

ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
11ο Φυλλάδιο Ασκήσεων (υποδείξεις)

Ασκηση 1. Έστω $n \geq 1$ και $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ συναρτήσεις n φορές παραγωγίσιμες στο $x_0 \in (a, b)$ ώστε $f(x_0) = f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $g(x_0) = g'(x_0) = \dots = g^{(n-1)}(x_0) = 0$ και $g^{(n)}(x_0) \neq 0$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}.$$

Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι

$$T_{n,f,x_0}(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad \text{και} \quad T_{n,g,x_0}(x) = \frac{g^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Επίσης,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_{n,f,x_0}(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_{n,g,x_0}(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Συνεπώς,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{R_{n,f,x_0}(x)}{(x - x_0)^n}}{\frac{g^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{R_{n,g,x_0}(x)}{(x - x_0)^n}} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}.$$

□

Ασκηση 2. Για καθεμία από τις δυναμοσειρές

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \\ \text{(ii)} \quad & 1 - x^3 + x^6 - x^9 + \dots \\ \text{(iii)} \quad & \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3 \cdot 2} + \frac{x^4}{4 \cdot 3} - \frac{x^5}{5 \cdot 4} + \dots \\ \text{(iv)} \quad & 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots \end{aligned}$$

να βρείτε την ακτίνα σύγκλισης R και το σύνολο σύγκλισης της δυναμοσειράς, καθώς και τύπο για τη συνάρτηση που ορίζεται από την δυναμοσειρά στο $(-R, R)$.

Υπόδειξη: (α) Εφαρμόζουμε το κριτήριο του λόγου για να βρούμε για ποιες τιμές του x συγκλίνει απολύτως η σειρά. Θέτοντας $\beta_k = (-1)^k \frac{x^k}{k!}$ έχουμε ότι

$$\frac{|\beta_{k+1}|}{|\beta_k|} = \frac{|x|}{k+1} \rightarrow 0 < 1,$$

άρα η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δηλαδή, $R = +\infty$ και το σύνολο σύγκλισης είναι το $\mathbb{R}$.

Αφού $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, θέτοντας όπου x το $-x$ έχουμε

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Το δεύτερο μέρος του συλλογισμού δείχνει έμμεσα ότι $R = +\infty$, θα μπορούσαμε λοιπόν να παραλείψουμε το πρώτο μέρος.

(β) Είναι γεωμετρική σειρά με λόγο $-x^3$. Γνωρίζουμε ότι συγχλίνει αν και μόνο αν $|-x^3| < 1$, δηλαδή αν και μόνο αν $|x| < 1$. Συνεπώς, $R = 1$ και το σύνολο σύγκλισης είναι το $(-1, 1)$. Από τον τύπο για το άθροισμα γεωμετρικής σειράς παίρνουμε

$$1 - x^3 + x^6 - x^9 + \dots = \frac{1}{1 + x^3}, \quad x \in (-1, 1).$$

(γ) Παρατηρούμε ότι $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k(k-1)}} = 1$, άρα το κριτήριο της ρίζας μας δίνει ότι η δυναμοσειρά

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3 \cdot 2} + \frac{x^4}{4 \cdot 3} - \frac{x^5}{5 \cdot 4} + \dots$$

έχει ακτίνα σύγκλισης $R = 1$. Για $x = 1$ και $x = -1$ βλέπουμε ότι οι σειρές $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k(k-1)}$ και $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)}$ αντίστοιχα, συγχλίνουν απολύτως. Επομένως, το σύνολο σύγκλισης είναι το $[-1, 1]$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3 \cdot 2} + \frac{x^4}{4 \cdot 3} - \frac{x^5}{5 \cdot 4} + \dots$ στο $[-1, 1]$. Σύμφωνα με το θεώρημα παραγωγίσιμης δυναμοσειρών, για κάθε $x \in (-1, 1)$ μπορούμε να παραγωγίσουμε την F παραγωγίζοντας όρο προς όρο, δηλαδή

$$F'(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad x \in (-1, 1).$$

Όμως, η τελευταία δυναμοσειρά παριστάνει τη συνάρτηση $\ln(1+x)$, δηλαδή $F'(x) = \ln(1+x)$. Συμπεραίνουμε ότι η F είναι η παράγουσα της $\ln(1+x)$ που ικανοποιεί την $F(0) = 0$, δηλαδή

$$F(x) = (1+x) \ln(1+x) - x, \quad x \in (-1, 1).$$

(δ) Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \dots$$

Προσθέτοντας κατά μέλη και διαιρώντας με 2 παίρνουμε

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ταυτόχρονα έχουμε δείξει απευθείας ότι $R = +\infty$. □

Άσκηση 3. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ άπειρες φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f''' = f$ και $f(0) = 1$, $f'(0) = f''(0) = 0$.

