

ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
Επαναληπτικές Ασκήσεις (υποδείξεις)

Ασκηση 1. Έστω $x, y > 0$ τέτοιοι ώστε $x > \gamma y$ για κάθε $\gamma \in (0, 2)$. Αποδείξτε ότι $x \geq 2y$.

Υπόδειξη: Εφόσον $x, y > 0$, από την $x > \gamma y$ παίρνουμε $\frac{x}{y} > \gamma$ για κάθε $\gamma \in (0, 2)$. Αυτό σημαίνει ότι ο x/y είναι άνω φράγμα του $(0, 2)$, συνεπώς

$$\frac{x}{y} \geq \sup(0, 2) = 2$$

και έπεται ότι $x \geq 2y$. □

Ασκηση 2. Αποδείξτε ότι το σύνολο

$$A = \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

είναι φραγμένο και βρείτε τα $\sup A$ και $\inf A$. Εξετάστε αν το A έχει μέγιστο ή ελάχιστο στοιχείο.

Υπόδειξη: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι

$$\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \leq 2 = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{1} \in A.$$

Δηλαδή, ο 2 είναι το μέγιστο στοιχείο του A . Έπεται ότι $\sup A = \max A = 2$.

Έχουμε $\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή ο 0 είναι κάτω φράγμα του A . Επίσης, αν θέσουμε $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ τότε η ακολουθία (x_n) έχει όλους τους όρους της στο A και $x_n \rightarrow 0$. Από τον χαρακτηρισμό του infimum μέσω ακολουθιών συμπεραίνουμε ότι $\inf A = 0$. Το A δεν έχει ελάχιστο στοιχείο, αφού $0 \notin A$. □

Ασκηση 3. Έστω A, B μη κενά, άνω φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $a \in A$ υπάρχει $b \in B$ ώστε $a < b$. Αποδείξτε ότι $\sup A \leq \sup B$.

Δώστε παράδειγμα στο οποίο ικανοποιείται η υπόθεση και ισχύει $\sup A = \sup B$.

Υπόδειξη: Έστω $a \in A$. Από την υπόθεση υπάρχει $b \in B$ (που εξαρτάται από το a) ώστε $a < b$. Όμως, $b \leq \sup B$ και άρα $a < \sup B$.

Έτσι, έχουμε ότι $a \in A$ για κάθε $a \in A$, δηλαδή ο $\sup B$ είναι άνω φράγμα του A . Έπεται ότι $\sup A \leq \sup B$.

Το παράδειγμα των συνόλων $A = (1, 2)$ και $B = (0, 2)$ (ή ακόμα και $B = A = (1, 2)$) δείχνει ότι μπορεί να ικανοποιείται η υπόθεση και να ισχύει ότι $\sup A = \sup B$. □

Ασκηση 4. Αποδείξτε ότι το σύνολο

$$A = \{ \sqrt[n]{2} : n \in \mathbb{N} \}$$

είναι φραγμένο και βρείτε τα $\sup A$ και $\inf A$. Εξετάστε αν το A έχει μέγιστο ή ελάχιστο στοιχείο.

Υπόδειξη: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $\sqrt[n]{2} \leq 2 = \sqrt[1]{2} \in A$. Δηλαδή, ο 2 είναι το μέγιστο στοιχείο του A . Έπεται ότι $\sup A = \max A = 2$.

Έχουμε $\sqrt[n]{2} > 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή ο 1 είναι κάτω φράγμα του A . Επίσης, αν θέσουμε $x_n = \sqrt[n]{2}$ τότε η ακολουθία (x_n) έχει όλους τους όρους της στο A και $x_n \rightarrow 1$. Από τον χαρακτηρισμό του infimum μέσω ακολουθιών συμπεραίνουμε ότι $\inf A = 1$. Το A δεν έχει ελάχιστο στοιχείο, αφού $1 \notin A$. □

