Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωσης (2023–24)
Υποδείξεις για τις Ασκήσεις των Φυλλαδίων

1.1. Έστω $X \neq \varnothing$ και $\mathcal{A}$ μια σ-άλγεβρα στο X. Θεωρούμε $A \subseteq X$ και ορίζουμε

$$\mathcal{F}_A = \{E \in \mathcal{A} : A \subseteq E \ \text{ ή } \ A \cap E = \varnothing\}.$$

Αποδείξτε ότι η $\mathcal{F}_A$ είναι σ-άλγεβρα.

Υπόδειξη: (α) Αρχικά παρατηρούμε ότι $X \in \mathcal{F}_A$ διότι $X \in \mathcal{A}$ και $A \subseteq X$.

(β) Έστω $E \in \mathcal{F}_A$. Τότε, $E \in \mathcal{A}$, άρα $E^c \in \mathcal{A}$ και είτε $A \subseteq E$ οπότε $A \cap E^c = \varnothing$ ή $A \cap E = \varnothing$ οπότε $A \subseteq E^c$. Σε κάθε περίπτωση, $E^c \in \mathcal{F}_A$.

(γ) Έστω $E_n \in \mathcal{F}_A$, $n \geqslant 1$. Τότε $E_n \in \mathcal{A}$ για κάθε $n \geqslant 1$, άρα $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$. Διακρίνουμε δύο περιπτώστεις:

- $A \cap E_n = \varnothing$ για κάθε $n \geqslant 1$. Τότε, $A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap E_n) = \varnothing$, άρα $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{F}_A$.
- Υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $A \subseteq E_m$. Τότε, $A \subseteq E_m \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, άρα $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{F}_A$.

Από τα (α), (β) και (γ) συμπεραίνουμε ότι η $\mathcal{F}_A$ είναι σ-άλγεβρα.

1.2. (α) Έστω X μη κενό σύνολο και $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}_{n+1} \subseteq \cdots$ μια αύξουσα ακολουθία αλγεβρών στο X. Αποδείξτε ότι η οικογένεια $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ είναι άλγεβρα στο X.

(β) Έστω X μη κενό σύνολο και $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}_{n+1} \subseteq \cdots$ μια αύξουσα ακολουθία σ-αλγεβρών στο X. Είναι απαραίτητα σωστό ότι η οικογένεια $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ είναι σ-άλγεβρα στο X;

Υπόδειξη: (α) Θέτουμε $\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$. Παρατηρούμε ότι ισχύουν τα εξής:

(i) Από την υπόθεση έχουμε ότι $X \in \mathcal{A}_n$ (και μάλιστα) για κάθε $n \geqslant 1$, άρα $X \in \mathcal{A}$.

(ii) Αν $F \in \mathcal{A}$, τότε υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $F \in \mathcal{A}_m$, και αφού η $\mathcal{A}_m$ είναι άλγεβρα έχουμε $X \setminus F \in \mathcal{A}_m$, άρα $X \setminus F \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n = \mathcal{A}$.

(iii) Αν $F_1, \ldots, F_k \in \mathcal{A}$ τότε υπάρχουν $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ ώστε $F_j \in \mathcal{A}_{n_j}$ για κάθε $j = 1, \ldots, k$. Αν θέσουμε $N = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$ τότε $\mathcal{A}_{n_j} \subseteq \mathcal{A}_N$ από την υπόθεση, άρα $F_j \in \mathcal{A}_N$ για κάθε $j = 1, \ldots, k$. Αφού η $\mathcal{A}_N$ είναι άλγεβρα, έπεται ότι $F_1 \cup \cdots \cup F_k \in \mathcal{A}_N$, άρα $F_1 \cup \cdots \cup F_k \in \mathcal{A}$.

Από τα (i)–(iii) έπεται ότι η οικογένεια $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα.

(β) Δεν είναι απαραίτητα σωστό. Θεωρούμε το σύνολο $X = \mathbb{N}$ και τις εξής οικογένειες υποσυνόλων του $\mathbb{N}$:

$$\mathcal{A}_n = \{B \subseteq \mathbb{N} : B \subseteq \{1, \ldots, n\} \ \text{ ή } \ \mathbb{N} \setminus B \subseteq \{1, \ldots, n\}\}.$$

Είναι σαφές ότι $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}_{n+1} \subseteq \cdots$ και μπορείτε να ελέγξετε ότι κάθε $\mathcal{A}_n$ είναι σ-άλγεβρα. Οι δύο πρώτες ιδιότητες ελέγχονται άμεσα και για την τρίτη θεωρήστε $B_k \in \mathcal{A}_n$, $k \geqslant 1$ και διακρίνετε δύο περιπτώσεις: αν όλα τα $B_k \subseteq \{1, \ldots, n\}$ τότε $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \subseteq \{1, \ldots, n\}$, ενώ αν υπάρχει m ώστε $\mathbb{N} \setminus B_m \subseteq \{1, \ldots n\}$ τότε $\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right)^c = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k^c \subseteq B_m^c \subseteq \{1, \ldots, n\}$. Και στις δύο περιπτώσεις έπεται ότι $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{A}_n$.

Τώρα, παρατηρήστε ότι

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n = \{B \subseteq \mathbb{N} : B \ \text{ πεπερασμένο ή } \ \mathbb{N} \setminus B \ \text{ πεπερασμένο}\}.$$

Αυτή όμως η οικογένεια, ας την πούμε $\mathcal{A}$, δεν είναι σ-άλγεβρα. Το σύνολο $\{2n : n \in \mathbb{N}\}$ δεν ανήκει στην $\mathcal{A}$, είναι όμως αριθμήσιμη ένωση μονοσυνόλων και όλα τα μονοσύνολα φυσικών ανήκουν στην $\mathcal{A}$.

1.3. Έστω $\Delta = \{(q, q+1) : q \in \mathbb{Q}\}$. Αποδείξτε ότι $\sigma(\Delta) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Υπόδειξη: Παρατηρούμε αρχικά ότι $\Delta \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$ αφού κάθε ανοικτό διάστημα είναι Borel σύνολο, άρα $\sigma(\Delta) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Τώρα, για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ μπορούμε να γράψουμε

$$(a, +\infty) = \bigcup_{\{q \in \mathbb{Q} : q > a\}} (q, q+1) \in \sigma(\Delta) \quad \text{και} \quad (-\infty, b) = \bigcup_{\{q \in \mathbb{Q} : q < b\}} (q-1, q) \in \sigma(\Delta)$$

(αριθμήσιμες ενώσεις διαστημάτων από την Δ). Έπεται ότι, για κάθε $a < b$ στο $\mathbb{R}$, το ανοικτό διάστημα

$$(a, b) = (a, +\infty) \cap (-\infty, b) \in \sigma(\Delta).$$

Δηλαδή, $\Delta_0 \subseteq \sigma(\Delta)$, όπου $\Delta_0 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$. Όμως, γνωρίζουμε ότι $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\Delta_0)$, άρα $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \sigma(\Delta)$.

1.4. (α) Έστω $\mathcal{A}$ μια σ–άλγεβρα στο X και $f : X \to Y$. Αποδείξτε ότι η οικογένεια

$$\{B \subseteq Y \, : \, f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$$

είναι σ–άλγεβρα στο Y.

(β) Έστω $\mathcal{C}$ μια σ–άλγεβρα στο Y και $\mathcal{E}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του Y για την οποία ισχύει $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{C}$. Αποδείξτε ότι αν $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ για κάθε $B \in \mathcal{E}$, τότε $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ για κάθε $B \in \mathcal{C}$.

(γ) Έστω (X, d) και (Y, τ) μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$ συνεχής. Αποδείξτε ότι: αν το B είναι Borel σύνολο στον Y, τότε το $f^{-1}(B)$ είναι Borel σύνολο στον X.

Υπόδειξη: (α) Θέτουμε $\mathcal{F} = \{B \subseteq Y \, : \, f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$. Έχουμε $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{A}$, άρα $Y \in \mathcal{F}$. Έστω τώρα $B \in \mathcal{F}$. Τότε, $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ και συνεπώς $f^{-1}(B^c) = X \setminus f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, άρα $B^c \in \mathcal{F}$. Τέλος, αν $B_n \in \mathcal{F}$, $n \geqslant 1$, τότε $f^{-1}(B_n) \in \mathcal{A}$ για κάθε $n \geqslant 1$, άρα

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n) \in \mathcal{A},$$

το οποίο σημαίνει ότι $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{F}$. Τα παραπάνω δείχνουν ότι η $\mathcal{F}$ είναι σ-άλγεβρα στο Y.

(β) Θέτουμε $\mathcal{F} = \{B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$. Από το (α) η $\mathcal{F}$ είναι σ-άλγεβρα στο Y και από την υπόθεση έχουμε ότι $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$. Έπεται ότι

$$\mathcal{C} = \sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{F}.$$

Αυτό σημαίνει ότι κάθε $B \in \mathcal{C}$ ανήκει στην $\mathcal{F}$, δηλαδή $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

(γ) Θέτουμε $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$, $\mathcal{C} = \mathcal{B}(Y)$ και $\mathcal{E} = \{B \subseteq Y : B \text{ ανοικτό}\}$. Τώρα, εφαρμόζουμε το (β). Παρατηρήστε ότι $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{B}(Y)$ και για κάθε $B \in \mathcal{E}$ ισχύει ότι το $f^{-1}(B)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X (διότι η f είναι συνεχής) άρα $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Έπεται ότι $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ για κάθε $B \in \mathcal{C}$, δηλαδή για κάθε $B \in \mathcal{B}(Y)$ έχουμε ότι $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(X)$.

1.5. Εξηγήστε γιατί δεν υπάρχει χώρος μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ με την ιδιότητα

$$\{\mu(E) : E \in \mathcal{A}\} = [0, 1).$$

Υπόδειξη: Έστω $B = \{\mu(E) : E \in \mathcal{A}\}$. Από την υπόθεση έχουμε ότι $\mu(X) \in [0,1)$ άρα $\mu(X) < 1$. Από τη μονοτονία του μ έχουμε $\mu(E) \leqslant \mu(X)$ για κάθε $E \in \mathcal{A}$, άρα ο $\mu(X)$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα (μάλιστα είναι το μέγιστο στοιχείο) του B. Έπεται ότι

$$1 = \sup([0,1)) = \sup(B) = \mu(X),$$

το οποίο είναι άτοπο.

1.6. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πιθανότητας και $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ τέτοια ώστε $\sum_{k=1}^n \mu(A_k) > n-1$. Αποδείξτε ότι

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) > 0.$$

Υπόδειξη: Παρατηρούμε ότι

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k^c\right) \leqslant \sum_{k=1}^n \mu(A_k^c) = \sum_{k=1}^n (1 - \mu(A_k)) = n - \sum_{k=1}^n \mu(A_k) < n - (n-1) = 1.$$

Συνεπώς,

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) = 1 - \mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k^c\right) > 0.$$

1.7. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος πεπερασμένου μέτρου και (A_n) μια ακολουθία υποσυνόλων του X για την οποία υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\mu(A_n) \geqslant \delta$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $\mu(\limsup_n A_n) > 0$.

Υπόδειξη: Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε $\bigcup\limits_{n=k}^{\infty} A_n \supseteq A_k$, άρα

$$\mu\Big(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\Big) \geqslant \mu(A_k) \geqslant \delta.$$

Αν θέσουμε $E_k = \bigcup\limits_{n=k}^{\infty} A_n$, τότε $E_k \searrow \limsup A_n$ και $\mu(E_1) \leqslant \mu(X) < \infty$. Συνεπώς,

$$\mu(\limsup A_n) = \lim_{k\to\infty} \mu(E_k) \geqslant \delta > 0.$$

1.8. Έστω $\mathcal{F}$ μια άλγεβρα στο X και έστω μ ένα πεπερασμένο μέτρο στον $(X, \sigma(\mathcal{F}))$. Αποδείξτε ότι για κάθε $A \in \sigma(\mathcal{F})$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $F \in \mathcal{F}$ ώστε $\mu(A \triangle F) < \varepsilon$, όπου $A \triangle F = (A \setminus F) \cup (F \setminus A)$ είναι η συμμετρική διαφορά των A και F.