(α) Έστω $R > 0$. Δείξτε ότι υπάρχει $M = M(R) > 0$ ώστε: για κάθε $x \in [-R, R]$ και για κάθε $k = 0, 1, 2, \dots$,

$$|f^{(k)}(x)| \leq M.$$

(β) Βρείτε το πολυώνυμο Taylor $T_{3n,f,0}$ και, χρησιμοποιώντας το (α) και οποιονδήποτε τύπο υπολοίπου, αποδείξτε ότι

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k}}{(3k)!}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη: (α) Από την υπόθεση ότι $f''' = f$ βλέπουμε ότι, για κάθε $k = 0, 1, 2, \dots$, η $f^{(k)}$ είναι κάποια από τις f, f', f'' . Οι τρεις αυτές συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες, άρα συνεχείς. Συνεπώς, αν σταθεροποιήσουμε $R > 0$ τότε καθεμία από τις f, f', f'' είναι φραγμένη στο $[-R, R]$. Δηλαδή, υπάρχει $M = M(R) > 0$ ώστε $|f(x)| \leq M, |f'(x)| \leq M$ και $|f''(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [-R, R]$. Έπεται ότι, για κάθε $x \in [-R, R]$ και για κάθε $k = 0, 1, 2, \dots$,

$$|f^{(k)}(x)| \leq M.$$

(β) Έχουμε $f^{(3k)}(0) = 1, f^{(3k+1)}(0) = 0$ και $f^{(3k+2)}(0) = 0$ για κάθε $k = 0, 1, 2, \dots$. Επομένως,

$$T_{3n,f,0}(x) = \sum_{s=0}^{3n} \frac{f^{(s)}(0)}{s!} x^s = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(3k)!} x^{3k}.$$

Έστω $x \in \mathbb{R}$. Σταθεροποιούμε $R > |x|$ και θεωρούμε την σταθερά $M = M(R)$ από το (α). Ισχύει

$$|R_{3n,f,0}(x)| = \left| \frac{f^{(3n+1)}(\xi)}{(3n+1)!} x^{3n+1} \right|$$

για κάποιο ξ μεταξύ των 0 και x . Αφού $|\xi| \leq |x| < R$, έχουμε $|f^{(3n+1)}(\xi)| \leq M$. Συνεπώς,

$$|R_{3n,f,0}(x)| \leq \frac{M}{(3n+1)!} |x|^{3n+1}.$$

Με το κριτήριο του λόγου βλέπουμε ότι η ακολουθία του δεξιού μέλους συγκλίνει στο 0. Έρα, $R_{3n,f,0}(x) \rightarrow 0$ όταν $n \rightarrow \infty$. Έπεται ότι

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{3n,f,0}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k}}{(3k)!}.$$

Το $x \in \mathbb{R}$ ήταν τυχόν, οπότε έχουμε το ζητούμενο. □

Άσκηση 4. Βρείτε το πολυώνυμο Taylor $T_{n,f,0}$ για τη συνάρτηση

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Υπόδειξη: Από το ανάπτυγμα της εκθετικής συνάρτησης, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$e^{-t^2} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k t^{2k}}{k!} + g_n(t)$$

όπου

$$|g_n(t)| \leq \frac{e^{t^2}}{(n+1)!} (t^2)^{n+1}.$$

Επομένως,

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^x t^{2k} dt + \int_0^x g_n(t) dt.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\left| \int_0^x g_n(t) dt \right| \leq \frac{e^{x^2}}{(n+1)!} \left| \int_0^x t^{2n+2} dt \right| \leq \frac{e^{x^2} |x|^{2n+3}}{(n+1)!(2n+3)}.$$

Θέτουμε

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^x t^{2k} dt = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{k!(2k+1)}.$$

