

ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
9ο Φυλλάδιο Ασκήσεων (υποδείξεις)

Ασκηση 1. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{3}x + 2.$$

Αποδείξτε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και στη συνέχεια υπολογίστε την $(f^{-1})'(2)$.

Υπόδειξη: Αφού $f'(x) = x^2 + 5/3 > 0$, η f είναι γνησίως αύξουσα και άρα 1-1. Επίσης,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

και συνεπώς σύμφωνα με το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών η f είναι επί του $\mathbb{R}$. Ορίζεται επομένως η

$$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

και σύμφωνα με το θεώρημα για την παράγωγο αντίστροφης συνάρτησης θα έχουμε

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(f^{-1}(2))}.$$

Όμως

$$f^{-1}(2) = x \iff x = 0.$$

Επομένως,

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(0)} = 3/5.$$

□

Ασκηση 2. Χρησιμοποιώντας γραμμικοποίηση να υπολογίσετε μια προσεγγιστική τιμή για τους αριθμούς $(1,0002)^{50}$ και $\sqrt[3]{1,009}$.

Υπόδειξη: (α) Η γραμμικοποίηση της $f(x) = (1+x)^{50}$, γύρω από το $x_0 = 0$ είναι

$$L(x) = 1 + 50x.$$

Επομένως

$$(1,0002)^{50} = f(0,0002) \approx L(0,0002) = 1,01.$$

(β) Αντίστοιχα η γραμμικοποίηση της $f(x) = (1+x)^{1/3}$, γύρω από το $x_0 = 0$ είναι

$$L(x) = 1 + \frac{1}{3}x.$$

Επομένως

$$\sqrt[3]{1,009} = f(0,009) \approx L(0,009) = 1,003.$$

□

Άσκηση 3. Να δείξετε ότι $\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} = 2 \arctan x$, για κάθε $x \geq 0$.

Υπόδειξη: Η συνάρτηση $\arccos$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$ και συνεπώς η συνάρτηση

$$f(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \neq 0$. Έχουμε λοιπόν για κάθε $x > 0$

$$\begin{aligned} \left(\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} \right)' &= \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)^2}} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)' \\ &= \frac{2}{1+x^2} \\ &= (2 \arctan x)'. \end{aligned}$$

Συνεπώς υπάρχει σταθερά c , τέτοια ώστε για κάθε $x > 0$ να έχουμε ότι

$$\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} = 2 \arctan x + c.$$

Θέτοντας $x = 1$ στην παραπάνω σχέση βρίσκουμε ότι $c = 0$. Τέλος η ισότητα προφανώς ισχύει και για $x = 0$ και συνεπώς

$$\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} = 2 \arctan x, \text{ για κάθε } x \geq 0.$$

□

Άσκηση 4. Λέμε ότι η συνάρτηση $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι τοπικά σταθερή αν για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ υπάρχει $\delta > 0$, που πιθανώς εξαρτάται από το x , τέτοιο ώστε η f να είναι σταθερή στο $(x - \delta, x + \delta)$. Αποδείξτε ότι αν η f είναι τοπικά σταθερή, τότε είναι σταθερή.

Υπόδειξη: Έστω $x \in (\alpha, \beta)$. Τότε, αφού η f είναι τοπικά σταθερή, για h αρκετά μικρό θα έχουμε ότι

$$f(x+h) = f(x)$$

και συνεπώς

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0.$$

Αφού $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, η f είναι σταθερή.

□

Άσκηση 5. (α) Έστω $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα: $|f'(x)| \leq \frac{1}{x}$ για κάθε $x > 1$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x + \sqrt{x}) - f(x)] = 0$.

(β) Έστω $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η f' είναι φραγμένη. Αποδείξτε ότι: για κάθε $\alpha > 1$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha} = 0.$$

Υπόδειξη: (α) Έστω $x > 1$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής στο διάστημα $[x, x + \sqrt{x}]$: υπάρχει $y_x \in (x, x + \sqrt{x})$ ώστε

$$f(x + \sqrt{x}) - f(x) = f'(y_x) \sqrt{x}.$$

Όμως $y_x > x > 1$, άρα $|f'(y_x)| \leq \frac{1}{y_x} < \frac{1}{x}$. Δηλαδή,

$$|f(x + \sqrt{x}) - f(x)| < \frac{1}{x} \cdot \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Έπεται ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x + \sqrt{x}) - f(x)) = 0$.

