ΘΕΜΑ 1

(Α) Να βρεθούν οι τιμές της πραγματικής παραμέτρου k για τις οποίες η εξίσωση $x^2+y^2+z^2-6y+3k^2+k=-25-8x+4z$ παριστάνει σφαίρα της οποίας να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα. **(0.8 μον.)**

(Β) Για την περίπτωση όπου k=0, θεωρούμε το σημείο Μ(-6,3,2). Να βρείτε επίπεδο **(Π)** που να διέρχεται από το Μ και να εφάπτεται στην (αντίστοιχη) σφαίρα του ερωτήματος **(Α)**. Να κάνετε την γραφική παράσταση του επιπέδου αυτού και στη συνέχεια να υπολογίσετε την απόστασή του από το σημείο N($\sqrt{3}$,1,-5). **(1.3 μον.)**

(Γ) Έστω a,b,c γνωστά διανύσματα και η εξίσωση: $w+c+(w\times a)=b$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει το πολύ μία λύση (πλήρης αιτιολόγηση). **(1.2 μον.)**

ΘΕΜΑ 2

(Α) Να επιλύσετε το γραμμικό σύστημα (Σ): $\begin{cases}(a+1)x+y+z=a+1\\ x+(a+1)y+z=a+3\\ x+y+(a+1)z=-2a-4\end{cases}$ για τις διάφορες τιμές της πραγματικής παραμέτρου α. **(1.5 μον.)**

(Β) Βρείτε μία βάση και τη διάσταση για τον καθένα από τους υποχώρους $U=[(1,2,1,0,1),(2,3,1,2,3),(1,0,-1,4,3)]$ και $W=[(1,2,3,4,5),(1,3,2,-2,0),(1,5,0,-14,-10)]$ του $\mathbb{R}^5$. Έπειτα, βρείτε μία βάση και τη διάσταση για τον καθένα από τους διανυσματικούς χώρους $U+W$ και $U\cap W$. **(1.7 μον.)**

ΘΕΜΑ 3

(Α) Βρείτε τον αντίστροφο του πίνακα $A=\begin{bmatrix}1&0&1&3\\2&1&2&2\\3&-1&0&1\\0&2&1&0\end{bmatrix}$. **(μον. 1.0)**

(Β) Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα $A(a)=\begin{bmatrix}-1&-9&-9\\9&a+15&a+7\\-9&-a-7&-a+1\end{bmatrix}$ για τις διάφορες τιμές της πραγματικής παραμέτρου a. Για ποια τιμή της a διαγωνοποιείται ο $A(a)$; **(μον. 2.5)**

Ε Θ Ν Ι Κ Ο   Μ Ε Τ Σ Ο Β Ι Ο   Π Ο Λ Υ Τ Ε Χ Ν Ε Ι Ο

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α2 (ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ & ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ)

16 Ιανουαρίου 2023

ΘΕΜΑ 1

(Α) Δίδονται οι ευθείες (ε_1): $x-1=\frac{y-9}{-2}=z-5$, (ε_2): $\frac{x-6}{7}=\frac{y+7}{-6}=z$. Να αποδείξετε ότι οι $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ είναι ασύμβατες και να βρείτε τα άκρα του κοινού κάθετου ευθύγραμμου τμήματός τους. ***(μον. 2.0)***

(Β) Θεωρούμε τη σφαίρα με κέντρο το Κ(1,-1,1) και ακτίνα 2. Βρείτε το εφαπτόμενο επίπεδό της σφαίρας στο σημείο της Α(α, 0, 0), α<0. ***(μον. 1.2)***

ΘΕΜΑ 2

(Α) Να αποδείξετε ότι τα σύνολα $U=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4\colon\ 2x-y+3z+w=0,\ 2z+w=0\}$ και $W=[(2,6,2,-4),(1,-3,1,7),(1,1,1,1)]$ είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^4$ και να βρείτε από μία βάση τους. Έπειτα, να περιγράψετε τα στοιχεία του υποχώρου $U\cap W$ και να βρείτε μία βάση του. ***(μον. 1.6)***