Υπόδειξη: Ορίζουμε

$$\mathcal{A} = \{A \in \sigma(\mathcal{F}) : \text{ για κάθε } \varepsilon > 0 \text{ υπάρχει } F \in \mathcal{F} \text{ ώστε } \mu(A \triangle F) < \varepsilon\}.$$

Είναι φανερό ότι $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ (αν $A \in \mathcal{F}$ τότε παίρνοντας $F = A$ έχουμε $A \triangle F = A \triangle A = \varnothing$). Ειδικότερα, $\mathcal{A} \neq \varnothing$.

Αν $A \in \mathcal{A}$ και αν $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει $F \in \mathcal{F}$ ώστε $\mu(A \triangle F) < \varepsilon$. Παρατηρούμε ότι $F^c \in \mathcal{F}$ και $A^c \triangle F^c = A \triangle F$, άρα $\mu(A^c \triangle F^c) < \varepsilon$. Έπεται ότι $A^c \in \mathcal{A}$.

Έστω $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία ξένων συνόλων στην $\mathcal{A}$ και έστω $\varepsilon > 0$. Αφού το μ είναι πεπερασμένο μέτρο, έχουμε $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \infty$. Συνεπώς, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\sum_{n=k+1}^{\infty} \mu(A_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Για $n =$

$1,\dots,k$ βρίσκουμε $F_n \in \mathcal{F}$ ώστε $\mu(A_n \triangle F_n) < \frac{\varepsilon}{2k}$. Αφού η $\mathcal{F}$ είναι άλγεβρα, η ένωση $F = F_1 \cup \cdots \cup F_k \in \mathcal{F}$. Παρατηρήστε ότι

$$\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \triangle F \subseteq \Big(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n\Big) \cup (A_1 \triangle F_1) \cup \cdots \cup (A_k \triangle F_k).$$

Συνεπώς,

$$\mu\Big(\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \triangle F\Big) \leqslant \sum_{n=k+1}^{\infty} \mu(A_n) + \sum_{n=1}^{k} \mu(A_n \triangle F_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=1}^{k} \frac{\varepsilon}{2k} = \varepsilon.$$

Έπεται ότι $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Από τα παραπάνω, η $\mathcal{A}$ είναι σ–άλγεβρα. Αφού $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{F}$, έχουμε ότι $\mathcal{A} \supseteq \sigma(\mathcal{F})$. Όμως, από τον ορισμό της $\mathcal{A}$ έχουμε και τον εγκλεισμό $\mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{F})$, άρα τελικά συμπεραίνουμε ότι $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{F})$.

1.9. Έστω $\mathcal{A}$ μια σ–άλγεβρα στο μη κενό σύνολο X και $\mathcal{E}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του X για την οποία ισχύει $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A}$. Θεωρούμε δύο μέτρα μ και ν στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$ τέτοια ώστε $\mu(X) = \nu(X) < \infty$ και $\mu(E) = \nu(E)$ για κάθε $E \in \mathcal{E}$. Είναι απαραίτητα σωστό ότι $\mu = \nu$;

Υπόδειξη: Δίνουμε αντιπαράδειγμα. Θεωρούμε το σύνολο $X = \{a, b, c, d\}$, την σ-άλγεβρα $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ και την οικογένεια

$$\mathcal{E} = \{\{a, b\}, \{b, c\}\}$$

υποσυνόλων του X. Μπορείτε να ελέγξετε ότι $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$. Θεωρούμε τώρα τα μέτρα μ και ν στην $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ που ορίζονται από τις

$$\mu(\{a\}) = \mu(\{c\}) = 1, \qquad \mu(\{b\}) = \mu(\{d\}) = 0$$

και

$$\nu(\{a\}) = \nu(\{c\}) = 0, \qquad \nu(\{b\}) = \nu(\{d\}) = 1$$

Παρατηρούμε ότι $\mu(X) = \nu(X) = 2 < \infty$ και $\mu(E) = \nu(E)$ για κάθε $E \in \mathcal{E}$, αφού

$$\mu(\{a, b\}) = \nu(\{a, b\}) = 1 \quad \text{και} \quad \mu(\{b, c\}) = \nu(\{b, c\}) = 1.$$

Όμως, $\mu(\{a\}) = 1 \neq 0 = \nu(\{a\})$, άρα δεν ισχύει ότι $\mu = \nu$.

1.10. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου τέτοιος ώστε για κάθε $\varnothing \neq E \in \mathcal{A}$ να ισχύει $0 < \mu(E) < \infty$. Για κάθε $x \in X$ ορίζουμε

$$f(x) = \inf\{\mu(E) : E \in \mathcal{A}, x \in E\}.$$

Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in X$ υπάρχει μοναδικό σύνολο $A_x \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $x \in A_x$ και $\mu(A_x) = f(x)$. Αποδείξτε επίσης ότι αν $x, y \in X$ τότε είτε $A_x = A_y$ ή $A_x \cap A_y = \varnothing$.

Υπόδειξη: Έστω $x \in X$. Από τον ορισμό της f, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $A_n \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $x \in A_n$ και $\mu(A_n) < f(x) + \frac{1}{n}$. Αν θέσουμε $A_x = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, τότε $A_x \in \mathcal{A}$, $x \in A_x$ και $f(x) \leqslant \mu(A_x) \leqslant \mu(A_n) < f(x) + 1/n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $\mu(A_x) = f(x)$. Έστω ότι υπάρχει $B_x \neq A_x$ στην $\mathcal{A}$ με $x \in B_x$ και $\mu(B_x) = f(x)$. Παρατηρούμε ότι $A_x \cap B_x \in \mathcal{A}$, $x \in A_x \cap B_x$ και $A_x \cap B_x \subseteq A_x$, άρα

$$f(x) \leqslant \mu(A_x \cap B_x) \leqslant \mu(A_x) = f(x).$$

Έπεται ότι $\mu(A_x \cap B_x) = \mu(A_x)$ και (αφού $\mu(A_x) < \infty$) έπεται ότι $\mu(A_x \setminus B_x) = \mu(A_x) - \mu(A_x \cap B_x) = 0$. Όμως τότε $A_x \setminus B_x = \varnothing$ από την υπόθεση. Όμοια, $B_x \setminus A_x = \varnothing$, άρα $A_x = B_x$ το οποίο είναι άτοπο.

Έστω $x \neq y$ στο X. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Αν $x \in A_y$ τότε $x \in A_x \cap A_y$. Έχουμε $f(x) \leqslant \mu(A_x \cap A_y) \leqslant \mu(A_x) = f(x)$. Δηλαδή, $\mu(A_x \cap A_y) = \mu(A_x)$. Έπεται ότι $\mu(A_x \setminus A_y) = \mu(A_x) - \mu(A_x \cap A_y) = 0$. Όμως τότε $A_x \setminus A_y = \varnothing$ από την υπόθεση. Όμοια, $A_y \setminus A_x = \varnothing$, άρα $A_x = A_y$.
- Αν $x \notin A_y$ τότε $x \in A_x \setminus A_y$. Έχουμε $f(x) \leqslant \mu(A_x \setminus A_y) \leqslant \mu(A_x) = f(x)$. Δηλαδή, $\mu(A_x \setminus A_y) = \mu(A_x)$. Έπεται ότι $\mu(A_x \cap A_y) = \mu(A_x) - \mu(A_x \setminus A_y) = 0$. Όμως τότε $A_x \cap A_y = \varnothing$ από την υπόθεση.

2.1. (α) Έστω μ^* εξωτερικό μέτρο στο X. Αν $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια αύξουσα ακολουθία μ^*–μετρήσιμων υποσυνόλων του X, αποδείξτε ότι για κάθε $E \subseteq X$ ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \mu^*(A_n \cap E) = \mu^*\big(\cup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap E)\big).$$

(β) Σωστό ή λάθος; Αν $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία υποσυνόλων του $[0,1]$ τότε

$$\lim_{n\to\infty} \lambda^*(A_n) = \lambda^*\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big).$$

Υπόδειξη: (α) Θέτουμε $B_n = A_n \cap E$ και δείχνουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \mu^*(B_n) = \mu^*\big(\cup_{n=1}^{\infty} B_n\big).$$

Αρχικά παρατηρούμε ότι η ακολουθία $\mu^*(B_n)$ είναι αύξουσα και $\mu^*(B_n) \leqslant \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)$ για κάθε $n \geqslant 1$ (από τη μονοτονία του εξωτερικού μέτρου). Συνεπώς, υπάρχει το $\lim\limits_{n\to\infty} \mu^*(B_n)$ και ισχύει η ανισότητα

$$\lim_{n\to\infty} \mu^*(B_n) \leqslant \mu^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\Big).$$

Αν $\lim_{n\to\infty} \mu^*(B_n) = \infty$ έπεται άμεσα το ζητούμενο, υποθέτουμε λοιπόν ότι $\lim_{n\to\infty} \mu^*(B_n) < \infty$. Για κάθε $n \geqslant 1$ βρίσκουμε μ^*-μετρήσιμο $E_n \supseteq B_n$ τέτοιο ώστε $\mu(E_n) = \mu^*(B_n)$. Στη συνέχεια ορίζουμε $C_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k$ για $n \geqslant 1$. Παρατηρούμε ότι $C_n \supseteq E_n$ και ότι $B_n \subseteq B_k \subseteq E_k$ για κάθε $k \geqslant n$, άρα $B_n \subseteq C_n$. Τελικά,

$$B_n \subseteq C_n \subseteq E_n \quad \text{και} \quad \mu^*(B_n) = \mu(C_n) = \mu(E_n)$$

για κάθε $n \geqslant 1$. Από τη συνέχεια του μ, για την αύξουσα ακολουθία $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \mu^*(B_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(C_n) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\Big) \geqslant \mu^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\Big),$$

όπου η τελευταία ανισότητα ισχύει διότι $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \supseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Έπεται το ζητούμενο.

(β) Έχουμε δει ότι υπάρχει ακολουθία ξένων ανά δύο υποσυνόλων N_n του $[-1,2]$ με τις εξής ιδιότητες: (i) $[0,1] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$, και (ii) κάθε $N_n = N + q_n$ όπου q_n ρητός του $[-1,1]$ και N συγκεκριμένο υποσύνολο του $[0,1]$ που ορίστηκε με χρήση του αξιώματος της επιλογής). Από αυτήν την κατασκευή είναι φανερό ότι

$$\lambda^*(N_n) = \lambda^*(N) > 0$$

για κάθε $n \geqslant 1$, και ότι τα N_n είναι μη μετρήσιμα σύνολα. Ορίζουμε

$$A_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} N_k.$$

Η $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι φθίνουσα ακολουθία υποσυνόλων του $[-1,2]$ και έχουμε

$$\lambda^*(A_n) \geqslant \lambda^*(N_n) = \lambda^*(N)$$

για κάθε $n \geqslant 1$, άρα

$$\lim_{n\to\infty} \lambda^*(A_n) \geqslant \lambda^*(N) > 0.$$

Όμως $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$, άρα

$$\lim_{n\to\infty} \lambda^*(A_n) > \lambda^*\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big).$$

Για να μεταφέρετε αυτήν την κατασκευή στο $[0,1]$ θεωρήστε τα σύνολα $A_n' = \frac{1}{3}(1+A_n) \subseteq [0,1]$.

2.2. Έστω $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ μια άλγεβρα. Γράφουμε $\mathcal{A}_\sigma$ για την οικογένεια όλων των αριθμήσιμων ενώσεων στοιχείων της $\mathcal{A}$ και $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$ για την οικογένεια όλων των αριθμήσιμων τομών στοιχείων της $\mathcal{A}_\sigma$. Έστω μ_0 ένα προμέτρο στην $\mathcal{A}$ και μ^* το αντίστοιχο εξωτερικό μέτρο. Αποδείξτε τα εξής.

(α) Για κάθε $A \subseteq X$ και $\varepsilon > 0$, υπάρχει $B \in \mathcal{A}_\sigma$ ώστε $A \subseteq B$ και $\mu^*(B) \leqslant \mu^*(A) + \varepsilon$.