Ασκηση 5. Ορίζουμε μια ακολουθία (x_n) με $1 < x_1 < 3$ και

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 3}{4}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Εξετάστε αν η (x_n) συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό και, αν ναι, βρείτε το $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Υπόδειξη: Δείχνουμε πρώτα με επαγωγή ότι $1 < x_n < 3$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Για το επαγωγικό βήμα παρατηρήστε ότι αν $1 < x_n < 3$ τότε $1 < x_n^2 < 9$, άρα

$$1 = \frac{1+3}{4} < x_{n+1} = \frac{x_n^2+3}{4} < \frac{9+3}{4} = 3.$$

Δείχνουμε επίσης ότι η (x_n) είναι γνησίως φθίνουσα. Πράγματι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n^2+3}{4} - x_n = \frac{x_n^2 - 4x_n + 3}{4} = \frac{(x_n-1)(x_n-3)}{4} < 0,$$

διότι $x_n - 1 > 0$ και $x_n - 3 < 0$.

Η (x_n) είναι γνησίως φθίνουσα και κάτω φραγμένη από τον 1, άρα υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $x_n \rightarrow x$. Τότε, $x_{n+1} = \frac{x_n^2+3}{4} \rightarrow \frac{x^2+3}{4}$ και $x_{n+1} \rightarrow x$, άρα $\frac{x^2+3}{4} = x$, δηλαδή $(x-1)(x-3) = 0$. Όμως η (x_n) είναι φθίνουσα, άρα $x \leq x_1 < 3$, δηλαδή $x \neq 3$. Έτσι, συμπεραίνουμε ότι $x = 1$. $\square$

Ασκηση 6. Έστω (x_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $x_n \rightarrow \frac{1}{2}$. Ορίζουμε $y_n = [x_n]$, όπου $[x]$ είναι το ακέραιο μέρος του x . Αποδείξτε ότι $y_n \rightarrow 0$.

Υπόδειξη: Επιλέγουμε $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Αφού $x_n \rightarrow \frac{1}{2}$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να έχουμε ότι

$$\left| x_n - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{4} \implies \frac{1}{4} < x_n < \frac{3}{4} \implies y_n = [x_n] = 0.$$

Εφόσον $y_n = 0$ για κάθε $n \geq n_0$, έπεται ότι $y_n \rightarrow 0$. $\square$

Ασκηση 7. Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής (αιτιολογήστε την απάντησή σας).

- (α) Αν $a_{n+1} - a_n \rightarrow 0$ τότε η (a_n) συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.
- (β) Αν η (a_n) είναι αύξουσα και έχει υποακολουθία (a_{k_n}) τέτοια ώστε $a_{k_n} \rightarrow x \in \mathbb{R}$ τότε $a_n \rightarrow x$.
- (γ) Αν η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη τότε $a_n \rightarrow +\infty$.

Υπόδειξη: (α) Ψευδής. Ένα παράδειγμα δίνει η

$$a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Έχουμε

$$a_{n+1} - a_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \rightarrow 0,$$

όμως

$$a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n},$$

άρα $a_n \rightarrow +\infty$.

Άλλο παράδειγμα δίνει η $a_n = \ln n$. Έχουμε

$$a_{n+1} - a_n = \ln(n+1) - \ln n = \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) \rightarrow \ln 1 = 0,$$

όμως $a_n = \ln n \rightarrow +\infty$.

(β) Αληθής. Αρχικά παρατηρούμε ότι η (a_{k_n}) είναι επίσης αύξουσα. Για κάθε n έχουμε $k_n < k_{n+1}$, άρα $a_{k_n} \leq a_{k_{n+1}}$ αφού η (a_n) είναι αύξουσα.

Αφού $a_{k_n} \rightarrow x$ και η (a_{k_n}) είναι αύξουσα, έχουμε $a_{k_n} \leq x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $k_n \geq n$, και αφού η (a_n) είναι αύξουσα παίρνουμε $a_n \leq a_{k_n} \leq x$. Επομένως η (a_n) είναι άνω φραγμένη. Αφού είναι και αύξουσα, συγκλίνει σε κάποιον y . Τότε όμως $a_{k_n} \rightarrow y$ και αφού $a_{k_n} \rightarrow x$ έχουμε $y = x$. Δηλαδή, $a_n \rightarrow x$.