(Β) Έστω A ένας $\nu\times\nu$ πίνακας τέτοιος ώστε $A^3+A^2+A+I=\mathbf{O}$. Να βρείτε τις τιμές που μπορεί να λάβει η ορίζουσα του A. ***(μον. 0.8)***

(Γ) Βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$, αντιστρέφεται ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} -2-\alpha & 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1-\alpha & 0 & 1 \\ -5 & -1 & 1-\alpha & -4 \\ 8 & 0 & 0 & 8-\alpha \end{bmatrix}.$$

(μον. 1.0)

ΘΕΜΑ 3

(Α) Έστω τρεις $\nu\times\nu$ πίνακες A, B και C τέτοιοι ώστε $A^2=A$, $B^2=B$, $C^2=C$ και $A+B+C=I$. Να αποδείξετε $AB=BC=CA=\mathbf{O}$. ***(μον. 1.2)***

(Β) Έστω ο πίνακας $A=\begin{bmatrix} a & 2 & b \\ c & 2 & d \\ e & 2 & f \end{bmatrix}$ με ιδιοδιανύσματα $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Βρείτε τον πίνακα A και τις ιδιοτιμές του A που αντιστοιχούν στα παραπάνω τρία ιδιοδιανύσματα. ***(μον. 2.2)***

Ε Θ Ν Ι Κ Ο   Μ Ε Τ Σ Ο Β Ι Ο   Π Ο Λ Υ Τ Ε Χ Ν Ε Ι Ο

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α2 (ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ & ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ)

1η ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2022

ΘΕΜΑ 1

(Α) Δίδονται οι ευθείες: $(\varepsilon_1): x-6=\frac{-7-y}{-6}=z$, $(\varepsilon_2): x-1=\frac{9-y}{2}=z-5$. Να εξετάσετε αν οι παραπάνω ευθείες είναι συνεπίπεδες. **(0.6 μον.)**

(Β) Βρείτε το συμμετρικό σημείο του $M(1,1,1)$ ως προς το επίπεδο (Π): $2x-y+3z=1$. **(1.0 μον.)**

(Γ) Θεωρούμε τις σφαίρες $(S_1): x^2+y^2+z^2-2z=0$, $(S_2): x^2+y^2-2y+z^2=k^2-1$. Βρείτε τις τιμές του k για τις οποίες οι παραπάνω σφαίρες εφάπτονται εξωτερικά. **(0.7 μον.)**

(Δ) Βρείτε τις τιμές του k για τις οποίες το επίπεδο (Π) του ερωτήματος (Β) και η σφαίρα (S_2) του ερωτήματος (Γ) έχουν κοινά σημεία. **(1.0 μον.)**

ΘΕΜΑ 2

(Α) Να επιλύσετε το γραμμικό σύστημα (Σ): $\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+ay+3z=2 \\ 2x+3y+az=3 \end{cases}$ για τις διάφορες τιμές της πραγματικής παραμέτρου α. **(1.5 μον.)**

(Β) Να αποδείξετε ότι τα σύνολα $U=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4: y=2x-z \text{ και } z=w\}$ και $W=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4: x=z=w\}$ είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^4$. Έπειτα, βρείτε μία βάση και τη διάσταση για τον καθένα από τους διανυσματικούς χώρους U, W, $U\cap W$, $U+W$. **(1.7 μον.)**

ΘΕΜΑ 3

(Α) Αν ένας πίνακας A έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-4)^2$ κι ελάχιστο πολυώνυμο $m_A(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-4)$, τι συμπεραίνετε για τον πίνακα $B=A^{-1}+3I$; **(μον. 1.0)**