(β) Αν $\mu^*(A) < \infty$, τότε το A είναι μ^*-μετρήσιμο αν και μόνο αν υπάρχει $B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ τέτοιο ώστε $A \subseteq B$ και $\mu^*(B \setminus A) = 0$.

(γ) Αν το μ_0 είναι $\sigma-$πεπερασμένο, τότε στο (β) δε χρειάζεται να κάνουμε την υπόθεση $\mu^*(A) < \infty$.

Υπόδειξη: (α) Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mu^*(A) < +\infty$. Από τον ορισμό του $\mu^*(A)$, για τυχόν $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $E_n \in \mathcal{A}$ τέτοια ώστε $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(E_n) < \mu^*(A) + \varepsilon$. Ορίζουμε $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Τότε, $B \in \mathcal{A}_\sigma$, έχουμε $A \subseteq B$, και

$$\mu^*(B) = \mu^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(E_n) < \mu^*(A) + \varepsilon.$$

(β) Έστω $A \subseteq X$ με $\mu^*(A) < +\infty$. Από το (α), για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $B_n \in \mathcal{A}_\sigma$ τέτοιο ώστε $A \subseteq B_n$ και $\mu^*(B_n) < \mu^*(A) + \frac{1}{n}$. Αφού το A είναι μ^*-μετρήσιμο, και κάθε B_n είναι επίσης μ^*-μετρήσιμο, έχουμε

$$\mu^*(B_n \setminus A) = \mu^*(B_n) - \mu^*(A) < \frac{1}{n}$$

για κάθε n. Θέτουμε $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$. Τότε, $B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$, έχουμε $A \subseteq B$ και $\mu^*(B \setminus A) \leqslant \mu^*(B_n \setminus A) < \frac{1}{n}$ για κάθε n, άρα $\mu^*(B \setminus A) = 0$.

Αντίστροφα, αν υπάρχει $B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ τέτοιο ώστε $A \subseteq B$ και $\mu^*(B \setminus A) = 0$ τότε το $A = B \setminus (B \setminus A)$ είναι μ^*-μετρήσιμο, διότι τα B και $B \setminus A$ ανήκουν στην $\mathcal{M}_{\mu^*}$.

(γ) Αν το μ_0 είναι σ-πεπερασμένο τότε έχουμε επιπλέον ότι υπάρχει αύξουσα ακολουθία (F_n) συνόλων στην $\mathcal{A}$ ώστε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ και $\mu_0(F_n) < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω A ένα μ^*-μετρήσιμο σύνολο. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το σύνολο $A_n := A \cap F_n$ είναι μ^*-μετρήσιμο και $\mu^*(A_n) < \infty$. Από το (β) για κάθε $k \geqslant 1$ μπορούμε να βρούμε $B_{n,k} \in \mathcal{A}_\sigma$ ώστε $A_n \subseteq B_{n,k}$ και

$$\mu^*(B_{n,k} \setminus A_n) < \frac{1}{k \cdot 2^n}.$$

Τότε, το σύνολο $B_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{n,k}$ ανήκει στην $\mathcal{A}_\sigma$, έχουμε $A \subseteq B_k$ και

$$\mu^*(B_k \setminus A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_{n,k} \setminus A_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 2^n} = \frac{1}{k}.$$

Συνεχίζουμε όπως στο (β). Το σύνολο $B = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$ ανήκει στην $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$, έχουμε $B \supseteq A$ και $\mu^*(B \setminus A) = 0$. Για την αντίστροφη συνεπαγωγή δεν είχαμε χρειαστεί την υπόθεση ότι $\mu^*(A) < \infty$.

2.3. Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος μέτρου με $\mu(X)<\infty$. Αν $A_n, A\in\mathcal{A}$ και $\mu(A_n\triangle A)\to 0$, αποδείξτε ότι $\mu(A_n)\to\mu(A)$.

Υπόδειξη: Γράφοντας $A_n=(A_n\cap A)\cup(A_n\setminus A)$ και $A=(A_n\cap A)\cup(A\setminus A_n)$ βλέπουμε ότι

$$\mu(A_n)=\mu(A_n\cap A)+\mu(A_n\setminus A)\quad\text{και}\quad \mu(A)=\mu(A_n\cap A)+\mu(A\setminus A_n)$$

και όλα αυτά τα μέτρα είναι πεπερασμένα, αφού $\mu(X)<\infty$. Τότε, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}|\mu(A_n)-\mu(A)|&=|\mu(A_n\cap A)+\mu(A_n\setminus A)-\mu(A_n\cap A)-\mu(A\setminus A_n)|\\&=|\mu(A_n\setminus A)-\mu(A\setminus A_n)|\leqslant\mu(A_n\setminus A)+\mu(A\setminus A_n)\\&=\mu(A_n\triangle A)\to 0,\end{aligned}$$

άρα $\mu(A_n)\to\mu(A)$.

2.4. Κατασκευάστε μέτρο μ στον $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ τέτοιο ώστε

$$\{\mu(E):E\subseteq\mathbb{N}\}=[0,1].$$

Υπόδειξη: Θεωρούμε το μέτρο μ στον $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ με $\mu(\{n\})=1/2^n$ για κάθε $n\geqslant 1$. Τότε, για κάθε $E\subseteq\mathbb{N}$ έχουμε ότι

$$\mu(E)=\sum_{n\in E}\frac{1}{2^n}.$$

Παρατηρούμε ότι $0\leqslant\sum_{n\in E}\frac{1}{2^n}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$ για κάθε $E\subseteq\mathbb{N}$, με ισότητα αριστερά αν $E=\varnothing$ και δεξιά αν $E=\mathbb{N}$. Συνεπώς,

$$\{\mu(E):E\subseteq\mathbb{N}\}\subseteq[0,1].$$

Έστω τώρα $x\in[0,1]$. Θεωρούμε το δυαδικό ανάπτυγμα $x=\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n(x)/2^n$ του x, όπου $\delta_n(x)\in\{0,1\}$, και ορίζουμε $E_x=\{n\in\mathbb{N}:\delta_n(x)=1\}$. Τότε,

$$\mu(E_x)=\sum_{n\in E_x}\frac{1}{2^n}=\sum_{n\in E_x}\frac{\delta_n(x)}{2^n}=\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{\delta_n(x)}{2^n}=x$$

(για την προτελευταία ισότητα παρατηρήστε ότι $\delta_n(x)=0$ αν $n\notin E_x$). Αφού το $x\in[0,1]$ ταν τυχόν, αυτό αποδεικνύει ότι

$$\{\mu(E):E\subseteq\mathbb{N}\}\supseteq[0,1].$$

2.5. Έστω Z υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(Z)=0$. Αποδείξτε ότι το $\mathbb{R}\setminus Z$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Χρησιμοποιώντας αυτήν την παρατήρηση αποδείξτε ότι αν $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις και $\lambda(\{x\in\mathbb{R}:f(x)\neq g(x)\})=0$, τότε $f\equiv g$.

Υπόδειξη: Υποθέτουμε ότι το $\mathbb{R}\setminus Z$ δεν είναι πυκνό. Τότε, υπάρχει μη τετριμμένο φραγμένο ανοικτό διάστημα $(a,b)\subseteq\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $(\mathbb{R}\setminus Z)\cap(a,b)=\varnothing$, δηλαδή $(a,b)\subseteq Z$. Όμως τότε, $\lambda(Z)\geqslant\lambda((a,b))=b-a>0$, το οποίο είναι άτοπο.

Έστω $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις τέτοιες ώστε $\lambda(\{x\in\mathbb{R}:f(x)\neq g(x)\})=0$. Εφαρμόζοντας το παραπάνω για το $Z=\{x\in\mathbb{R}:f(x)\neq g(x)\}$ βλέπουμε ότι το σύνολο $\mathbb{R}\setminus Z=:D=\{x\in\mathbb{R}:f(x)=g(x)\}$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τότε, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ μπορούμε να βρούμε ακολουθία (d_n) στο D με $d_n\to x$. Από τη συνέχεια των f και g στο x και από το γεγονός ότι $f(d_n)=g(d_n)$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, παίρνουμε

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f(d_n)=\lim_{n\to\infty}g(d_n)=g(x).$$

Αφού το $x \in \mathbb{R}$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $f \equiv g$.

2.6. Έστω A και B δύο μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}$.
(α) Υποθέτουμε ότι για κάθε $a < b$ στο $\mathbb{R}$ ισχύει $\lambda(A \cap (a,b)) \leqslant \frac{b-a}{2}$. Αποδείξτε ότι $\lambda(A) = 0$.
(β) Υποθέτουμε ότι $\lambda(B) = 1$. Αποδείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμο $C \subseteq B$ με $\lambda(C) = \frac{1}{2}$.
Υπόδειξη: (α) Υποθέτουμε αρχικά ότι $0 < \lambda(A) < \infty$. Από τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου, για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε ακολουθία $\{I_n\}$ φραγμένων ανοικτών διαστημάτων ώστε $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) < (1+\varepsilon)\lambda(A)$$

Γράφοντας $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A \cap I_n)$, από την υποπροσθετικότητα του λ και την υπόθεση παίρνουμε

$$\lambda(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A \cap I_n) \leqslant \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) < \frac{1+\varepsilon}{2}\lambda(A).$$

Επιλέγοντας $\varepsilon < 1$ καταλήγουμε σε άτοπο.

Αν $\lambda(A) = \infty$, παρατηρούμε ότι υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε το $A_m := A \cap [-m, m]$ να ικανοποιεί την $0 < \lambda(A_m) < \infty$ και επίσης $\lambda(A_m \cap (a,b)) \leqslant \lambda(A \cap (a,b)) \leqslant \frac{b-a}{2}$ για κάθε $a < b$ στο $\mathbb{R}$. Εφαρμόζοντας το προηγούμενο για το σύνολο A_m, βλέπουμε ότι $\lambda(A_m) = 0$ και καταλήγουμε πάλι σε άτοπο.
(β) Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \lambda(B \cap (-\infty, x])$ είναι συνεχής. Πράγματι, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ με $x < y$ έχουμε ότι

$$B \cap (-\infty, y] \subseteq (B \cap (-\infty, x]) \cup [x, y],$$

άρα

$$f(y) = \lambda(B \cap (-\infty, y]) \leqslant \lambda(B \cap (-\infty, x]) + \lambda([x, y]) = f(x) + (y - x).$$

Έπεται ότι, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|$$

(εξηγήστε γιατί), δηλαδή η f είναι 1-Lipschitz.

Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} \lambda(B \cap (-\infty, n]) = \lambda(B)$$

και

$$\lim_{n\to\infty} f(-n) = \lim_{n\to\infty} \lambda(B \cap (-\infty, -n]) = \lambda(\varnothing) = 0.$$

Αφού η f είναι συνεχής και

$$0 = \lim_{n\to\infty} f(-n) < \frac{\lambda(B)}{2} < \lim_{n\to\infty} f(n) = \lambda(B),$$

υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε

$$f(x) = \lambda(B \cap (-\infty, x]) = \frac{\lambda(B)}{2} = \frac{1}{2}.$$

Θέτοντας $C = B \cap (-\infty, x]$, παίρνουμε το ζητούμενο.

2.7. Εξετάστε αν καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(α) Υπάρχει κλειστό σύνολο $F \subset [0,1]$ το οποίο έχει μέτρο $\lambda(F) = \frac{1}{2}$ και δεν περιέχει κανέναν ρητό αριθμό.

(β) Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ και $\lambda(A) > 0$ τότε υπάρχουν $x, y \in A$ τέτοια ώστε $x - y \notin \mathbb{Q}$.

(γ) Κάθε συνεχής συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ απεικονίζει Lebesgue μετρήσιμα σύνολα σε Lebesgue μετρήσιμα σύνολα.

Υπόδειξη: (α) Αληθής. Το σύνολο $A = [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ έχει μέτρο $\lambda(A) = 1$ και δεν περιέχει κανέναν ρητό αριθμό. Από την εσωτερική κανονικότητα του μέτρου Lebesgue υπάρχει κλειστό $B \subseteq A$ με $\lambda(B) = \frac{3}{4}$. Δουλεύοντας όπως στο (β) της άσκησης 2.6 βρίσκουμε $x \in \mathbb{R}$ ώστε το σύνολο $F = B \cap (-\infty, x]$ να έχει μέτρο $\lambda(F) = \frac{1}{2}$. Το F είναι κλειστό ως τομή δύο κλειστών συνόλων και δεν περιέχει κανέναν ρητό διότι $F \subseteq B \subseteq A = [0,1] \setminus \mathbb{Q}$.