(γ) Ψευδής. Θεωρούμε την ακολουθία (a_n) με $a_{2k} = k$ και $a_{2k-1} = 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Τότε, για κάθε $M > 0$ υπάρχουν (και μάλιστα άπειροι) όροι της (a_n) που είναι μεγαλύτεροι από M . Πράγματι, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $k_0 > M$, και τότε, για κάθε $k \geq k_0$ ισχύει $a_{2k} = k \geq k_0 > M$.

Όμως, $a_n \not\rightarrow +\infty$: αν αυτό ίσχυε, θα έπρεπε όλοι τελικά οι όροι της (a_n) να είναι μεγαλύτεροι από 2, το οποίο δεν ισχύει αφού όλοι οι περιττοί όροι της (a_n) είναι ίσοι με 1. $\square$

Άσκηση 8. Έστω (a_k) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής (αιτιολογήστε την απάντησή σας).

(α) Αν $k^2 a_k \rightarrow 0$ τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

(β) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει.

(γ) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k}$ συγκλίνει.

(δ) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^3$ συγκλίνει απολύτως.

Υπόδειξη: (α) Αληθής. Αφού $k^2 a_k \rightarrow 0$, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $|k^2 a_k| \leq 1$ για κάθε $k \geq k_0$, ή ισοδύναμα,

$$|a_k| \leq \frac{1}{k^2} \text{ για κάθε } k \geq k_0.$$

Αφού η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης η σειρά $\sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει και έπεται ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως.

(β) Ψευδής. Αν $a_k = \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$ τότε από το κριτήριο Leibniz η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

συγκλίνει (αφού η $1/\sqrt{k}$ είναι φθίνουσα και τείνει στο 0). Όμως η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

αποκλίνει (αρμονική σειρά).

(γ) Αληθής. Αφού η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, η ακολουθία (s_n) με $s_n = a_1 + \dots + a_n$, των μερικών αθροισμάτων είναι φραγμένη. Η ακολουθία $b_k = \frac{1}{k}$ είναι φθίνουσα, έχει θετικούς όρους και συγκλίνει στο 0. Επομένως ικανοποιούνται οι υποθέσεις του κριτηρίου Dirichlet και συμπεραίνουμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k}$ συγκλίνει.

(δ) Αληθής. Αφού η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει, έχουμε $a_k^2 \rightarrow 0$ άρα $a_k \rightarrow 0$. Συνεπώς, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε: για κάθε $k \geq k_0$ έχουμε $|a_k| \leq 1$.

Τότε, για κάθε $k \geq k_0$ έχουμε

$$|a_k^3| = |a_k^2| \cdot |a_k| = a_k^2 \cdot |a_k| \leq a_k^2.$$

Από το κριτήριο σύγκρισης, η $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k^3$ συγκλίνει απολύτως, άρα και η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^3$ συγκλίνει απολύτως. $\square$

Άσκηση 9. Έστω (a_k) και (b_k) ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε ότι αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ συγκλίνει.

Υπόδειξη: Αφού η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει, έχουμε $b_k \rightarrow 0$. Ειδικότερα, η (b_k) είναι φραγμένη: υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $|b_k| \leq M$ για κάθε $k \geq 1$.

Παρατηρούμε τώρα ότι, για κάθε $k \geq 1$,

$$|a_k b_k| = |a_k| \cdot |b_k| \leq M |a_k|,$$

και αφού η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει (από την υπόθεση), το κριτήριο σύγκρισης μας δίνει ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k b_k|$ συγκλίνει. Επομένως, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ συγκλίνει και μάλιστα απολύτως. $\square$

Άσκηση 10. Έστω (a_n) ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{n^2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η (a_n) συγκλίνει.

Υπόδειξη: Θα δείξουμε ότι η (a_n) είναι βασική ακολουθία. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, η ακολουθία $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ των μερικών αθροισμάτων της συγκλίνει, άρα είναι βασική. Συνεπώς, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $n > m \geq n_0$,

$$\sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k^2} = s_n - s_m < \varepsilon.$$

Τότε, από την υπόθεση, για κάθε $n > m \geq n_0$ έχουμε

$$|a_n - a_m| = \left| \sum_{k=m}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \right| \leq \sum_{k=m}^{n-1} |a_{k+1} - a_k| \leq \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{k^2} < \varepsilon.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η (a_n) είναι βασική, άρα συγκλίνει. $\square$

