta \sum_{k \in J} (x_{k+1} - x_k) \leq \sum_{k \in J} (M_k(f) - m_k(f))(x_{k+1} - x_k) < \delta^2,$$

άρα

$$\sum_{k \in J} (x_{k+1} - x_k) < \delta < \varepsilon_1.$$

Απόδειξη

- (ii) Για το J έχουμε

$$\delta \sum_{k \in J} (x_{k+1} - x_k) \leq \sum_{k \in J} (M_k(f) - m_k(f))(x_{k+1} - x_k) < \delta^2,$$

άρα

$$\sum_{k \in J} (x_{k+1} - x_k) < \delta < \varepsilon_1.$$

- Επίσης,

$$|(\phi \circ f)(x) - (\phi \circ f)(x')| \leq |(\phi \circ f)(x)| + |(\phi \circ f)(x')| \leq 2A$$

για κάθε $x, x' \in [x_k, x_{k+1}]$, άρα $M_k(\phi \circ f) - m_k(\phi \circ f) \leq 2A$ για κάθε $k \in J$.
Έπεται ότι

$$\sum_{k \in J} (M_k(\phi \circ f) - m_k(\phi \circ f))(x_{k+1} - x_k) \leq 2A \sum_{k \in J} (x_{k+1} - x_k) < 2A\varepsilon_1.$$

Απόδειξη

- Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} U(\phi \circ f, P) - L(\phi \circ f, P) &= \sum_{k=0}^{n-1} (M_k(\phi \circ f) - m_k(\phi \circ f))(x_{k+1} - x_k) \\ &= \sum_{k \in I} (M_k(\phi \circ f) - m_k(\phi \circ f))(x_{k+1} - x_k) + \sum_{k \in J} (M_k(\phi \circ f) - m_k(\phi \circ f))(x_{k+1} - x_k) \\ &< (b - a)\varepsilon_1 + 2A\varepsilon_1 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

Ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann

Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο θεώρημα μπορούμε να ελέγξουμε εύκολα την ολοκληρωσιμότητα διαφόρων συναρτήσεων που προκύπτουν από τη σύνθεση μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης f με κατάλληλες συνεχείς συναρτήσεις.

Ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann

Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο θεώρημα μπορούμε να ελέγξουμε εύκολα την ολοκληρωσιμότητα διαφόρων συναρτήσεων που προκύπτουν από τη σύνθεση μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης f με κατάλληλες συνεχείς συναρτήσεις.

Θεώρημα

Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Τότε:

(α) Η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη και

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

(β) Για κάθε $p > 0$ η $|f|^p$ είναι ολοκληρώσιμη. Ειδικότερα, η f^2 είναι ολοκληρώσιμη.

(γ) Η fg είναι ολοκληρώσιμη.

Ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann

Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο θεώρημα μπορούμε να ελέγξουμε εύκολα την ολοκληρωσιμότητα διαφόρων συναρτήσεων που προκύπτουν από τη σύνθεση μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης f με κατάλληλες συνεχείς συναρτήσεις.

Θεώρημα

Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Τότε:

(α) Η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη και

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

(β) Για κάθε $p > 0$ η $|f|^p$ είναι ολοκληρώσιμη. Ειδικότερα, η f^2 είναι ολοκληρώσιμη.

(γ) Η fg είναι ολοκληρώσιμη.

- Τα (α) και (β) είναι άμεσες συνέπειες του Θεωρήματος. Για το (γ) γράφουμε

$$fg = \frac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{4}$$

και χρησιμοποιούμε το (β) σε συνδυασμό με το γεγονός ότι οι $f+g$, $f-g$ είναι ολοκληρώσιμες.

1. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει διαμέριση P του $[a, b]$ ώστε $L(f, P) = U(f, P)$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

1. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει διαμέριση P του $[a, b]$ ώστε $L(f, P) = U(f, P)$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.
2. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b] \cap \mathbb{Q}$. Αποδείξτε ότι

$$\int_a^b f(x) dx = 0.$$

1. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει διαμέριση P του $[a, b]$ ώστε $L(f, P) = U(f, P)$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.
2. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b] \cap \mathbb{Q}$. Αποδείξτε ότι

$$\int_a^b f(x) dx = 0.$$

3. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε: για κάθε $[\gamma, \delta] \subseteq [a, b]$ ισχύει $\inf\{f(x) : \gamma \leq x \leq \delta\} \leq \lambda$. Αποδείξτε ότι

$$\int_a^b f(x) dx \leq \lambda(b - a).$$

4. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση με

$$\int_a^b f(x) dx > 0.$$

Αποδείξτε ότι υπάρχει $\lambda > 0$ και μη τετριμμένο υποδιάστημα $[\gamma, \delta] \subseteq [a, b]$ ώστε $f(x) \geq \lambda$ για κάθε $x \in [\gamma, \delta]$.

4. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση με

$$\int_a^b f(x) dx > 0.$$

Αποδείξτε ότι υπάρχει $\lambda > 0$ και μη τετριμμένο υποδιάστημα $[\gamma, \delta] \subseteq [a, b]$ ώστε $f(x) \geq \lambda$ για κάθε $x \in [\gamma, \delta]$.

5. (α) Έστω $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η g είναι συνεχής παντού, εκτός από ένα σημείο $x_0 \in (a, b)$. Αποδείξτε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη.
(β) Αποδείξτε ότι κάθε τμηματικά συνεχής συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη.