

1. Πολυώνυμα Taylor

Πρόταση 1. Έστω $n \geq 0$ ακέραιος και έστω $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ πολυώνυμο βαθμού n . Τότε για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το $p(x)$ γράφεται στη μορφή

$$p(x) = p(a) + \frac{p'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Απόδειξη. Με επαγωγή στο n . Για $n = 0$ ισχύει αφού τότε $p(x) = c = p(a)$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$. Έστω ότι για κάποιο $n \geq 0$ η πρόταση ισχύει για όλα τα πολυώνυμα βαθμού n και όλα τα $a \in \mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι αυτό συνεπάγεται ότι η πρόταση ισχύει για όλα τα πολυώνυμα βαθμού $n+1$ και όλα τα $a \in \mathbb{R}$. Πράγματι, έστω $p(x)$ ένα πολυώνυμο βαθμού $n+1$ και έστω $a \in \mathbb{R}$. Αν $q(x) = p'(x)$, τότε το $q(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού n . Άρα από την επαγωγική μας υπόθεση έχουμε

$$\begin{aligned} p'(x) = q(x) &= q(a) + \frac{q(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{q^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= p'(a) + \frac{p''(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{p^{(n+1)}(a)}{n!}(x-a)^n \end{aligned} \quad (1)$$

Έστω

$$Q(x) = p(a) + \frac{p'(a)}{1!}(x-a) + \frac{p''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{p^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad (2)$$

Τότε

$$Q'(x) \stackrel{(2)}{=} p'(a) + \frac{p''(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{p^{(n+1)}(a)}{n!}(x-a)^n \stackrel{(1)}{=} p'(x)$$

και άρα από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, οι συναρτήσεις $p(x)$ και $Q(x)$ διαφέρουν κατά σταθερά. Όμως από την (2) έχουμε $Q(a) = p(a)$. Συνεώς,

$$p(x) = Q(x) = p(a) + \frac{p'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{p^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

και η απόδειξη του επαγωγικού βήματος ολοκληρώθηκε. $\square$

Ορισμός 1. Έστω $n \geq 0$ ακέραιος, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ n -φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση και $a \in I$.

(α) Το πολυώνυμο

$$T_{n,f,a}(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

καλείται πολυώνυμο Taylor τάξης n της f με κέντρο το a .

(β) Η διαφορά

$$R_{n,f,a}(x) = f(x) - T_{n,f,a}(x)$$

καλείται υπόλοιπο Taylor τάξης n της f με κέντρο το a .

- Για $n = 0$ έχουμε

$$T_{0,f,a}(x) = f(a) \quad \text{και} \quad R_{0,f,a}(x) = f(x) - f(a) \quad (3)$$

- Για $n = 1$ έχουμε

$$T_{1,f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x - a) \quad \text{και} \quad R_{1,f,a}(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) \quad (4)$$

- Για $n = 2$ έχουμε

$$\begin{aligned} T_{2,f,a}(x) &= f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 \quad \text{και} \\ R_{2,f,a}(x) &= f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) - \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 \end{aligned} \quad (5)$$

Παρατήρηση 2. Από την Πρόταση 1 και τον Ορισμό 1 έχουμε ότι αν μια συνάρτηση $f(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού n τότε για κάθε $a \in \mathbb{R}$ $f(x) = T_{n,f,a}(x) = T_{n+1,f,a}(x) = T_{n+2,f,a}(x) = \dots$

Παράδειγμα 3. Είναι εύκολο να δούμε ότι τα πολυώνυμα Taylor της συνάρτησης $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, με κέντρο το $a = 0$ δίνονται από τον εξής τύπο

$$T_{n,e^x,0} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

Παράδειγμα 4. Ομοίως τα πολυώνυμα Taylor της συνάρτησης

$$f(x) = \ln(1+x), \quad x \in (-1, +\infty)$$

με κέντρο το $a = 0$ δίνονται από τον εξής τύπο

$$T_{n,\ln(1+x),0} = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

2. Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy

Θεώρημα 5. (Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy) Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με τις παρακάτω ιδιότητες:

- (α) οι f, g είναι συνεχείς στο $[a, b]$.
- (β) οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο (a, b) και
- (γ) $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$.

Τότε για κάθε $x \in (a, b]$,

$$g(x) - g(a) \neq 0 \quad (6)$$

και υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad (7)$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$F(x) = (g(b) - g(a))f(x) - (f(b) - f(a))g(x)$$

Η F είναι συνεχής στο $[a, b]$, παραγωγίσιμη στο (a, b) και μπορούμε να διαπιστώσουμε εύκολα ότι $F(a) = F(b)$. Από το Θεώρημα Rolle έπεται ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$F'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi) - (f(b) - f(a))g'(\xi) = 0$$

και άρα

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Το ότι $g(b) - g(a) \neq 0$ και γενικότερα $g(x) - g(a) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b]$ προκύπτει πάλι από το Θεώρημα Rolle. Πράγματι αν $g(x) - g(a) = 0$ για κάποιο $x \in (a, b]$ τότε $g(x) = g(a)$ και άρα θα υπήρχε $\xi \in (a, x)$ με $g'(\xi) = 0$, άτοπο αφού έχουμε υποθέσει ότι $g'(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in (a, b)$. $\square$

Πόρισμα 6. (Κλασικό Θεώρημα Μέσης Τιμής) Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b) . Τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) \quad (8)$$

Απόδειξη. Θέτουμε $g(x) = x - a$ και εφαρμόζουμε το Θεώρημα 5. $\square$

3. Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy Ανώτερης Τάξης

Θεώρημα 7. (Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy n -τάξης) Έστω $n \geq 0$ ακέραιος και $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με τις παρακάτω ιδιότητες:

(a_n) οι f, g είναι n -φορές παραγωγίσιμες στο $[a, b]$ και οι συναρτήσεις $f^{(n)}$ και $g^{(n)}$ είναι συνεχείς στο $[a, b]$ στο $[a, b]$ (αν $n = 0$ τότε απλά υποθέτουμε ότι οι $f^{(0)} = f$ και $g^{(0)} = g$ είναι συνεχείς στο $[a, b]$).

(b_n) οι f, g είναι $(n + 1)$ -φορές παραγωγίσιμες στο (a, b) και

(γ_n) $g^{(n+1)}(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$.

Τότε

$$R_{n,g,a}(x) = g(x) - T_{n,g,a}(x) \neq 0 \quad (9)$$

για κάθε $x \in (a, b]$ και υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{R_{n,f,a}(b)}{R_{n,g,a}(b)} = \frac{f(b) - T_{n,f,a}(b)}{g(b) - T_{n,g,a}(b)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{g^{(n+1)}(\xi)} \quad (10)$$

Απόδειξη. Η απόδειξη του Θεωρήματος 7 γίνεται με επαγωγή. Το πρώτο βήμα της επαγωγής είναι το εξής.

Λήμμα 8. Το Γενικευμένο Θεώρημα Μέσης Τιμής 0-τάξης είναι αναδιατύπωση του Θεωρήματος 5 και συνεπώς είναι αληθές.

Απόδειξη του Λήμματος 8. Οι υποθέσεις $(a_0), (b_0)$ και (γ_0) λένε ότι οι f, g είναι συνεχείς στο $[a, b]$, παραγωγίσιμες στο (a, b) με $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$ που είναι οι υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Cauchy (Θεώρημα 5). Επίσης

$$\frac{R_{0,f,a}(b)}{R_{0,g,a}(b)} = \frac{f(b) - T_{0,f,a}(b)}{g(b) - T_{0,g,a}(b)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Άρα η (10) για $n = 0$ γράφεται

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

που είναι ακριβώς το συμπέρασμα του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Cauchy. $\square$

Για την απόδειξη του επαγωγικού βήματος θα χρησιμοποιήσουμε το επόμενο.

Λήμμα 9. Έστω $n \geq 0$ ακέραιος, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ $(n + 1)$ -φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση και $a \in I$.

(a) Η παράγωγος του πολωνύμου Taylor τάξης $n + 1$ της f με κέντρο το a είναι ίση με το πολώνυμο Taylor τάξης n της f' με κέντρο το a , δηλαδή

$$T'_{n+1,f,a}(x) = T_{n,f',a}(x) \quad (11)$$

(β) Η παράγωγος του υπολοίπου *Taylor* τάξης $n+1$ της f με κέντρο το a είναι ίσο με το υπόλοιπο *Taylor* τάξης n της f' με κέντρο το a , δηλαδή

$$R'_{n+1,f,a}(x) = R_{n,f',a}(x) \quad (12)$$

Απόδειξη του Λήμματος 9. (α) Έχουμε

$$\begin{aligned} T'_{n+1,f,a}(x) &= \left(f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \right)' \\ &= \frac{f'(a)}{1!} + \frac{f''(a)}{2!}2(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(n+1)(x-a)^n \\ &= f'(a) + \frac{f''(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n+1)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= T_{n,f',a}(x) \end{aligned}$$

$$(β) R'_{n+1,f,a}(x) = f'(x) - T'_{n+1,f,a}(x) = f'(x) - T'_{n,f',a}(x) = R_{n,f',a}(x) \quad \square$$

Στο επόμενο λήμμα το Θεώρημα Μέσης Τιμής του *Cauchy* n -τάξης θα αναφέρεται σε συντομία ως *MVTC*(n).