Άσκηση 11. Έστω $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$. Αποδείξτε ότι η f είναι φραγμένη. Παίρνει η f απαραίτητα μέγιστη τιμή;

Υπόδειξη: Αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε, για κάθε $x \geq M$ ισχύει ότι $|f(x) - 1| < 1$, οπότε $|f(x)| \leq |f(x) - 1| + 1 < 2$. Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[0, M]$, άρα είναι φραγμένη σε αυτό: υπάρχει $\alpha > 0$ τέτοιος ώστε $|f(x)| \leq \alpha$ για κάθε $x \in [0, M]$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι

$$|f(x)| \leq \beta := \max\{2, \alpha\}$$

για κάθε $x \in [0, +\infty)$. Δηλαδή, η f είναι φραγμένη.

Με αυτές τις υποθέσεις η f δεν παίρνει απαραίτητα μέγιστη τιμή. Θεωρήστε για παράδειγμα την $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $x \in [0, +\infty)$. Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ και η f είναι συνεχής, όμως η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα δεν παίρνει μέγιστη τιμή. $\square$

Άσκηση 12. Έστω $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$. Αποδείξτε ότι η f παίρνει ελάχιστη τιμή.

Υπόδειξη: Αφού $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, υπάρχει $0 < a < 1$ ώστε $f(x) > f(1)$ για κάθε $x \in (0, a)$. Ομοίως, αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, υπάρχει $b > 1$ ώστε $f(x) > f(1)$ για κάθε $x \in (b, +\infty)$.

Η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ άρα παίρνει ελάχιστη τιμή σε αυτό. Υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \text{για κάθε } x \in [a, b].$$

Παρατηρήστε ότι $1 \in [a, b]$, άρα $f(x_0) \leq f(1)$. Έπεται ότι: αν $x \in (0, a)$ τότε $f(x_0) \leq f(1) < f(x)$ και αν $x \in (b, +\infty)$ τότε $f(x_0) \leq f(1) < f(x)$.

Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι $f(x_0) \leq f(x)$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$, δηλαδή η f παίρνει ελάχιστη τιμή στο x_0 . $\square$

Άσκηση 13. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτησης. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $x_n \in [a, b]$ ώστε $f(x_n) \rightarrow 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ ώστε $f(x_0) = 0$.

Υπόδειξη: Υποθέτουμε ότι η f δεν μηδενίζεται στο $[a, b]$. Εξηγήστε γιατί υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $|f(x)| \geq \varepsilon$ για κάθε $x \in [a, b]$ (χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι η $|f|$ παίρνει ελάχιστη τιμή). Από την υπόθεση όμως, υπάρχει ακολουθία (x_n) στο $[0, 1]$ ώστε $f(x_n) \rightarrow 0$. Για όλους τελικά τους $n \in \mathbb{N}$ πρέπει να ισχύει $|f(x_n)| < \varepsilon$, το οποίο οδηγεί σε άτοπο. $\square$

Άσκηση 14. Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής. Αν είναι αληθής αποδείξτε την και αν είναι ψευδής δώστε αντιπαράδειγμα.

(α) Υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι συνεχής στο 0 και ασυνεχής σε όλα τα άλλα σημεία.

(β) Αν η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ικανοποιεί την $|f(x)| \leq x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε είναι συνεχής στο 0.

(γ) Αν η $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής, και αν $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$, τότε το σύνολο τιμών της f είναι το $[0, 1]$.

Υπόδειξη: (α) Σωστό. Θεωρήστε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x$ αν $x \in \mathbb{Q}$ και $f(x) = -x$ αν $x \notin \mathbb{Q}$.

Έστω (x_n) ακολουθία στο $\mathbb{R}$ με $x_n \rightarrow 0$. Τότε $|f(x_n)| = |x_n| \rightarrow 0$, άρα $f(x_n) \rightarrow 0 = f(0)$. Από την αρχή της μεταφοράς η f είναι συνεχής στο 0.

