

ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
10ο Φυλλάδιο Ασκήσεων (υποδείξεις)

Ασκηση 1. Έστω $g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και

$$f(x) = \int_{\alpha}^x (x-t)g(t)dt.$$

Αποδείξτε ότι η f ικανοποιεί τις

$$f''(x) = g(x), \quad f(\alpha) = f'(\alpha) = 0.$$

Υπόδειξη: Έχουμε ότι

$$f(x) = \int_{\alpha}^x (x-t)g(t)dt = x \int_{\alpha}^x g(t)dt - \int_{\alpha}^x tg(t)dt.$$

Παραγωγίζοντας βλέπουμε ότι

$$f'(x) = \int_{\alpha}^x g(t)dt + xg(x) - xg(x) = \int_{\alpha}^x g(t)dt,$$

επομένως

$$f''(x) = g(x).$$

Θέτοντας $x = \alpha$ στις παραπάνω σχέσεις ελέγχουμε εύκολα ότι $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$. □

Ασκηση 2. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $F : \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο

$$F(x) = \int_1^x \sin(\sin t)dt,$$

είναι αντιστρέψιμη. Υπολογίστε την $(F^{-1})'(0)$,

Υπόδειξη: Η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη με

$$F'(x) = \sin(\sin x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right],$$

αφού

$$\sin(\sin x) = 0 \iff \sin x = 0 \iff x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Επομένως η F είναι 1-1, άρα ορίζεται η αντίστροφή της

$$F^{-1} : F\left(\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]\right) \rightarrow \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right],$$

η οποία είναι επίσης παραγωγίσιμη (από το θεώρημα παραγώγου αντίστροφης απεικόνισης) με

$$(F^{-1})'(0) = \frac{1}{F'(F^{-1}(0))} = \frac{1}{\sin(\sin 1)}.$$

□

Ασκηση 3. Έστω $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Αν

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0,$$

αποδείξτε ότι $f(x) = 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Υπόδειξη: Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) > 0$. Λόγω της συνέχειας της f θα υπάρχει $\delta > 0$ αρκετά μικρό τέτοιο ώστε $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [\alpha, \beta]$ και

$$f(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Τότε όμως, λόγω της μονοτονίας του ολοκληρώματος, θα έχουμε ότι

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx > 0$$

το οποίο είναι άτοπο αφού στην περίπτωση αυτή

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{x_0-\delta} f(x)dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx + \int_{x_0+\delta}^{\beta} f(x)dx > 0.$$

Αν $x_0 = \alpha$ ή $x_0 = \beta$ τότε παίρνουμε διάστημα της μορφής $[\alpha, \alpha + \delta)$ ή $(\beta - \delta, \beta]$ και εργαζόμαστε ανάλογα.

Δεύτερος τρόπος: Με βάση την υπόθεση μπορούμε να δείξουμε ότι για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$

$$F(x) = \int_{\alpha}^x f(t)dt = 0$$

και επομένως $f(x) = F'(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ (παρατηρήστε ότι η συνέχεια της f είναι απαραίτητη ώστε η F να είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$). $\square$

Άσκηση 4. Έστω $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ γνησίως αύξουσα, συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = 0$. Αποδείξτε ότι, για κάθε $x > 0$,

$$\int_0^x f(t) dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt = xf(x).$$

Υπόδειξη: Θεωρούμε τις συναρτήσεις $L, R : [0, +\infty) \rightarrow [0, \infty)$ με

$$L(x) = \int_0^x f(t) dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt \quad \text{και} \quad R(x) = xf(x).$$

Οι L, R είναι παραγωγίσιμες (εξηγήστε γιατί) και $L(0) = 0 = R(0)$. Παρατηρήστε ότι

$$L'(x) = f(x) + f^{-1}(f(x)) \cdot f'(x) = f(x) + xf'(x) = R'(x)$$

για κάθε $x \geq 0$. Έπεται ότι $L(x) = R(x)$ για κάθε $x \geq 0$. $\square$

Άσκηση 5. Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Αποδείξτε την ανισότητα Cauchy-Schwarz:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx \right) \cdot \left(\int_a^b g^2(x)dx \right).$$

Υπόδειξη: Θεωρήστε τη συνάρτηση $Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ορίζεται από την

$$Q(t) = \int_a^b (tf(x) + g(x))^2 dx.$$

Η Q ορίζεται καλά: αφού οι f, g είναι ολοκληρώσιμες, η $tf + g$ (άρα και η $(tf + g)^2$) είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Παρατηρήστε ότι η Q είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού:

$$Q(t) = t^2 \left(\int_a^b f^2(x)dx \right) + 2t \left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right) + \left(\int_a^b g^2(x)dx \right).$$

Αφού $Q(t) \geq 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, η διακρίνουσα είναι μη αρνητική:

$$4 \left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 - 4 \left(\int_a^b f^2(x)dx \right) \cdot \left(\int_a^b g^2(x)dx \right) \leq 0,$$

και αυτό δίνει το ζητούμενο. $\square$

Άσκηση 6. (α) Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση με την ιδιότητα: για κάθε $0 < b \leq 1$ η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[b, 1]$. Αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$.