(β) Αληθής. Αν δεν ισχύει το ζητούμενο, τότε $A - A = \{x - y : x, y \in A\} \subseteq \mathbb{Q}$. Αφού $\lambda(A) > 0$ το A είναι μη κενό. Σταθεροποιούμε $x_0 \in A$ και από την

$$A - x_0 \subseteq A - A \subseteq \mathbb{Q}$$

συμπεραίνουμε ότι το $A - x_0$, άρα και το A, είναι αριθμήσιμο σύνολο. Τότε, $\lambda(A) = 0$, το οποίο είναι άτοπο.

(γ) Ψευδής. Θεωρούμε την συνάρτηση $g : [0,1] \to [0,2]$ με $g(x) = f(x) + x$, όπου f η συνάρτηση Cantor–Lebesgue. Η g είναι γνησίως αύξουσα, συνεχής και επί.

Το σύνολο $g(C)$ είναι μετρήσιμο και $\lambda(g(C)) = 1$, συνεπώς υπάρχει μη μετρήσιμο υποσύνολο M του $g(C)$. Τότε, το $K = g^{-1}(M)$ είναι Lebesgue μετρήσιμο διότι είναι υποσύνολο του C και $g(K) = M$, δηλαδή το $g(K)$ δεν είναι μετρήσιμο.

2.8. (α) Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(A) < \infty$. Αποδείξτε ότι για κάθε $B \subseteq \mathbb{R}$ με $A \subseteq B$ ισχύει

$$\lambda^*(B \setminus A) = \lambda^*(B) - \lambda(A).$$

(β) Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\lambda^*(A \cup B) = \lambda^*(A) + \lambda^*(B) < \infty$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν μετρήσιμα σύνολα E, F τέτοια ώστε $A \subseteq E$, $B \subseteq F$ και $\lambda(E \cap F) = 0$.

Υπόδειξη: (α) Αφού το A είναι μετρήσιμο και $A \cap B = A$, έχουμε ότι

$$\lambda^*(B) = \lambda^*(A \cap B) + \lambda^*(B \setminus A) = \lambda(A) + \lambda^*(B \setminus A).$$

Τέλος, αφού $\lambda(A) < \infty$, αφαιρώντας παίρνουμε

$$\lambda^*(B \setminus A) = \lambda^*(B) - \lambda(A).$$

(β) Από την υπόθεση έχουμε ότι $\lambda^*(A) < \infty$ και $\lambda^*(B) < \infty$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχουν μετρήσιμα σύνολα E, F τέτοια ώστε $A \subseteq E$, $B \subseteq F$ και $\lambda^*(A) = \lambda(E)$, $\lambda^*(B) = \lambda(F)$. Παρατηρούμε ότι

$$\lambda(E \cup F) = \lambda(E \cap F) + \lambda(E \setminus F) + \lambda(F \setminus E) = \lambda(E) + \lambda(F) - \lambda(E \cap F).$$

Χρησιμοποιώντας και την υπόθεση, γράφουμε

$$\begin{aligned}\lambda(E \cup F) &= \lambda(E) + \lambda(F) - \lambda(E \cap F) = \lambda^*(A) + \lambda^*(B) - \lambda(E \cap F) = \lambda^*(A \cup B) - \lambda(E \cap F)\\ &\leqslant \lambda(E \cup F) - \lambda(E \cap F),\end{aligned}$$

άρα $\lambda(E \cap F) \leqslant 0$, το οποίο δείχνει ότι $\lambda(E \cap F) = 0$.

2.9. (α) Αποδείξτε ότι υπάρχει φραγμένο σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\lambda(F) \leqslant \lambda^*(A) - 1$ για κάθε κλειστό σύνολο $F \subseteq A$.

(β) Αποδείξτε ότι υπάρχει σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\lambda^*(G \setminus A) = \infty$ για κάθε ανοικτό σύνολο $G \supseteq A$.

Υπόδειξη: (α) Έχουμε δει ότι υπάρχει μη μετρήσιμο $N \subseteq [0,1]$ με την ιδιότητα ότι το $N - N$ δεν περιέχει κανέναν μη μηδενικό ρητό. Αναγκαστικά, $\lambda^*(N) = \delta > 0$. Επίσης, για κάθε κλειστό σύνολο $B \subseteq N$ έχουμε $\lambda(B) = 0$ (αλλιώς, από το λήμμα Steinhaus το $B - B$ θα περιείχε μη τετριμμένο διάστημα με κέντρο το 0, άρα και το $N - N$ θα περιείχε το ίδιο διάστημα, άτοπο).

Θεωρούμε το σύνολο $A = \frac{1}{\delta}N$, το οποίο είναι φραγμένο αφού το N είναι φραγμένο. Παρατηρήστε ότι

$$\lambda^*(A) = \frac{1}{\delta}\lambda^*(N) = 1.$$

Αν F είναι κλειστό σύνολο που περιέχεται στο A, τότε το $B = \delta F$ είναι κλειστό υποσύνολο του N, άρα $\lambda(B) = 0$. Έπεται ότι

$$\lambda(F) = \frac{1}{\delta}\lambda(B) = 0 = \lambda^*(A) - 1.$$

(β) Αποδεικνύουμε πρώτα το εξής (είναι η άσκηση 12.20): Ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει Lebesgue μετρήσιμο $E \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\lambda^*(A \triangle E) < \varepsilon$.

[*Απόδειξη:* Αν το A είναι Lebesgue μετρήσιμο, για κάθε $\varepsilon > 0$ θεωρούμε το $E = A$ το οποίο είναι Lebesgue μετρήσιμο και προφανώς ικανοποιεί την $\lambda(A \triangle E) = \lambda(\varnothing) = 0 < \varepsilon$.

Αντίστροφα, έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει Lebesgue μετρήσιμο $E \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda^*(A \triangle E) < \varepsilon$. Για κάθε $k \geqslant 1$ μπορούμε να βρούμε Lebesgue μετρήσιμο $E_k \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\lambda(E \triangle E_k) < \frac{1}{k^2}$. Ορίζουμε

$$E = \liminf_n E_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k.$$

Το E είναι Lebesgue μετρήσιμο και ικανοποιεί τα εξής:

- Για κάθε $n \geqslant 1$ και $k \geqslant n$ έχουμε $\lambda\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k \setminus A\right) \leqslant \lambda(E_k \setminus A) \leqslant \lambda(A \triangle E_k) < \frac{1}{k^2}$, άρα $\lambda\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k \setminus A\right) = 0$. Έπεται ότι
$$\lambda(E \setminus A) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k \setminus A\right) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Big(\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k \setminus A\Big)\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k \setminus A\right) = 0.$$
Δηλαδή, $\lambda(E \setminus A) = 0$.
- Για κάθε $n \geqslant 1$ έχουμε $A \setminus E \subseteq A \setminus \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k = \bigcup_{k=n}^{\infty}(A \setminus E_k)$, άρα $\lambda(A \setminus E) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \lambda(A \setminus E_k) < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Όμως, $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 0$, άρα $\lambda(A \setminus E) = 0$.

Τότε, το $A = (E \setminus (E \setminus A)) \cup (A \setminus E)$ είναι Lebesgue μετρήσιμο.]

Θεωρούμε τώρα ένα μη μετρήσιμο σύνολο $N \subseteq [0,1]$. Σύμφωνα με τα παραπάνω, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε για κάθε ανοικτό $U \supseteq N$ να ισχύει

$$\lambda^*(U \setminus N) = \lambda^*(N \triangle E) \geqslant \varepsilon.$$

Τώρα θεωρούμε το σύνολο

$$A := \bigcup_{k=0}^{\infty}(2k + N),$$

μεταφέρουμε δηλαδή το N κατά $2k$ για κάθε $k \geqslant 0$ και παίρνουμε την ένωση όλων αυτών των συνόλων. Έστω G ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $A \subseteq G$. Για κάθε $k \geqslant 0$ ορίζουμε $U_k = G \cap \left(2k - \frac{1}{3}, 2k + \frac{4}{3}\right)$. Τότε, κάθε U_k είναι ανοικτό και $U_k \supseteq 2k + N$, άρα το ανοικτό σύνολο $-2k + U_k$ περιέχει το N και έχουμε

$$\lambda^*(U_k \setminus (2k + N)) = \lambda^*((-2k + U_k) \setminus N) \geqslant \varepsilon.$$

Τα σύνολα $U_k \setminus (2k + N)$ περιέχονται στα ξένα μετρήσιμα σύνολα $\left(2k - \frac{1}{3}, 2k + \frac{4}{3}\right)$, οπότε είναι αρκετά απλό να δούμε (δείτε και την άσκηση 12.18) ότι

$$\lambda^*(G \setminus A) \geqslant \lambda^*\left(\bigcup_{k=0}^{\infty}(U_k \setminus (2k + N))\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^*(U_k \setminus (2k + N)) \geqslant \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon = +\infty.$$

2.10. (α) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με φραγμένη παράγωγο: υπάρχει $\alpha>0$ τέτοιος ώστε $|f'(x)|\leqslant\alpha$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι για κάθε $A\subseteq\mathbb{R}$ με $\lambda(A)=0$ ισχύει $\lambda(f(A))=0$.

(β) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι για κάθε $A\subseteq\mathbb{R}$ με $\lambda(A)=0$ ισχύει $\lambda(f(A))=0$.

Υπόδειξη: (α) Από την υπόθεση, η f είναι συνάρτηση Lipschitz με σταθερά α, δηλαδή $|f(x)-f(y)|\leqslant\alpha|x-y|$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι

$$\lambda^*(f(A))\leqslant\alpha\lambda^*(A)$$

για κάθε $A\subseteq\mathbb{R}$, οπότε αν $\lambda(A)=0$ έπεται άμεσα ότι $\lambda^*(f(A))=0$ και έχουμε το ζητούμενο. Έστω $\{I_m\}_{m=1}^{\infty}$ μια κάλυψη του A από ανοικτά διαστήματα. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $A\cap I_m\neq\varnothing$ για κάθε $m\in\mathbb{N}$ (εξηγήστε γιατί). Αν $x,y\in A\cap I_m$, τότε

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\alpha|x-y|\leqslant\alpha\ell(I_m).$$

Συνεπώς, $\mathrm{diam}(f(A\cap I_m))\leqslant\alpha\ell(I_m)$. Έπεται ότι το σύνολο $f(A\cap I_m)$ περιέχεται σε διάστημα J_m μήκους $\ell(J_m)\leqslant\alpha\ell(I_m)$. Η $\{J_m\}_{m=1}^{\infty}$ είναι κάλυψη του $f(A)$, άρα

$$\lambda^*(f(A))\leqslant\lambda\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}J_m\right)\leqslant\sum_{m=1}^{\infty}\lambda(J_m)\leqslant\alpha\sum_{m=1}^{\infty}\ell(I_m).$$

Παίρνοντας το infimum πάνω από όλες τις καλύψεις $\{I_m\}_{m=1}^{\infty}$ του A από ανοικτά διαστήματα, βλέπουμε ότι $\lambda^*(f(A))\leqslant\alpha\lambda^*(A)$.

(β) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και $A\subseteq\mathbb{R}$ με $\lambda(A)=0$. Για κάθε $n,k\geqslant1$ θεωρούμε τα σύνολα $B_n=\{x\in A:|f'(x)|<n\}$ και $B_{n,k}=\{x\in A:|f(y)-f(x)|\leqslant n|y-x|\ \text{ εάν } |y-x|<1/k\}$. Παρατηρήστε ότι $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$ και $B_n=\bigcup_{k=1}^{\infty}B_{n,k}$ για κάθε $n\geqslant1$ (αυτό προκύπτει εύκολα από τον ορισμό της παραγώγου).