Έστω τώρα $x \neq 0$. Θεωρούμε ακολουθία ρητών (q_n) και ακολουθία αρρήτων (ξ_n) ώστε $q_n \rightarrow x$ και $\xi_n \rightarrow x$. Τότε, $f(q_n) = q_n \rightarrow x$ και $f(\xi_n) = -\xi_n \rightarrow -x$. Αν η f ήταν συνεχής στο x , από την αρχή της μεταφοράς θα είχαμε $f(x) = \lim f(q_n) = \lim f(\xi_n)$, δηλαδή $x = -x$, το οποίο είναι άτοπο αφού $x \neq 0$.

(β) Αληθής. Παρατηρήστε ότι $|f(0)| \leq 0^2 = 0$, δηλαδή $f(0) = 0$. Έστω (x_n) ακολουθία στο $\mathbb{R}$ με $x_n \rightarrow 0$. Τότε, από την $-x_n^2 \leq f(x_n) \leq x_n^2$ και το κριτήριο παρεμβολής έπεται ότι $f(x_n) \rightarrow 0 = f(0)$. Από την αρχή της μεταφοράς η f είναι συνεχής στο 0.

(γ) Ψευδής. Θεωρήστε μια συνάρτηση με $f(1/2) = 2$ και γραμμική σε καθένα από τα $[0, 1/2]$ και $[1/2, 1]$ (με τύπο $f(x) = 4x$ στο $[0, 1/2]$ και $f(x) = 3 - 2x$ στο $[1/2, 1]$). Το σύνολο τιμών της f είναι το $[0, 2]$. $\square$

Άσκηση 15. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση που ορίζεται ως εξής: $f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \ln \frac{1}{x} & , \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & , \text{αν } x = 0 \end{cases}$.

(i) Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και εξετάστε τη συνέχεια της f' .

(ii) Αποδείξτε ότι $f'(0) > 0$ αλλά για κάθε $\delta > 0$ η f δεν είναι αύξουσα στο $(-\delta, \delta)$.

Υπόδειξη: (i) Η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \neq 0$ με

$$f'(x) = 1 + 4x \ln \frac{1}{x} - 2 \ln \frac{1}{x}.$$

Επίσης,

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + 2x \eta \mu \frac{1}{x}\right) = 1,$$

αφού $\lim_{x \rightarrow 0} x \eta \mu \frac{1}{x} = 0$ (παρατηρήστε ότι $|x \eta \mu \frac{1}{x}| \leq |x|$ για κάθε $x \neq 0$ και χρησιμοποιήστε το κριτήριο παρεμβολής).

Η f' είναι συνεχής σε κάθε $x \neq 0$, είναι όμως ασυνεχής στο $x = 0$ διότι δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ άρα δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$.

(ii) Είδαμε ότι $f'(0) = 1 > 0$. Έστω ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιος ώστε η f να είναι αύξουσα στο $(-\delta, \delta)$. Τότε θα έπρεπε να έχουμε $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (-\delta, \delta)$. Αν όμως θεωρήσουμε την ακολουθία $y_n = \frac{1}{2\pi n}$ τότε $y_n \in (-\delta, \delta)$ για όλους τελικά τους n (διότι $y_n \rightarrow 0$) και

$$f'(y_n) = 1 + \frac{4}{2\pi n} \eta \mu(2\pi n) - 2 \sigma \nu(2\pi n) = 1 - 2 = -1 < 0,$$

το οποίο οδηγεί σε άτοπο. □

Άσκηση 16. Έστω $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και για κάθε $x > 0$ ισχύει $|f'(x)| \leq \frac{1}{x^2}$. Αποδείξτε ότι:

(i) Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} |f(k+1) - f(k)|$ συγκλίνει.

(ii) Η f είναι φραγμένη.

Υπόδειξη: (i) Έστω $k \in \mathbb{N}$. Από το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi_k \in (k, k+1)$ τέτοιο ώστε $f(k+1) - f(k) = f'(\xi_k)(k+1 - k) = f'(\xi_k)$. Από την υπόθεση έχουμε ότι $|f'(\xi_k)| \leq \frac{1}{\xi_k^2} \leq \frac{1}{k^2}$, άρα $|f(k+1) - f(k)| \leq \frac{1}{k^2}$. Έπεται ότι

$$M := \sum_{k=1}^{\infty} |f(k+1) - f(k)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty.$$