Λήμμα 10. Για κάθε $n \geq 0$ ισχύει η συνεπαγωγή

$$MVTC(n) \Rightarrow MVTC(n+1)$$

Απόδειξη του Λήμματος 10. Πράγματι, έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε ικανοποιούν τις συνθήκες $(a_{n+1}), (b_{n+1})$ και (γ_{n+1}) του Θεωρήματος 7 (για “ $n = n+1$ ”). Θα δείξουμε ότι

$$R_{n+1,g,a}(x) \neq 0 \quad (13)$$

για κάθε $x \in (a, b]$ και ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{R_{n+1,f,a}(b)}{R_{n+1,g,a}(b)} = \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{g^{(n+2)}(\xi)} \quad (14)$$

Απόδειξη της (13): Επειδή $f^{(n+1)} = (f')^{(n)}$ και $g^{(n+1)} = (g')^{(n)}$, οι συναρτήσεις f' και g' ικανοποιούν τις συνθήκες $(a_n), (b_n)$ και (γ_n) του Θεωρήματος 7. Άρα, αφού υποθέσαμε ότι το Θεώρημα Μέσης Τιμής του *Cauchy* n -τάξης ισχύει, θα πρέπει

$$R_{n,g',a}(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in (a, b] \quad (15)$$

Από το Λήμμα 9, έχουμε $R_{n,g',a}(x) = R'_{n+1,g,a}(x)$ και άρα η (15) γράφεται

$$R'_{n+1,g,a}(x) \neq 0 \quad (16)$$

για κάθε $x \in (a, b)$. Αυτό, από το Θεώρημα *Rolle*, σημαίνει ότι για κάθε $x \in (a, b]$,

$$R_{n+1,g,a}(x) \neq R_{n+1,g,a}(a)$$

και επειδή $R_{n+1,g,a}(a) = g(a) - T_{n+1,g,a}(a) = g(a) - g(a) = 0$, εχουμε ότι η (13) ισχύει.

Απόδειξη της (14):

$$\begin{aligned}
\frac{R_{n+1,f,a}(b)}{R_{n+1,g,a}(b)} &= \frac{R'_{n+1,f,a}(\xi')}{R'_{n+1,g,a}(\xi')} \quad \text{για κάποιο } \xi' \in (a, b), \text{ από } MVTC(0) \\
&= \frac{R_{n,f',a}(\xi')}{R_{n,g',a}(\xi')} \quad \text{Λήμμα 9} \\
&= \frac{(f')^{(n+1)}(\xi)}{(g')^{(n+1)}(\xi)} \quad \text{για κάποιο } \xi \in (a, \xi'), \text{ από } MVTC(n) \\
&= \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{g^{(n+2)}(\xi)}
\end{aligned} \tag{17}$$

Η απόδειξη του Λήμματος 10 έχει ολοκληρωθεί. $\square$

Το Θεώρημα 5 προκύπτει άμεσα με επαγωγή από το Λήμμα 8 και το Λήμμα 10. $\square$

Πόρισμα 11. (Τύπος Taylor) Έστω $n \geq 0$ ακέραιος και $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με την $f^{(n)}$ συνεχή στο $[a, b]$ και $(n+1)$ -φορές παραγωγίσιμη στο (a, b) . Τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$f(b) - T_{n,f,a}(b) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1} \tag{18}$$

Απόδειξη. Έστω

$$g(x) = (x-a)^{n+1}$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι $T_{n,g,a}(x) = 0$ και άρα

$$R_{n,g,a}(b) = g(b) - T_{n,g,a}(b) = g(b) = (b-a)^{n+1} \tag{19}$$

Επίσης

$$g^{(n+1)}(x) = (n+1)! \tag{20}$$

για όλα τα $x \in [a, b]$. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 7 για την f και την g και αντικαθιστώντας τα παραπάνω στην (10) παίρνουμε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{f(b) - T_{n,f,a}(b)}{(b-a)^{n+1}} = \frac{R_{n,f,a}(b)}{R_{n,g,a}(b)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{g^{(n+1)}(\xi)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

και το συμπέρασμα έπεται. $\square$