Τότε,

$$\left| \frac{f(x) - P_{2n+1}(x)}{x^{2n+2}} \right| = \left| \frac{1}{x^{2n+2}} \int_0^x g_n(t) dt \right| \leq \frac{e^{x^2} |x|^{2n+3}}{|x|^{2n+2} (n+1)! (2n+3)} \rightarrow 0$$

όταν $x \rightarrow 0$. Από τον χαρακτηρισμό του πολυωνύμου Taylor $T_{s,f,0}$ έπεται ότι

$$T_{2n+1,f,0}(x) = T_{2n+2,f,0}(x) = P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{k!(2k+1)}.$$

Ένας πιο άμεσος τρόπος είναι με χρήση του θεωρήματος παραγωγίσιμης και ολοκλήρωσης δυναμοσειρών. Ολοκληρώνοντας όρο προς όρο την

$$e^{-t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{k!}, \quad t \in \mathbb{R}$$

παίρνουμε

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^x t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)} x^{2k+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Έπεται ότι

$$T_{2n+1,f,0}(x) = T_{2n+2,f,0}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{k!(2k+1)}.$$

□

Άσκηση 5. Υπολογίστε το ανάπτυγμα Taylor (με κέντρο το 0) της συνάρτησης

$$g(x) = x \cos(\sqrt{x}).$$

Για ποιές τιμές του x συγκλίνει; Να βρεθούν οι $g^{(20)}(0)$ και $g^{(21)}(0)$.

Υπόδειξη: Η συνάρτηση g ορίζεται στο $[0, +\infty)$. Για κάθε $y \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $\cos y = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!}$, επομένως

$$x \cos(\sqrt{x}) = x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{(2k)!} =: \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k, \quad x \geq 0.$$

Γνωρίζουμε επίσης ότι

$$g^{(20)}(0) = 20! a_{20} = 20! \cdot (-1)^{19} \frac{1}{(38)!} \quad \text{και} \quad g^{(21)}(0) = 21! a_{21} = 20! \cdot (-1)^{20} \frac{1}{(40)!}.$$

□

Άσκηση 6. Υπολογίστε το ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης $f(x) = e^{x^2/2} - e^{-x^2/2}$ με κέντρο το 0 στο $\mathbb{R}$, και χρησιμοποιώντας το αποδείξτε ότι

$$x^2 + \frac{x^6}{24} \leq e^{x^2/2} - e^{-x^2/2}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη: Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι

$$\begin{aligned} e^{x^2/2} &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4 \cdot 2!} + \frac{x^6}{8 \cdot 3!} + \frac{x^8}{16 \cdot 4!} + \frac{x^{10}}{32 \cdot 5!} + \dots \\ e^{-x^2/2} &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4 \cdot 2!} - \frac{x^6}{8 \cdot 3!} + \frac{x^8}{16 \cdot 4!} - \frac{x^{10}}{32 \cdot 5!} + \dots \end{aligned}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε

$$e^{x^2/2} - e^{-x^2/2} = x^2 + \frac{x^6}{4 \cdot 3!} + \frac{x^{10}}{16 \cdot 5!} + \dots \geq x^2 + \frac{x^6}{4 \cdot 3!} = x^2 + \frac{x^6}{24}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. □

Άσκηση 7. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με

$$f(x) \geq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Υποθέτουμε ότι

$$f''(x) \leq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.

Υπόδειξη: Έστω $x \in \mathbb{R}$. Για κάθε $y \neq x$ στο $\mathbb{R}$, από το θεώρημα Taylor υπάρχει ξ ανάμεσα στα x και y ώστε

$$0 \leq f(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + \frac{f''(\xi)}{2}(y-x)^2 \leq f(x) + f'(x)(y-x),$$

διότι $f(y) \geq 0$ και $f''(\xi) \leq 0$ από την υπόθεση.

Αν $f'(x) > 0$ τότε αφήνοντας το $y \rightarrow -\infty$ καταλήγουμε σε άτοπο, αφού $\lim_{y \rightarrow -\infty} (f(x) + f'(x)(y-x)) = -\infty$.

Αν $f'(x) < 0$ τότε αφήνοντας το $y \rightarrow +\infty$ καταλήγουμε ομοίως σε άτοπο.

Έπεται ότι $f'(x) = 0$ για το τυχόν $x \in \mathbb{R}$, άρα η f είναι σταθερή.