(ii) Έστω $x > 1$. Υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $k < x < k+1$. Τότε,

$$|f(x)| \leq |f(x) - f(k+1)| + |f(k+1) - f(k)| + |f(k) - f(x)| \leq M + |f(x) - f(k+1)| + |f(k) - f(x)|.$$

Από το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi_x \in (x, k+1)$ τέτοιο ώστε $f(k+1) - f(x) = f'(\xi_x)(k+1 - x)$. Από την υπόθεση έχουμε ότι $|f'(\xi_x)| \leq \frac{1}{\xi_x^2} \leq \frac{1}{k^2}$, άρα

$$|f(k+1) - f(x)| \leq \frac{1}{k^2}(k+1 - x) \leq \frac{1}{k^2} \leq 1.$$

Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι $|f(k) - f(x)| \leq 1$. Συνεπώς, για κάθε $x > 1$ έχουμε ότι

$$|f(x)| \leq M + 2.$$

Η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$, άρα φραγμένη σε αυτό: υπάρχει $\alpha > 0$ τέτοιος ώστε $|f(x)| \leq \alpha$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι

$$|f(x)| \leq \max\{M + 2, \alpha\}$$

για κάθε $x \in [0, +\infty)$. Δηλαδή, η f είναι φραγμένη.

Άσκηση 17. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε $a_n = f(1/n)$ για κάθε $n = 1, 2, \dots$. Αποδείξτε ότι:

(1) Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε $f(0) = 0$.

- (2) Αν υπάρχει η $f'(0)$ και αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε $f'(0) = 0$. [Υπόδειξη: παρατηρήστε ότι $f'(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} na_n$.]

Υπόδειξη: (1) Παρατηρούμε ότι, αφού η f είναι συνεχής στο 0, από την αρχή της μεταφοράς έχουμε

$$f(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(1/n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

και $a_n \rightarrow 0$ αφού η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Επομένως, $f(0) = 0$.

- (2) Παρατηρούμε ότι αφού υπάρχει η $f'(0)$ θα πρέπει να είναι ίση με

$$f'(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(1/n) - f(0)}{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} nf(1/n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (na_n).$$

Χρησιμοποιήσαμε την αρχή της μεταφοράς και το γεγονός ότι $f(0) = 0$ από το (α).

Επομένως $na_n \rightarrow \ell = f'(0)$. Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη θα αποκλείσουμε τις $\ell > 0$ και $\ell < 0$, οπότε $f'(0) = \ell = 0$.

Έστω ότι $na_n \rightarrow \ell > 0$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $na_n > \frac{\ell}{2}$ για κάθε $n \geq n_0$. Όμως τότε, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $a_n \geq \frac{\ell}{2n}$ και η σειρά $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\ell}{2n}$ αποκλίνει στο $+\infty$, άρα η $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ αποκλίνει, άτοπο.

Έστω ότι $na_n \rightarrow \ell < 0$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $na_n < \frac{\ell}{2}$ για κάθε $n \geq n_0$. Όμως τότε, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $a_n \leq \frac{\ell}{2n}$ και αφού $\ell < 0$ η σειρά $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\ell}{2n}$ αποκλίνει στο $-\infty$, άρα η $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ αποκλίνει στο $-\infty$, άτοπο.

Συνεπώς, $f'(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \ell = 0$. □

Άσκηση 18. Έστω $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση με $\int_a^b g(x)dx > 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει διάστημα $[\gamma, \delta] \subseteq [a, b]$ τέτοιο ώστε $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [\gamma, \delta]$. [Υπόδειξη: Εξηγήστε πρώτα γιατί υπάρχει διαμέριση P του $[a, b]$ τέτοια ώστε $L(g, P) > 0$.]