Δείχνουμε ότι $\lambda(f(B_{n,k}))=0$ για κάθε $n,k\geqslant1$. Η απόδειξη είναι όμοια με αυτήν στο (α), με μόνη διαφορά ότι μπορούμε να θεωρήσουμε μόνο καλύψεις $\{I_m\}_{m=1}^{\infty}$ του $B_{n,k}$ από ανοικτά διαστήματα που ικανοποιούν την $\sum_{m=1}^{\infty}\ell(I_m)<\frac{1}{k}$ (αφού $\lambda(B_{n,k})=0$ και στη συνέχεια θα θεωρήσουμε το infimum των $\sum_{m=1}^{\infty}\ell(I_m)$). Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι $B_{n,k}\cap I_m\neq\varnothing$ για κάθε $m\in\mathbb{N}$. Αν $x,y\in B_{n,k}\cap I_m$, τότε $|x-y|<1/k$ άρα

$$|f(x)-f(y)|\leqslant n|x-y|\leqslant n\ell(I_m).$$

Συνεπώς, $\mathrm{diam}(f(B_{n,k}\cap I_m))\leqslant n\ell(I_m)$. Έπεται ότι το σύνολο $f(B_{n,k}\cap I_m)$ περιέχεται σε διάστημα J_m μήκους $\ell(J_m)\leqslant n\ell(I_m)$. Η $\{J_m\}_{m=1}^{\infty}$ είναι κάλυψη του $f(B_{n,k})$, άρα

$$\lambda^*(f(B_{n,k}))\leqslant\lambda\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}J_m\right)\leqslant\sum_{m=1}^{\infty}\lambda(J_m)\leqslant n\sum_{m=1}^{\infty}\ell(I_m).$$

Παίρνοντας το infimum πάνω από όλες τις καλύψεις $\{I_m\}_{m=1}^{\infty}$ του $B_{n,k}$ που έχουμε θεωρήσει, βλέπουμε ότι $\lambda^*(f(B_{n,k}))\leqslant n\lambda^*(B_{n,k})=0$.

Έπεται ότι

$$\lambda^*(f(A))=\lambda^*\left(f\left(\bigcup_{n,k=1}^{\infty}B_{n,k}\right)\right)\leqslant\sum_{n,k=1}^{\infty}\lambda^*(f(B_{n,k}))=0.$$

3.1. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση και $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ακόλουθη ιδιότητα: αν $N\subseteq\mathbb{R}$ και $\lambda(N)=0$ τότε το $\phi^{-1}(N)$ είναι Lebesgue μετρήσιμο σύνολο. Αποδείξτε ότι η $f\circ\phi$ είναι Lebesgue μετρήσιμη.

Υπόδειξη: Έστω $b\in\mathbb{R}$. Γράφουμε $(f\circ\phi)^{-1}((-\infty,b])=\phi^{-1}(A)$, όπου $A=f^{-1}((-\infty,b])$. Η f είναι Lebesgue μετρήσιμη, άρα το A είναι Lebesgue μετρήσιμο. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε $A=B\cup N$, όπου $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$

και $\lambda(N) = 0$ (μάλιστα, το B μπορεί να επιλεγεί F_σ-σύνολο). Αφού η ϕ είναι συνεχής, το $\phi^{-1}(B)$ είναι σύνολο Borel. Από την υπόθεση έχουμε επίσης ότι το $\phi^{-1}(N)$ είναι Lebesgue μετρήσιμο. Έπεται ότι το

$$(f \circ \phi)^{-1}((-\infty, b]) = \phi^{-1}(A) = \phi^{-1}(B \cup N) = \phi^{-1}(B) \cup \phi^{-1}(N)$$

είναι Lebesgue μετρήσιμο, και έχουμε το ζητούμενο.

3.2. Έστω X ένα μη κενό σύνολο και $\{E_k\}_{k=1}^\infty$ ακολουθία ξένων ανά δύο υποσυνόλων του X τέτοια ώστε $X = \bigcup_{k=1}^\infty E_k$. Θεωρούμε την οικογένεια συνόλων $\mathcal{S} = \left\{\bigcup_{k\in A} E_k : A \subseteq \mathbb{N}\right\}$. Θεωρήστε γνωστό ότι η $\mathcal{S}$ είναι σ-άλγεβρα στο X. Αποδείξτε ότι μια συνάρτηση $g : X \to \mathbb{R}$ είναι $\mathcal{S}$-μετρήσιμη αν και μόνο αν η $g\big|_{E_k}$ είναι σταθερή για κάθε $k = 1, 2, \ldots$

Υπόδειξη: Η $\mathcal{S}$ έχει την εξής ιδιότητα: αν $C \in \mathcal{S}$ τότε $C = \bigcup_{m\in A} E_m$ για κάποιο $A \subseteq \mathbb{N}$, άρα για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $C \cap E_k = \varnothing$ αν $k \notin A$ και $C \cap E_k = E_k$ αν $k \in A$.

Υποθέτουμε πρώτα ότι η g είναι $\mathcal{S}$-μετρήσιμη. Έστω ότι υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε η $g\big|_{E_k}$ να μην είναι σταθερή. Τότε, υπάρχουν $a < b$ στο $\mathbb{R}$ και $x, y \in E_k$ ώστε $g(x) = a$ και $g(y) = b$. Τότε, το σύνολο $\{g < b\}$ ανήκει στην $\mathcal{S}$ αφού η g είναι $\mathcal{S}$ μετρήσιμη, άρα το σύνολο $C = \{z \in E_k : g(z) < b\} = E_k \cap \{g < b\} \in \mathcal{S}$. Όμως, το C είναι μη κενό (διότι $x \in C$) και γνήσιο υποσύνολο του E_k (διότι $y \notin C$). Αυτό είναι άτοπο.

Αντίστροφα, έστω ότι η $g\big|_{E_k}$ είναι σταθερή και παίρνει την τιμή a_k στο E_k, για κάθε $k = 1, 2, \ldots$. Έστω $b \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε το σύνολο $A = \{k \in \mathbb{N} : a_k < b\}$. Τότε, αν $k \in A$ έχουμε ότι $E_k \subseteq \{g < b\}$ ενώ αν $k \notin A$ έχουμε ότι $E_k \cap \{g < b\} = \varnothing$ (εξηγήστε γιατί). Έπεται ότι

$$\{x \in X : g(x) < b\} = \bigcup_{k\in A} E_k \in \mathcal{S},$$

άρα η g είναι $\mathcal{S}$-μετρήσιμη.

3.3. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε το σύνολο $D = \{x \in \mathbb{R} :$ η f είναι ασυνεχής στο $x\}$ να είναι αριθμήσιμο. Αποδείξτε ότι η f είναι Borel μετρήσιμη.

Υπόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $b \in \mathbb{R}$ το σύνολο $A := \{x \in \mathbb{R} : f(x) \leqslant b\}$ είναι σύνολο Borel. Γράφουμε

$$A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \leqslant b\} = A_1 \cup A_2 := \{x \in \mathbb{R} \setminus D : f(x) \leqslant b\} \cup \{x \in D : f(x) \leqslant b\}.$$

Το A_2 είναι αριθμήσιμο, ως υποσύνολο του αριθμήσιμου συνόλου D, άρα είναι F_σ-σύνολο (αριθμήσιμη ένωση μονοσυνόλων) και συνεπώς σύνολο Borel. Από την υπόθεση, η συνάρτηση $f\big|_{\mathbb{R}\setminus D}$ είναι συνεχής. Επομένως, το σύνολο

$$A_1 = \{x \in \mathbb{R} \setminus D : f(x) \leqslant b\} = \{x \in \mathbb{R} \setminus D : f\big|_{\mathbb{R}\setminus D}(x) \leqslant b\}$$

είναι κλειστό στο $\mathbb{R} \setminus D$ και γράφεται ως $A_1 = (\mathbb{R} \setminus D) \cap F$ για κάποιο κλειστό $F \subseteq \mathbb{R}$. Αφού το $\mathbb{R} \setminus D$ είναι G_δ-σύνολο, έπεται ότι το A_1 είναι Borel. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι το $A = A_1 \cup A_2$ είναι σύνολο Borel.

3.4. Αποδείξτε ότι η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμη αν και μόνο αν υπάρχει Borel μετρήσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\lambda(\{f \neq g\}) = 0$.

Υπόδειξη: ($\Longleftarrow$) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και Borel μετρήσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\lambda(Z) = 0$ όπου $Z = \{f \neq g\}$. Για κάθε $b \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\{f \leqslant b\} = \{x \in Z : f(x) \leqslant b\} \cup \{x \in \mathbb{R} \setminus Z : f(x) \leqslant b\} = \{x \in Z : f(x) \leqslant b\} \cup \{x \in \mathbb{R} \setminus Z : g(x) \leqslant b\}.$$

Παρατηρούμε ότι $\{x \in Z : f(x) \leqslant b\} \subseteq Z$ και αφού $\lambda(Z) = 0$ έπεται ότι το $\{x \in Z : f(x) \leqslant b\}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο. Επίσης,

$$\{x \in \mathbb{R} \setminus Z : g(x) \leqslant b\} = (\mathbb{R} \setminus Z) \cap \{g \leqslant b\},$$

το οποίο είναι Lebesgue μετρήσιμο σύνολο, αφού το $\mathbb{R} \setminus Z$ είναι Lebesgue μετρήσιμο και το $\{g \leqslant b\}$ είναι σύνολο Borel. Επομένως, το $\{f \leqslant b\}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο σύνολο για κάθε $b \in \mathbb{R}$, και συνεπώς η f είναι Lebesgue μετρήσιμη.

($\Longrightarrow$) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε αρχικά ότι $f = \chi_E$ για κάποιο Lebesgue μετρήσιμο σύνολο. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει G_δ-σύνολο B ώστε $E \subseteq B$ και $\lambda(B \setminus E) = 0$. Αν θέσουμε $g = \chi_B$ τότε η g είναι Borel μετρήσιμη και $\{f \neq g\} = B \setminus E$, άρα $\lambda(\{f \neq g\}) = 0$.

Έστω τώρα απλή μετρήσιμη συνάρτηση $f = \sum_{j=1}^m a_j \chi_{E_j}$. Από το προηγούμενο βήμα μπορούμε να βρούμε Borel μετρήσιμες συναρτήσεις g_j ώστε $\lambda(\{\chi_{E_j} \neq g_j\}) = 0$ για κάθε $j = 1, \ldots, m$. Τότε, για την Borel μετρήσιμη συνάρτηση $g = \sum_{j=1}^m a_j g_j$ έχουμε

$$\{f \neq g\} \subseteq \bigcup_{j=1}^m \{\chi_{E_j} \neq g_j\},$$

άρα $\lambda(\{f \neq g\}) = 0$.

Στη συνέχεια θεωρούμε τυχούσα Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση $f \geqslant 0$. Υπάρχει ακολουθία απλών μετρήσιμων συναρτήσεων $0 \leqslant s_n \nearrow f$. Από το προηγούμενο βήμα, για κάθε n μπορούμε να βρούμε Borel μετρήσιμη συνάρτηση g_n ώστε $\lambda(Z_n) = 0$, όπου $Z_n = \{s_n \neq g_n\}$. Ορίζουμε $Z = \bigcup_{n=1}^\infty Z_n$. Τότε, $\lambda(Z) = 0$ και $g_n = s_n \nearrow f$ στο $\mathbb{R} \setminus Z$. Ορίζουμε $g := \limsup g_n$. Τότε, η g είναι Borel μετρήσιμη και για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus Z$ έχουμε

$$g(x) = \limsup g_n(x) = \limsup s_n(x) = \lim s_n(x) = f(x).$$

Επομένως $\{f \neq g\} \subseteq Z$ και έπεται ότι $\lambda(\{f \neq g\}) = 0$.

Τέλος, αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι τυχούσα μετρήσιμη συνάρτηση, από το προηγούμενο βήμα βρίσκουμε Borel μετρήσιμες συναρτήσεις $g_1, g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε $\lambda(\{f^+ \neq g_1\}) = \lambda(\{f^- \neq g_2\}) = 0$ και θέτοντας $g = g_1 - g_2$ έχουμε ότι η g είναι Borel μετρήσιμη και $\{f \neq g\} \subseteq \{f^+ \neq g_1\} \cup \{f^- \neq g_2\}$, απ' όπου έπεται ότι $\lambda(\{f \neq g\}) = 0$.