(β) Υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f'(y)| \leq M$ για κάθε $y > 0$. Έστω $x > 1$. Από το θεώρημα μέσης τιμής, υπάρχει $y_x \in (1, x)$ ώστε

$$|f(x) - f(1)| = |f'(y_x)(x - 1)| \leq M(x - 1).$$

Τότε, για κάθε $x > 1$,

$$\frac{|f(x)|}{x^\alpha} \leq \frac{|f(x) - f(1)|}{x^\alpha} + \frac{|f(1)|}{x^\alpha} \leq M \frac{x - 1}{x^\alpha} + \frac{|f(1)|}{x^\alpha}.$$

Αν $\alpha > 1$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|f(1)|}{x^\alpha} = 0.$$

Συνεπώς, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha} = 0$ (εξηγήστε γιατί). □

Ασκηση 6. (α) Αποδείξτε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1.$$

(β) Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) = x.$$

(γ) Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n = e^x.$$

Υπόδειξη: (α) Από την $e^{x-1} \geq x$ έπεται ότι

$$x - 1 = \ln(e^{x-1}) \geq \ln x.$$

Εφαρμόζοντας αυτή την ανισότητα για τον $\frac{1}{x} > 0$, παίρνουμε

$$-\ln x = \ln \left(\frac{1}{x} \right) \leq \frac{1}{x} - 1,$$

δηλαδή

$$1 - \frac{1}{x} \leq \ln x.$$

(β) Εφαρμόζοντας την ανισότητα του (α) για τον θετικό αριθμό $1 + \frac{x}{n}$ παίρνουμε

$$\frac{x/n}{1 + (x/n)} \leq \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) \leq \frac{x}{n}.$$

Συνεπώς,

$$\frac{x}{1 + \frac{x}{n}} \leq n \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) \leq x.$$

Το κριτήριο των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών δείχνει ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) = x.$$

(γ) Από το (β) έχουμε

$$\ln \left(\left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \right) \rightarrow x$$

όταν το $n \rightarrow \infty$. Η $y \mapsto e^y$ είναι συνεχής συνάρτηση, οπότε η αρχή της μεταφοράς δείχνει ότι

$$\left(1 + \frac{x}{n} \right)^n = e^{\ln \left(\left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \right)} \rightarrow e^x$$

όταν το $n \rightarrow \infty$. □

Άσκηση 7. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f(0) = f'(0) = 0$ και $f''(x) + f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. [Υπόδειξη: Θεωρήστε την $g = f^2 + (f')^2$.]

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ και $f''(x) + f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $f(x) = \cos x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη: (α) Θεωρήστε την $g = f^2 + (f')^2$. Τότε,

$$g' = 2ff' + 2f'f'' = 2f'(f + f'') = 0,$$

δηλαδή η g είναι σταθερή. Αφού $g(0) = [f(0)]^2 + [f'(0)]^2 = 0$, συμπεραίνουμε ότι

$$g(x) = [f(x)]^2 + [f'(x)]^2 = 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως, $f(x) = f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) - \cos x$ ικανοποιεί τις $g(0) = 0$, $g'(0) = 0$ και $g''(x) + g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Από το (α) έπεται ότι $f(x) - \cos x = g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. □

Άσκηση 8. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(0) = 0$. Υποθέτουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ και $0 \leq f'(x) \leq 2f(x)$ για κάθε $x \in (0, 1)$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή και ίση με 0 στο $[0, 1]$.

Υπόδειξη: Θεωρήστε τη συνάρτηση $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = e^{-2x}f(x)$. Αφού $g'(x) = e^{-2x}(f'(x) - 2f(x)) \leq 0$, η g είναι φθίνουσα. Όμως, $g(0) = 0$ και $g \geq 0$ (διότι $f(0) = 0$ και $f \geq 0$ από τις υποθέσεις). Αναγκαστικά, $g \equiv 0$ και έπεται ότι $f \equiv 0$ στο $[0, 1]$. □