Υπόδειξη: Γνωρίζουμε ότι

$$\sup\{L(g, P) : P \text{ διαμέριση του } [a, b]\} = \int_a^b g(x)dx > 0.$$

Επομένως, υπάρχει διαμέριση $P_0 = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ του $[a, b]$ τέτοια ώστε

$$L(g, P_0) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k) > 0.$$

Έπεται ότι υπάρχει k τέτοιος ώστε $m_k(x_{k+1} - x_k) > 0$, δηλαδή $m_k > 0$. Όμως,

$$m_k = \inf\{g(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\}.$$

Θετώντας $\gamma = x_k$ και $\delta = x_{k+1}$ έχουμε $g(x) \geq m_k > 0$ για κάθε $x \in [\gamma, \delta]$. □

Άσκηση 19. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι

$$\left(\int_a^b f(t) \sin t \, dt\right)^2 + \left(\int_a^b f(t) \cos t \, dt\right)^2 \leq (b-a) \int_a^b |f(t)|^2 \, dt.$$

Υπόδειξη: Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}
& \left(\int_a^b f(t) \sin t \, dt \right)^2 + \left(\int_a^b f(t) \cos t \, dt \right)^2 \\
& \leq \left(\int_a^b |f(t)|^2 \, dt \right) \left[\int_a^b \sin^2 t \, dt + \int_a^b \cos^2 t \, dt \right] \\
& = \left(\int_a^b |f(t)|^2 \, dt \right) \left[\int_a^b (\sin^2 t + \cos^2 t) \, dt \right] \\
& = \left(\int_a^b |f(t)|^2 \, dt \right) \left[\int_a^b \mathbf{1} \, dt \right] \\
& = (b-a) \int_a^b |f(t)|^2 \, dt.
\end{aligned}$$

□

Άσκηση 20. Έστω $b > a > 0$. Υπολογίστε (με αιτιολόγηση) το

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{\sin(nx)}{x} dx.$$

Υπόδειξη: Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{\sin(nx)}{x} dx &= \int_a^b \left(\frac{-\cos(nx)}{n} \right)' \frac{1}{x} dx \\
&= -\frac{1}{n} \frac{\cos(nx)}{x} \Big|_a^b - \frac{1}{n} \int_a^b \cos(nx) \frac{1}{x^2} dx.
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\left| \frac{1}{n} \frac{\cos(nx)}{x} \Big|_a^b \right| = \frac{1}{n} \left| \frac{\cos(nb)}{b} - \frac{\cos(na)}{a} \right| \leq \frac{1}{n} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right) \rightarrow 0$$

και

$$\frac{1}{n} \left| \int_a^b \cos(nx) \frac{1}{x^2} dx \right| \leq \frac{1}{n} \int_a^b \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \rightarrow 0,$$

άρα

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{\sin(nx)}{x} dx = 0.$$

□

Άσκηση 21. Έστω $f : [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ συνεχής και φθίνουσα. Αποδείξτε ότι η ακολουθία $a_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx$ συγκλίνει.

Υπόδειξη: Γράφουμε

$$\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= \sum_{k=1}^{n+1} f(k) - \int_1^{n+1} f(x) dx - \left(\sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx \right) \\
&= f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x) dx = \int_n^{n+1} (f(n+1) - f(x)) dx \leq 0
\end{aligned}$$

διότι $f(n+1) \leq f(x)$ για κάθε $x \in [n, n+1]$ αφού η f είναι φθίνουσα. Συνεπώς, η (a_n) είναι φθίνουσα. Παρατηρούμε τώρα ότι

$$\int_1^n f(x)dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k),$$

άρα

$$a_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x)dx \geq \sum_{k=1}^n f(k) - \sum_{k=1}^{n-1} f(k) = f(n) \geq 0,$$

άρα η (a_n) είναι κάτω φραγμένη από το 0, και αφού είναι φθίνουσα έπεται ότι συγκλίνει. $\square$

Άσκηση 22. Έστω $f : [0, +\infty)$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή παράγωγο f' και $f(0) = 0$. Αποδείξτε, ότι για κάθε $x > 0$,

$$|f(x)|^2 \leq x \int_0^x |f'(t)|^2 dt.$$

Υπόδειξη: Γράφουμε

$$\begin{aligned} |f(x)|^2 &= |f(x) - f(0)|^2 = \left| \int_0^x f'(t) dt \right|^2 \\ &\leq \left(\int_0^x \mathbf{1} \cdot |f'(t)| dt \right)^2 \leq \left(\int_0^x \mathbf{1}^2 dt \right) \left(\int_0^x |f'(t)|^2 dt \right) \\ &= x \int_0^x |f'(t)|^2 dt, \end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι $f(0) = 0$, το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού και την ανισότητα Cauchy-Schwarz. $\square$

Άσκηση 23. Έστω $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε το $\int_0^\infty f(t)dt$ να υπάρχει και να είναι πεπερασμένο. Αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{x/2}^x f(t)dt = 0$. Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι η f είναι φθίνουσα, αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (xf(x)) = 0$.