3.5. Έστω E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι:

(α) Υπάρχει ακολουθία $\{E_n\}_{n=0}^\infty$ ξένων ανά δύο Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του E ώστε $E = \bigcup_{n=0}^\infty E_n$ και $0 \leqslant \lambda(E_n) \leqslant 2$ για κάθε $n \geqslant 0$.

(β) Υπάρχει ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in E$.

Υπόδειξη: (α) Αν $\lambda(E) = 0$ μπορούμε να θεωρήσουμε τη σταθερή συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$, $f(x) \equiv 1$, η οποία είναι ολοκληρώσιμη. Αν $\lambda(E) > 0$ τότε μπορούμε να γράψουμε $E = \bigcup_{n=0}^\infty E_n$, όπου $E_n = E \cap \{x : n \leqslant |x| < n+1\}$ για $n \geqslant 1$ και $E_0 = E \cap \{x : |x| < 1\}$. Τα E_n είναι Lebesgue μετρήσιμα, ξένα, και $0 \leqslant \lambda(E_n) \leqslant 2$.

(β) Για κάθε $n \geqslant 0$ ορίζουμε $\alpha_n = 1$ αν $\lambda(E_n) = 0$ και $\alpha_n = \frac{1}{\lambda(E_n)} \cdot \frac{1}{2^n}$ αν $\lambda(E_n) > 0$. Παρατηρήστε ότι $\alpha_n \lambda(E_n) \leqslant 1/2^n$ για κάθε $n \geqslant 0$. Στη συνέχεια θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f = \sum_{n=0}^\infty \alpha_n \chi_{E_n}.$$

Η f είναι καλά ορισμένη, μετρήσιμη και παίρνει παντού γνήσια θετικές τιμές. Τέλος, από το θεώρημα Beppo Levi,

$$\int_E f \, d\lambda = \sum_{n=0}^\infty \alpha_n \lambda(E_n) \leqslant \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{2^n} = 2,$$

άρα η f είναι ολοκληρώσιμη.

3.6. Έστω $f_n : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι, για κάποιους $\alpha_n > 0$, ισχύουν οι

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x) d\lambda(x) = \alpha_n^2 \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty.$$

Αποδείξτε ότι:

(α) Αν $E_n = \{x \in \mathbb{R} : f_n(x) > \alpha_n\}$ τότε $\lim_{N\to\infty} \lambda\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} E_n\right) = 0$.

(β) Η ακολουθία $\frac{f_n(x)}{\alpha_n}$ είναι φραγμένη σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη: (α) Από την ανισότητα Markov, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\lambda(E_n) \leqslant \frac{1}{\alpha_n} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda = \frac{1}{\alpha_n} \cdot \alpha_n^2 = \alpha_n,$$

άρα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < +\infty.$$

Από το λήμμα Borel-Cantelli έπεται ότι

$$\lim_{N\to\infty} \lambda\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} E_n\right) = \lambda\left(\limsup E_n\right) = 0.$$

(β) Από το (α) έχουμε ότι σχεδόν κάθε $x \in \mathbb{R}$ ανήκει σε πεπερασμένα το πλήθος E_n, δηλαδή υπάρχει $N_x \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geqslant N_x$ να ισχύει

$$f_n(x) \leqslant \alpha_n \quad \Longrightarrow \quad \frac{f_n(x)}{\alpha_n} \leqslant 1.$$

Για κάθε τέτοιο x είναι φανερό ότι η $\frac{f_n(x)}{\alpha_n}$ είναι φραγμένη, άρα έχουμε το ζητούμενο.

3.7. (α) Έστω $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε

$$\int_{[0,1]} |f_n|^4 \, d\lambda \leqslant \frac{1}{n^2}$$

για κάθε $n \geqslant 1$. Αποδείξτε ότι $f_n \to 0$ σχεδόν παντού. [*Υπόδειξη:* Θεώρημα Beppo Levi.]
(β) Έστω $f_n : [0, 1] \to [0, \infty)$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f_n \to 0$ κατά σημείο και

$$\int_{[0,1]} f_n \, d\lambda = 1$$

για κάθε $n \geqslant 1$. Αν $g := \sup_n f_n$, αποδείξτε ότι

$$\int_{[0,1]} g \, d\lambda = +\infty.$$

Υπόδειξη: (α) Από το θεώρημα Beppo Levi έχουμε ότι

$$\int_{[0,1]} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^4\right) d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[0,1]} |f_n|^4 \, d\lambda \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

Αφού η $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n|^4$ είναι ολοκληρώσιμη, σχεδόν για κάθε $x\in[0,1]$ ισχύει ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|^4<+\infty \quad\Longrightarrow\quad |f_n(x)|^4\to 0 \quad\Longrightarrow\quad f_n(x)\to 0.$$

(β) Ας υποθέσουμε, προς άτοπο, ότι η $g=\sup\limits_n f_n$ είναι ολοκληρώσιμη, δηλαδή

$$\int_{[0,1]}\big(\sup_n f_n\big)\,d\lambda=\int g\,d\lambda<\infty.$$

Αφού $0\leqslant f_n\leqslant g$ για κάθε n και $f_n\to 0$ κατά σημείο, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης παίρνουμε

$$1=\int_{[0,1]}f_n\,d\lambda\to 0.$$

3.8. Έστω $k\in\{1,\dots,n\}$ και $E_1,\dots,E_n$ Lebesgue μετρήσιμα υποσύνολα του $[0,1]$. Αν $\lambda(E_1)+\cdots+\lambda(E_n)\geqslant k$, αποδείξτε ότι υπάρχουν δείκτες $i_1<\cdots<i_k$ στο $\{1,\dots,n\}$ τέτοιοι ώστε

$$E_{i_1}\cap\cdots\cap E_{i_k}\neq\varnothing.$$

[*Υπόδειξη:* $\lambda(E_j)=\int_{[0,1]}\chi_{E_j}\,d\lambda$.]

Υπόδειξη: Θεωρούμε τη μετρήσιμη συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f=\sum\limits_{i=1}^{n}\chi_{E_i}$. Παρατηρήστε ότι

$$\int_{[0,1]}f\,d\lambda=\sum_{i=1}^{n}\int_{[0,1]}\chi_{E_i}\,d\lambda=\sum_{i=1}^{n}\lambda(E_i)\geqslant k.$$

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $x\in[0,1]$ τέτοιο ώστε $f(x)\geqslant k$: λλιώς, αφού η f παίρνει ακέραιες τιμές, θα είχαμε $f(x)\leqslant k-1$ για κάθε $x\in[0,1]$ και συνεπώς

$$\int_{[0,1]}f\,d\lambda\leqslant(k-1)\lambda([0,1])=k-1<k.$$

Θεωρούμε λοιπόν $x\in[0,1]$ με $f(x)\geqslant k$ και θέτουμε $A=\{i:1\leqslant i\leqslant n\ \text{ και }\ x\in E_i\}$. Τότε, $f(x)=\sum_{i\in A}\mathbf{1}\geqslant k$, δηλαδή το A έχει τουλάχιστον k στοιχεία. Αν $i_1<\cdots<i_k$ είναι τα k μικρότερα στοιχεία του A τότε $x\in E_{i_1}\cap\cdots\cap E_{i_k}$ και, ειδικότερα, $E_{i_1}\cap\cdots\cap E_{i_k}\neq\varnothing$.

3.9. Έστω $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις με την ιδιότητα

$$\int_E|f_n|\,d\lambda\leqslant\sqrt{\lambda(E)}$$

για κάθε $n\geqslant 1$ και κάθε μετρήσιμο υποσύνολο E του $[0,1]$. Αν $f_n\to f$ κατά σημείο, αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και ότι

$$\int_0^1 f_n\,d\lambda\to\int_0^1 f\,d\lambda.$$

[*Υπόδειξη:* Ίσως χρειαστείτε το θεώρημα Egorov.]

Υπόδειξη: Από το λήμμα του Fatou, για κάθε μετρήσιμο υποσύνολο E του $[0,1]$ έχουμε

$$\int_E |f|\,d\lambda \leqslant \liminf \int_E |f_n|\,d\lambda \leqslant \sqrt{\lambda(E)}.$$

Ειδικότερα,

$$\int_0^1 |f|\,d\lambda \leqslant 1,$$

δηλαδή η f είναι ολοκληρώσιμη. Έστω $\varepsilon \in (0,1)$. Από το θεώρημα του Egorov υπάρχει μετρήσιμο $E \subseteq [0,1]$ τέτοιο ώστε $\lambda(E) > 1 - \varepsilon^2/4$ και $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο E. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\Big|\int_0^1 f_n\,d\lambda - \int_0^1 f\,d\lambda\Big| &\leqslant \int_0^1 |f_n - f|\,d\lambda \leqslant \int_E |f_n - f|\,d\lambda + \int_{[0,1]\setminus E} |f_n|\,d\lambda + \int_{[0,1]\setminus E} |f|\,d\lambda \\ &\leqslant \int_E |f_n - f|\,d\lambda + 2\sqrt{\lambda([0,1]\setminus E)} < \int_E |f_n - f|\,d\lambda + 2\cdot\frac{\varepsilon}{2} \\ &= \int_E |f_n - f|\,d\lambda + \varepsilon.\end{aligned}$$

Αφού $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο E και $\lambda(E) < \infty$, έχουμε

$$\int_E |f_n - f|\,d\lambda \to 0.$$

Έπεται ότι

$$\limsup_n \Big|\int_0^1 f_n\,d\lambda - \int_0^1 f\,d\lambda\Big| \leqslant \varepsilon,$$

και, αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, παίρνουμε το ζητούμενο.

3.10. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε $\int_X |f_n - f|\,d\mu \longrightarrow 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία (f_{k_n}) της (f_n) τέτοια ώστε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_{k_n} - f|\,d\mu \leqslant 1$$

και από αυτό συμπεράνατε ότι $f_{k_n} \longrightarrow f$ σχεδόν παντού.

Υπόδειξη: Από την υπόθεση ότι $\int_X |f_n - f|\,d\mu \longrightarrow 0$ έπεται εύκολα ότι υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία (k_n) φυσικών αριθμών τέτοια ώστε $\int_X |f_{k_n} - f|\,d\mu < \frac{1}{2^n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_{k_n} - f|\,d\mu \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Από το θεώρημα Beppo Levo έπεται ότι

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_{k_n} - f|\right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_{k_n} - f|\,d\mu \leqslant 1 < +\infty,$$

άρα $\sum_{n=1}^{\infty} |f_{k_n} - f| < +\infty$ σχεδόν παντού. Δηλαδή, σχεδόν για κάθε $x \in X$ ισχύει ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_{k_n}(x) - f(x)| < +\infty \quad\Longrightarrow\quad |f_{k_n}(x) - f(x)| \to 0 \quad\Longrightarrow\quad f_{k_n}(x) \longrightarrow f(x).$$

4.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f, f_n : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε

$$\int_X |f_n - f| \, d\mu \leqslant \frac{1}{2^n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι $f_n \to f$ μ-σχεδόν παντού.

Υπόδειξη: Από το θεώρημα Beppo Levi έχουμε

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n - f| \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < +\infty,$$

δηλαδή η $g = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n - f|$ είναι ολοκληρώσιμη. Έπεται ότι μ-σχεδόν παντού ισχύει ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x) - f(x)| < +\infty \quad \Longrightarrow \quad |f_n(x) - f(x)| \to 0 \quad \Longrightarrow \quad f_n(x) \longrightarrow f(x).$$

4.2. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πιθανότητας και $f : X \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση με $\int_X f \, d\mu \geqslant \alpha$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $\mu(\{x \in X : f(x) \geqslant \alpha\}) > 0$.