[Υπόδειξη: Για δοθέν $\varepsilon > 0$ επιλέξτε κατάλληλο $0 < b \leq 1$ και κατάλληλη διαμέριση Q του $[b, 1]$ ώστε για την διαμέριση $P = \{0\} \cup Q$ του $[0, 1]$ να ισχύει ότι $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$.]

(β) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ αν $x \neq 0$ και $f(0) = 2$ είναι ολοκληρώσιμη.

Υπόδειξη: (α) Η f είναι φραγμένη, άρα υπάρχει $A > 0$ ώστε $|f(x)| \leq A$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Θα δείξουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Riemann. Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $0 < b < 1$ αρκετά μικρό ώστε να ικανοποιείται η

$$2Ab < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Από την υπόθεση, η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[b, 1]$, άρα υπάρχει διαμέριση Q του $[b, 1]$ με την ιδιότητα

$$U(f, Q) - L(f, Q) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Θεωρούμε τη διαμέριση $P = \{0\} \cup Q$ του $[0, 1]$. Τότε,

$$U(f, P) - L(f, P) = b(M_0 - m_0) + U(f, Q) - L(f, Q) < b(M_0 - m_0) + \frac{\varepsilon}{2},$$

όπου

$$M_0 = \sup\{f(x) : 0 \leq x \leq b\} \leq A \quad \text{και} \quad m_0 = \inf\{f(x) : 0 \leq x \leq b\} \geq -A.$$

Από τις τελευταίες ανισότητες παίρνουμε $M_0 - m_0 \leq 2A$, άρα

$$U(f, P) - L(f, P) < 2Ab + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Από το κριτήριο του Riemann, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$.

(β) Δείχνουμε πρώτα ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$. Παρατηρήστε ότι η f είναι φραγμένη στο $[0, 1]$ και, για κάθε $0 < b < 1$, η $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ είναι συνεχής στο $[b, 1]$, άρα ολοκληρώσιμη στο $[b, 1]$. Από το (α) η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$.

Ομοίως δείχνουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[-1, 0]$. Έρα, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[-1, 1]$.

Άσκηση 7. Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ και $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ είναι διαμέριση του $[a, b]$, αποδείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq \int_a^b |f'(x)| dx.$$

Υπόδειξη: Για κάθε $k = 0, \dots, n-1$, η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[x_k, x_{k+1}]$. Από το δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού (για τη συνεχή συνάρτηση f') έχουμε

$$|f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f'(x) dx \right| \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f'(x)| dx.$$

Έρα,

$$\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f'(x)| dx = \int_a^b |f'(x)| dx.$$

$\square$

Άσκηση 8. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$. Υποθέτουμε ότι η f έχει συνεχή παράγωγο και ότι $0 < f'(x) \leq 1$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Αποδείξτε ότι

$$\int_0^1 [f(x)]^3 dx \leq \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2.$$

Υπόδειξη: Θεωρούμε τη συνάρτηση $G : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$G(t) = \left(\int_0^t f(x) dx \right)^2 - \int_0^t [f(x)]^3 dx.$$

Θα δείξουμε ότι $G'(t) \geq 0$ για κάθε $t \in [0, 1]$. Τότε θα έχουμε ότι η G είναι αύξουσα, άρα $G(1) \geq G(0) = 0$ και έπεται το ζητούμενο. Παραγωγίζοντας την G βλέπουμε ότι

$$G'(t) = 2f(t) \int_0^t f(x) dx - (f(t))^3 = f(t) \left(2 \int_0^t f(x) dx - (f(t))^2 \right).$$

Αφού $f(0) = 0$ και $f' > 0$, το οποίο σημαίνει ότι η f είναι αύξουσα, έχουμε ότι $f(t) \geq f(0) = 0$ για κάθε $t \in [0, 1]$. Για την $G' \geq 0$ αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $H \geq 0$, όπου $H : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση

$$H(t) = 2 \int_0^t f(x) dx - (f(t))^2.$$

Παρατηρούμε ότι $H(0) = 0$ (χρησιμοποιώντας και πάλι την υπόθεση ότι $f(0) = 0$) και

$$H'(t) = 2f(t) - 2f(t)f'(t) = 2f(t)(1 - f'(t)) \geq 0$$

για κάθε $t \in [0, 1]$, διότι $f(t) \geq 0$ (όπως είδαμε) και $1 - f'(t) \geq 0$ από την υπόθεση. Αφού $H(0) = 0$ και η H είναι αύξουσα, συμπεραίνουμε ότι $H(t) \geq 0$ για κάθε $t \in [0, 1]$. $\square$

Άσκηση 9. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n^2}} \right).$$

Υπόδειξη: Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n^2}} &= \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{1}{n})^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{n}{n})^2}} \right) \frac{1}{n} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{i}{n})^2}} \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

το οποίο είναι άθροισμα Riemann της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ που αντιστοιχεί στη διαμέριση του $[0, 1]$ σε n υποδιαστήματα μήκους $1/n$ και με ενδιάμεσα σημεία τα δεξιά τους άκρα $\xi_i = 1 + i/n$. Η f είναι συνεχής, άρα ολοκληρώσιμη, και καθώς $n \rightarrow +\infty$ η λεπτότητα των διαμερίσεων αυτών θα τείνει στο 0. Επομένως, θα έχουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n^2}} \right) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln(\sqrt{2} + 1).$$

$\square$