Υπόδειξη: Θέτουμε

$$I = \int_0^\infty f(t)dt = \lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^y f(t)dt.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $y_0 > 0$ τέτοιος ώστε: για κάθε $y > y_0$, $\left| \int_0^y f(t)dt - I \right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Τότε, για κάθε $x > 2y_0$ έχουμε $x > y_0$ και $x/2 > y_0$, άρα

$$\begin{aligned} \left| \int_{x/2}^x f(t)dt \right| &= \left| \int_0^x f(t)dt - \int_0^{x/2} f(t)dt \right| \\ &\leq \left| \int_0^x f(t)dt - I \right| + \left| I - \int_0^{x/2} f(t)dt \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{x/2}^x f(t)dt = 0$.

Για τον δεύτερο ισχυρισμό παρατηρούμε ότι αν η f είναι φθίνουσα τότε

$$0 \leq xf(x) = 2 \cdot \frac{x}{2} f(x) \leq 2 \int_{x/2}^x f(t)dt \rightarrow 0$$

όταν $x \rightarrow \infty$, από τον πρώτο ισχυρισμό. $\square$

Άσκηση 24. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{2\varepsilon}^{4\varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx = f(0) \cdot \ln 2.$$

[Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι $\int_a^{2a} \frac{1}{x} dx = \ln 2$ για κάθε $a > 0$.]

Υπόδειξη: Έστω $\delta > 0$. Υπάρχει $\varepsilon_0 > 0$ τέτοιος ώστε $|f(x) - f(0)| \leq \delta$ για κάθε $x \in [0, \varepsilon_0]$. Τότε, για κάθε $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, χρησιμοποιώντας και την

$$\int_{2\varepsilon}^{4\varepsilon} \frac{1}{x} dx = \ln(4\varepsilon) - \ln(2\varepsilon) = \ln 2$$

έχουμε

$$\begin{aligned} \left| \int_{2\varepsilon}^{4\varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx - f(0) \cdot \ln 2 \right| &= \left| \int_{2\varepsilon}^{4\varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx - f(0) \cdot \int_{2\varepsilon}^{4\varepsilon} \frac{1}{x} dx \right| \\ &= \left| \int_{2\varepsilon}^{4\varepsilon} (f(x) - f(0)) \frac{1}{x} dx \right| \leq \int_{2\varepsilon}^{4\varepsilon} |f(x) - f(0)| \frac{1}{x} dx \leq \delta \int_{2\varepsilon}^{4\varepsilon} \frac{1}{x} dx = \delta(\ln 2). \end{aligned}$$

Από τον ορισμό του ορίου έχουμε το ζητούμενο. □

Άσκηση 25. Έστω $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο και $f(0) = 0$. Δείξτε ότι

$$\int_0^a |f(t)f'(t)| dt \leq \frac{a}{2} \int_0^a |f'(t)|^2 dt.$$

Υπόδειξη: Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \int_0^x |f'(t)| dt$. Έχουμε $g(0) = 0$ και $g'(t) = |f'(t)|$ για κάθε $t \in [0, a]$. Επίσης,

$$|f(x)| = |f(x) - f(0)| = \left| \int_0^x f'(t) dt \right| \leq \int_0^x |f'(t)| dt = g(x)$$

για κάθε $x \in [0, a]$, άρα

$$\int_0^a |f(t)f'(t)| dt \leq \int_0^a g(t)g'(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^a [g^2(t)]' dt = \frac{1}{2} g^2(a).$$

Τέλος,

$$\frac{1}{2} g^2(a) = \frac{1}{2} \left(\int_0^a g'(t) dt \right)^2 \leq \frac{a}{2} \int_0^a (g'(t))^2 dt = \frac{a}{2} \int_0^a |f'(t)|^2 dt$$

από την ανισότητα Cauchy-Schwarz και την $g'(t) = |f'(t)|$. □