Υπόδειξη: Υποθέτουμε ότι $\mu(\{x \in X : f(x) \geqslant \alpha\}) = 0$. Τότε, η συνάρτηση $g(x) = \alpha - f(x)$ είναι γνησίως θετική μ-σχεδόν παντού. Αν $A = \{g > 0\}$ και $A_n = \{g \geqslant 1/n\}$, $n \in \mathbb{N}$ τότε $\mu(X \setminus A) = 0$ (άρα $\int_{X \setminus A} g \, d\mu = 0$) και $\mu(A_n) \to \mu(A) = 1$, άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\mu(A_{n_0}) > 1/2$. Έπεται ότι

$$\int_X g \, d\mu = \int_{X \setminus A} g \, d\mu + \int_A g \, d\mu = \int_A g \, d\mu \geqslant \int_{A_{n_0}} g \, d\mu \geqslant \frac{1}{n_0} \mu(A_{n_0}) > \frac{1}{2n_0} > 0.$$

Όμως, από την υπόθεση έχουμε ότι

$$\int_X g \, d\mu = \int_X \alpha \, d\mu - \int_X f \, d\mu = \alpha - \int_X f \, d\mu \leqslant 0,$$

και έτσι οδηγούμαστε σε άτοπο.

4.3. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια και αιτιολογήστε τον υπολογισμό τους:

(α) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^\infty (1 + (x/n))^{-n} \sin(x/n) \, dx$.

(β) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 (1 + nx^2)(1 + x^2)^{-n} \, dx$.

Υπόδειξη: (α) Ορίζουμε $f_n(x) = (1 + (x/n))^{-n} \sin(x/n)$, $x \geqslant 0$. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $n \geqslant 2$ ισχύει

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geqslant 1 + n \cdot \frac{x}{n} + \binom{n}{2} \cdot \frac{x^2}{n^2} = 1 + x + \frac{n-1}{2n} x^2 \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{4} = \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2,$$

άρα

$$f_n(x) = |(1 + (x/n))^{-n} \sin(x/n)| \leqslant \frac{1}{(1 + (x/2))^2} |\sin(x/n)| \leqslant g(x) := \frac{1}{(1 + (x/2))^2}.$$

Επίσης,

$$f_n(x) = (1 + (x/n))^{-n} \sin(x/n) \to e^{-x} \cdot 0 = 0$$

καθώς το $n \to \infty$. Η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, \infty)$ (εξηγήστε γιατί), άρα εφαρμόζεται το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης και παίρνουμε

$$\int_0^\infty (1 + (x/n))^{-n} \sin(x/n)\, d\lambda(x) \to 0.$$

(β) Ορίζουμε $g_n(x) = (1+nx^2)(1+x^2)^{-n}$. Παρατηρούμε ότι $(1+x^2)^n \geqslant 1+nx^2$ από την ανισότητα Bernoulli, άρα $g_n(x) \leqslant g(x) := 1$ στο $[0,1]$. Η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$. Παρατηρούμε επίσης ότι, αν $x \in (0,1]$ και $n \geqslant 2$ τότε

$$(1+x^2)^n \geqslant 1 + nx^2 + \frac{n(n-1)}{2}x^4 > \frac{n(n-1)}{2}x^4,$$

άρα

$$g_n(x) \leqslant 2\frac{1+nx^2}{n(n-1)x^4} \to 0$$

καθώς το $n \to \infty$. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_0^1 (1+nx^2)(1+x^2)^{-n}\, d\lambda(x) \to 0.$$

4.4. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υπολογίστε το

$$\int_{\mathbb{R}} f(nx)\, d\lambda(x)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Στη συνέχεια αποδείξτε για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} n^{-\alpha} |f(nx)|\, d\lambda(x) < +\infty$$

και συμπεράνατε ότι $n^{-\alpha} f(nx) \to 0$ λ-σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$.
Υπόδειξη: (α) Ακολουθώντας τη γνωστή διαδικασία δείχνουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}} f(nx)\, d\lambda(x) = \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda.$$

Το πρώτο βήμα είναι να επαληθεύσουμε το ζητούμενο στην περίπτωση που $f = \chi_A$ για κάποιο Lebesgue μετρήσιμο σύνολο με $\lambda(A) < \infty$. Τότε,

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_A(nx)\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{\frac{1}{n}A}(x) d\lambda(x) = \lambda\left(\frac{1}{n}A\right) = \frac{1}{n}\lambda(A) = \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}} \chi_A d\lambda.$$

(β) Από το (α) και το θεώρημα Beppo Levi βλέπουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}|f(nx)|\right) d\lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}} n^{-\alpha}|f(nx)|\, d\lambda(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right)\int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda < +\infty.$$

Έπεται ότι λ-σχεδόν παντού ισχύει ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}|f(nx)| < +\infty \quad\Longrightarrow\quad n^{-\alpha}|f(nx)| \to 0 \quad\Longrightarrow\quad n^{-\alpha} f(nx) \to 0.$$

4.5. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$. Υπολογίστε το

$$\lim_{t\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f(x+t)+f(x)|\, d\lambda(x).$$

Υπόδειξη: Υποθέτουμε αρχικά ότι $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση που μηδενίζεται έξω από το διάστημα $[-m, m]$. Αν $t > 2m$ τότε έχουμε $g(x+t) = 0$ για κάθε $x \in [-m, m]$. Επίσης, αν $g(x+t) \neq 0$ τότε $x \in [-t-m, -t+m]$ άρα $g(x) = 0$ αφού $-t+m < -m$. Δηλαδή, για κάθε $t > 2m$ έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x+t)+g(x)|\, d\lambda(x) = \int_{[-m,m]} |g(x)|\, d\lambda(x) + \int_{[-t-m,-t+m]} |g(x+t)|\, d\lambda(x) = 2\int_{\mathbb{R}} |g(x)|\, d\lambda(x).$$

Έστω τώρα $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Είναι φανερό ότι

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x+t)+f(x)|\, d\lambda(x) \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, d\lambda(x) + \int_{\mathbb{R}} |f(x+t)|\, d\lambda(x) = 2\|f\|_1$$

για κάθε $t > 0$. Για τυχόν $\epsilon > 0$ βρίσκουμε συνεχή $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που μηδενίζεται έξω από κάποιο διάστημα $[-m, m]$ ώστε $\|f-g\|_1 \leqslant \epsilon$. Τότε, υπάρχει $t_0 > 0$ ώστε

$$2\|g\|_1 \leqslant \int_{\mathbb{R}} |g(x+t)+g(x)|\, d\lambda(x) + \epsilon$$

για κάθε $t \geqslant t_0$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} 2\|f\|_1 &\leqslant 2\|g\|_1 + 2\epsilon \leqslant \int_{\mathbb{R}} |g(x+t)+g(x)|\, d\lambda(x) + 3\epsilon \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(x+t)+f(x)|\, d\lambda(x) + \int_{\mathbb{R}} |g(x+t)-f(x+t)|\, d\lambda(x) + \int_{\mathbb{R}} |g(x)-f(x)|\, d\lambda(x) + 3\epsilon \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(x+t)+f(x)|\, d\lambda(x) + 2\|g-f\|_1 + 3\epsilon \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(x+t)+f(x)|\, d\lambda(x) + 5\epsilon \end{aligned}$$

για κάθε $t \geqslant t_0$ και έπεται ότι

$$\lim_{t\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f(x+t)+f(x)|\, d\lambda(x) = 2\|f\|_1.$$

4.6. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πεπερασμένου μέτρου και μια μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

Αν $\gamma_n = \int_X |f|^n d\mu$ αποδείξτε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} = \|f\|_\infty$.

Υπόδειξη: (α) Έστω $0 \neq f \in L_\infty(\mu)$. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $1 \leqslant p < \infty$,

$$\|f\|_p^p = \int_X |f(x)|^p\, d\mu \leqslant \int_X \|f\|_\infty^p d\mu = \|f\|_\infty^p \mu(X) < \infty,$$

άρα $f \in L_p(X)$. Επίσης, $\|f\|_p \leqslant \|f\|_\infty [\mu(X)]^{1/p} \to \|f\|_\infty$ καθώς το $p \to \infty$, άρα $\limsup_{p\to\infty} \|f\|_p \leqslant \|f\|_\infty$.

Από την άλλη πλευρά, αν $0 < \varepsilon < \|f\|_\infty$, τότε το σύνολο $B_\varepsilon = \{x \in X : |f(x)| \geqslant \|f\|_\infty - \varepsilon\}$ έχει θετικό μέτρο, και

$$\|f\|_p^p \geqslant \int_{B_\varepsilon} |f(x)|^p d\, d\mu \geqslant (\|f\|_\infty - \varepsilon)^p \mu(B_\varepsilon),$$

άρα
$$\liminf_{p\to\infty}\|f\|_p \geqslant (\|f\|_\infty-\varepsilon)\lim_{p\to\infty}[\mu(B_\varepsilon)]^{1/p} = \|f\|_\infty-\varepsilon.$$
Αφού το $\varepsilon\in(0,\|f\|_\infty)$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $\liminf_{p\to\infty}\|f\|_p \geqslant \|f\|_\infty$, και έπεται ότι $\lim_{p\to\infty}\|f\|_p = \|f\|_\infty$.
(β) Έχουμε $|f|^{n+1}\leqslant |f|^n\|f\|_\infty$ σχεδόν παντού, άρα
$$\int_X |f|^{n+1}d\mu \leqslant \|f\|_\infty\int_X |f|^n d\mu.$$
Επομένως, για κάθε $n\geqslant 1$ έχουμε
$$\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} = \frac{\int_X |f|^{n+1}d\mu}{\int_X |f|^n d\mu} \leqslant \|f\|_\infty,$$
συνεπώς
$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \leqslant \|f\|_\infty.$$
Από την ανισότητα Hölder έχουμε
$$\int_X |f|^n d\mu \leqslant \left(\int_X |f|^{n+1}d\mu\right)^{\frac{n}{n+1}},$$
άρα
$$\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} = \frac{\int_X |f|^{n+1}d\mu}{\int_X |f|^n d\mu} \geqslant \frac{\int_X |f|^{n+1}d\mu}{\left(\int_X |f|^{n+1}d\mu\right)^{\frac{n}{n+1}}} = \|f\|_{n+1}.$$
Από το (α) γνωρίζουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty}\|f\|_{n+1} = \|f\|_\infty$, άρα
$$\liminf_{n\to\infty}\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \geqslant \|f\|_\infty.$$
Έπεται το ζητούμενο.

4.7. Έστω E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $0<\lambda(E)<\infty$. Έστω $f_n\in L^1(E)$ που ικανοποιούν τα εξής:

(α) Υπάρχουν $1<p<\infty$ και $\alpha>0$ τέτοια ώστε $\|f_n\|_p\leqslant\alpha$ για κάθε $n\geqslant 1$.

(β) Υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση f στο E τέτοια ώστε $f_n\to f$ σχεδόν παντού.

Αποδείξτε ότι $f\in L^1(E)$ και $\|f_n-f\|_1\to 0$.
Υπόδειξη: (α) Από το λήμμα του Fatou,
$$\int_E |f|^p\,d\lambda \leqslant \liminf\int_E |f_n|^p\,d\lambda \leqslant \alpha^p,$$
δηλαδή $\|f\|_p\leqslant\alpha$. Από την ανισότητα Hölder,
$$\|f\|_1 \leqslant \|f\|_p\|\|\chi_E\|_q \leqslant M := \alpha(\lambda(E))^{1/q}$$
όπου q είναι ο συζυγής εκθέτης του p, δηλαδή $f\in L^1(E)$.

Έστω τώρα $\varepsilon > 0$. Θέτουμε $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{2\alpha}\right)^q$. Αφού $f_n \to f$ σχεδόν παντού, υπάρχει $F \subseteq E$ με $\lambda(E \setminus F) < \delta$, τέτοιο ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο F. Για κάθε $n \geqslant 1$ γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_E |f_n - f|\, d\lambda &= \int_F |f_n - f|\, d\lambda + \int_{E\setminus F} |f_n - f|\, d\lambda \\ &\leqslant \int_F |f_n - f|\, d\lambda (\lambda(E \setminus F))^{1/q} \left(\int_{E\setminus F} |f_n - f|^p\right)^{1/p} \\ &\leqslant \int_F |f_n - f|^p\, d\lambda + \delta^{1/q} \|f_n - f\|_p \\ &\leqslant \int_F |f_n - f|^p\, d\lambda + \delta^{1/q} 2\alpha \\ &\leqslant \int_F |f_n - f|^p\, d\lambda + \varepsilon,\end{aligned}$$

από τον ορισμό του δ και χρησιμοποιώντας την $\|f_n - f\|_p \leqslant \|f_n\|_p + \|f\|_p \leqslant 2\alpha$. Αφού $|f_n - f| \to 0$ ομοιόμορφα στο F και $\lambda(F) < +\infty$, έχουμε ότι $\int_F |f_n - f|^p\, d\lambda \to 0$. Έπεται ότι

$$\limsup_{n\to\infty} \int_E |f_n - f|\, d\lambda \leqslant \varepsilon,$$

και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $\|f_n - f\|_1 \to 0$.

4.8. (α) Έστω $g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι

$$\int g\, d\lambda = \int_0^\infty \lambda(\{x : g(x) > t\})\, dt.$$

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: υπάρχει $c_1 > 0$ ώστε, για κάθε $t > 0$,

$$\lambda(\{x : |f(x)| > t\}) \leq \frac{c_1}{t^2}.$$

Αποδείξτε ότι: υπάρχει $c_2 > 0$ ώστε, για κάθε μετρήσιμο E με $0 < \lambda(E) < \infty$,

$$\int_E |f|\, d\lambda \leq c_2 \sqrt{\lambda(E)}.$$

Υπόδειξη: (α) Έστω $s = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}$ μη αρνητική απλή ολοκληρώσιμη συνάρτηση, όπου $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ είναι οι γνήσια θετικές τιμές της s και $0 < \lambda(E_i) < \infty$ (υποθέτουμε ότι $s \neq 0$, αλλιώς το συμπέρασμα ισχύει τετριμμένα). Παρατηρούμε ότι τα E_i είναι ξένα και ότι: αν $0 \leqslant t < a_1$ τότε $\{s > t\} = \bigcup_{i=1}^n E_i$, αν $a_j \leqslant t < a_{j+1}$ για κάποιον $1 \leqslant j \leqslant n-1$ τότε $\{s > t\} = \bigcup_{i=j+1}^n E_i$ και αν $t \geqslant a_n$ τότε $\{s > t\} = \varnothing$. Έχουμε

$$\int s\, d\lambda = \sum_{i=1}^n a_i \lambda(E_i)$$

και

$$\int_0^\infty \lambda(\{s>t\})\,dt = a_1\lambda\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) + \sum_{j=1}^{n-1}(a_{j+1}-a_j)\lambda\left(\bigcup_{i=j+1}^n E_i\right)$$
$$= \sum_{j=1}^{n-1} a_j\left(\lambda\left(\bigcup_{i=j}^n E_i\right) - \lambda\left(\bigcup_{i=j+1}^n E_i\right)\right) + a_n\lambda(E_n)$$
$$= \sum_{j=1}^{n-1} a_j\lambda(E_j) + a_n\lambda(E_n) = \sum_{j=1}^{n} a_j\lambda(E_j).$$

Δηλαδή,

$$\int s\,d\lambda = \int_0^\infty \lambda(\{x : s(x)>t\})\,dt.$$

Έστω τώρα g μη αρνητική Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Θεωρούμε αύξουσα ακολουθία (s_N) μη αρνητικών απλών συναρτήσεων με $s_N \to g$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε

$$\int s_N\,d\lambda \to \int g\,d\lambda.$$

Ορίζουμε $u, u_N : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ με $u(t) = \lambda(\{g>t\})$ και $u_N(t) = \lambda(\{s_N>t\})$. Από τη συζήτηση που κάναμε για την s πιο πάνω, κάθε u_N είναι φθίνουσα, για την ακρίβεια κλιμακωτή συνάρτηση με πεπερασμένες το πλήθος θετικές τιμές, άρα μετρήσιμη. Επίσης, από την υπόθεση ότι $s_N \to g$ παίρνοουμε ότι $u_N \to u$. 'ρα, η u είναι μετρήσιμη και από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε ότι

$$\int_0^\infty \lambda(\{s_N>t\})\,dt = \int_0^\infty u_n(t)\,dt \to \int_0^\infty u(t)\,dt = \int_0^\infty \lambda(\{g>t\})\,dt.$$

Έχουμε δείξει ότι

$$\int s_N\,d\lambda = \int_0^\infty \lambda(\{s_N>t\})\,dt$$

για κάθε $N\in\mathbb{N}$, οπότε συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε το ζητούμενο.
(β) Έστω E μετρήσιμο με $0<\lambda(E)<\infty$. Για κάθε $\alpha>0$ μπορούμε να γράψουμε

$$\int_E |f(x)|\,d\lambda(x) = \int_0^\alpha \lambda(\{x\in E : |f(x)|>t\})\,d\lambda(t) + \int_\alpha^\infty \lambda(\{x\in E : |f(x)|>t\})\,d\lambda(t)$$
$$\leqslant \int_0^\alpha \lambda(E)\,d\lambda(t) + \int_\alpha^\infty \frac{c_1}{t^2}\,d\lambda(t)$$
$$= \alpha\,\lambda(E) + \frac{c_1}{\alpha}.$$

Επιλέγοντας $\alpha = \frac{1}{\sqrt{\lambda(E)}} > 0$ συμπεραίνουμε ότι

$$\int_E |f(x)|\,d\lambda(x) \leqslant \sqrt{\lambda(E)} + c_1\sqrt{\lambda(E)} = c_2\sqrt{\lambda(E)},$$

όπου $c_2 := c_1+1$.

4.9. Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος πιθανότητας. Αποδείξτε ότι αν η παραγωγίσιμη συνάρτηση $F:(a,b)\to\mathbb{R}$ είναι κυρτή και $g : X\to(a,b)$, $g\in L^1(\mu)$ τότε

$$F\Big(\int_X g\,d\mu\Big) \leqslant \int_X F\circ g\,d\mu.$$

[*Υπόδειξη:* Θεωρήστε την $F(g(x)) - F(t_0) \geqslant F'(t_0)(g(x) - t_0)$ όπου $t_0 = \int_X g\, d\mu$ και ολοκληρώστε.]
Υπόδειξη: Παρατηρούμε αρχικά ότι $t_0 = \int_X g\, d\mu \in (a, b)$ διότι $a < g(x) < b$ για κάθε $x \in X$ και $\mu(X) = 1$. Από την κυρτότητα της F, για κάθε $y \in (a, b)$ έχουμε $F(y) - F(t_0) \geqslant F'(t_0)(y - t_0)$, άρα

$$F(g(x)) - F(t_0) \geqslant F'(t_0)(g(x) - t_0)$$

για κάθε $x \in X$. Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\int_X F(g(x))\, d\mu(x) - F(t_0) &= \int_X (F(g(x)) - F(t_0))\, d\mu(x) \geqslant F'(t_0) \int_X (g(x) - t_0)\, d\mu(x) \\ &= F'(t_0) \left(\int_X g(x)\, d\mu(x) - t_0 \right) = 0.\end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$F\Big(\int_X g\, d\mu \Big) = F(t_0) \leqslant \int_X F \circ g\, d\mu.$$

4.10. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πιθανότητας και $f \in L^p(\mu)$ για κάποιον $p > 0$. Αποδείξτε ότι:

(i) $f \in L^q(\mu)$ για κάθε $0 < q < p$.

(ii) $\ln \|f\|_q \geqslant \int_X \ln |f|\, d\mu$ για κάθε $0 < q < p$.

(iii) $(\int_X |f|^q d\mu - 1)/q \geqslant \ln \|f\|_q$ και $(\int_X |f|^q d\mu - 1)/q \to \int_X \ln |f|\, d\mu$ όταν $q \to 0^+$.

(iv) $\lim_{q \to 0^+} \|f\|_q = \exp(\int_X \ln |f|\, d\mu)$.

Υπόδειξη: (i) Παρατηρούμε ότι

$$\int_X |f|^q d\mu \leqslant \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{q}{p}} \left(\int_X \mathbf{1}\, d\mu \right)^{1 - \frac{q}{p}} = \|f\|_p^q < +\infty$$

από την ανισότητα Hölder και το γεγονός ότι $\int_X \mathbf{1}\, d\mu = \mu(X) = 1$. 'ρα, $f \in L^q(\mu)$ και μάλιστα $\|f\|_q \leqslant \|f\|_p$.
(ii) Υποθέτουμε αρχικά ότι η $g = \ln |f|^q$ είναι ολοκληρώσιμη. Εφαρμόζοντας την προηγούμενη άσκηση για την $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $F(t) = e^t$ και την $g = \ln |f|^q$ έχουμε

$$\exp \left(q \int_X \ln |f|\, d\mu \right) = \exp \left(\int_X \ln(|f|^q)\, d\mu \right) \leqslant \int_X \exp(\ln(|f|^q))\, d\mu = \int_X |f|^q\, d\mu.$$

Συνεπώς,

$$\int_X \ln |f|\, d\mu \leqslant \frac{1}{q} \ln \left(\int_X |f|^q\, d\mu \right) = \ln \left(\left(\int_X |f|^q\, d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \right) = \ln \|f\|_q.$$

Έστω τώρα ότι η $g = \ln |f|^q$ δεν είναι ολοκληρώσιμη. Από την $\ln y \leqslant y - 1$ έχουμε ότι $0 \leqslant g^+ = \max\{0, g\} \leqslant |f|^q$ και αφού η $|f|^q$ είναι ολοκληρώσιμη συμπεραίνουμε ότι $\int_X g^+\, d\mu < \infty$. Αναγκαστικά, έχουμε $\int_X g^-\, d\mu = -\infty$, δηλαδή $\int_X g\, d\mu = -\infty$. Έπεται ότι $\int_X \ln |f|\, d\mu = -\infty$, άρα η ζητούμενη ανισότητα ισχύει και πάλι.
(iii) Από την $\ln y \leqslant y - 1$ παίρνουμε

$$\ln \left(\int_X |f|^q\, d\mu \right) \leqslant \int_X |f|^q\, d\mu - 1.$$

Όμως,

$$\ln \left(\int_X |f|^q\, d\mu \right) = \ln \|f\|_q^q = q \ln \|f\|_q.$$

Συνεπώς,

$$\ln \|f\|_q = \frac{1}{q}\ln\left(\int_X |f|^q \, d\mu\right) \leqslant \frac{1}{q}\left(\int_X |f|^q \, d\mu - 1\right).$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $h(t) = \frac{a^t-1}{t}$ είναι αύξουσα στο $(0,+\infty)$ (για σταθερό $a > 0$). Πράγματι, $h'(t) = \frac{a^t \ln(a^t) - a^t + 1}{t^2}$ και ο αριθμητής είναι μη αρνητικός, αφού $\ln(a^t) \geqslant 1 - \frac{1}{a^t}$. Αν λοιπόν θεωρήσουμε τυχούσα γνησίως φθίνουσα ακολουθία $q_n \to 0^+$ έχουμε $w_n = -\frac{1}{q_n}(|f|^{q_n} - 1) \to -\ln f$ και η (w_n) είναι αύξουσα, οπότε το θεώρημα μονότονης σύγκλισης μας δίνει

$$\frac{1}{q_n}\int_X (|f|^{q_n} - 1)\, d\mu = \frac{1}{q_n}\int_X (|f|^q_n - 1)\, d\mu \to \int_X \ln|f|\, d\mu.$$

Έπεται ότι

$$\lim_{q\to 0^+} (\int_X |f|^q d\mu - 1)/q = \int_X \ln|f|\, d\mu.$$

(iv) Συνδυάζοντας τα (ii) και (iii) γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_X \ln|f|\, d\mu &\leqslant \liminf_{q\to 0^+} \ln\|f\|_q \leqslant \limsup_{q\to 0^+} \ln\|f\|_q \\ &\leqslant \liminf_{q\to 0^+} (\int_X |f|^q d\mu - 1)/q = \int_X \ln|f|\, d\mu,\end{aligned}$$

άρα $\ln\|f\|_q \to \int_X \ln|f|\, d\mu$ όταν $q \to 0^+$. Έπεται ότι

$$\|f\|_q \to \exp\left(\int_X \ln|f|\, d\mu\right) \qquad \text{όταν } \; q \to 0^+.$$