(Β) Βρείτε την τιμή του $a\in\mathbb{R}$ για την οποία ο πίνακας $A(\alpha)=\begin{bmatrix} \alpha-9 & 35-\alpha & \alpha+19 \\ -9 & 26 & 9 \\ 8-a & \alpha-17 & -\alpha-2 \end{bmatrix}$ είναι διαγωνοποιήσιμος (με μετασχηματισμό ομοιότητας). Έπειτα, για την τιμή του a που θα βρείτε, κατασκευάστε έναν πίνακα X τέτοιον ώστε $X^3=A(a)$. **(μον. 2.5)**

Ε Θ Ν Ι Κ Ο   Μ Ε Τ Σ Ο Β Ι Ο   Π Ο Λ Υ Τ Ε Χ Ν Ε Ι Ο

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α2 (ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ & ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ)

24 Ιανουαρίου 2022

ΘΕΜΑ 1

(Α) Να κατασκευάσετε την προβολή της ευθείας (ε): $\frac{x-5}{2}=\frac{y+4}{3}=\frac{z-1}{4}$ πάνω στο επίπεδο (Π): $x+2y-2z+14=0$. Έπειτα, να υπολογίσετε τη συμμετρική ευθεία της (ε) ως προς το επίπεδο (Π). ***(μον. 1.6)***

(Β) Να αποδείξετε ότι το επίπεδο (Π): $3x+4z-25=0$ τέμνει τη σφαίρα (S): $x^2+y^2+z^2-2y=99$ και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα της τομής (S)∩(Π). Έπειτα, να βρείτε ένα επίπεδο (Π΄) που εφάπτεται στη σφαίρα (S) και είναι παράλληλο προς το επίπεδο (Π). ***(μον. 1.6)***

ΘΕΜΑ 2

(Α) Να αποδείξετε ότι τα σύνολα $U=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4\colon\ y-2x-z=0,\ 2z+w=0\}$ και $W=[(1,1,1,1),(1,5,1,-5),(2,4,2,-1)]$ είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^4$ και να βρείτε από μία βάση τους. Έπειτα, να βρείτε από μία βάση των υποχώρων $U\cap W$ και $U+W$. ***(μον. 1.8)***

(Β) Βρείτε τον πίνακα A που έχει συμπληρωματικό τον $adj(A)=\begin{bmatrix}3&-2&1\\8&-2&-4\\-1&4&3\end{bmatrix}$. ***(μον. 1.5)***

ΘΕΜΑ 3

(Α) Βρείτε τις ιδιοτιμές ενός 3×3 αντιστρέψιμου πίνακα A, αν γνωρίζετε ότι μία από αυτές ισούται με 1 , $trace(A)=6$ και $trace(A^2)=14$. Στη συνέχεια, βρείτε τις ιδιοτιμές των πινάκων $A^{-1}+5I$, $adj(A)$ και $A^3-3A^2+2A-3I$. ***(μον. 1.0)***

(Β) Βρείτε την τιμή της παραμέτρου $a\in\mathbb{R}$ για την οποία ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}3-a&14&a-2\\0&8&0\\-a+2&-14&a-1\end{bmatrix}$ είναι διαγωνοποιήσιμος (με μετασχηματισμό ομοιότητας). Έπειτα, για την τιμή του a που θα βρείτε, κατασκευάστε έναν πίνακα X τέτοιον ώστε $X^3=A(a)$. ***(μον. 2.5)***

Επαναληπτική εξέταση του μαθήματος

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α2 (ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ & ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ)

της ΣΧΟΛΗΣ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

28 - 09 – 2020

Ονοματεπώνυμο: . . . .

ΘΕΜΑ Α. (2.0 μον.) Να λύσετε το γραμμικό σύστημα $\begin{cases} ax+(1-a)y+(1-a)z=a^2 \\ ax+(1+a)y+(1+a)z=a-a^2 \\ x \quad +y \quad +z \ =1-a \end{cases}$ για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ Β. (2.2 μον.) Έστω οι πίνακες $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -\alpha \\ 1 & 3 & -\alpha-\frac{\beta}{2} \\ 1 & 4 & \gamma \end{bmatrix}$ και $B=\begin{bmatrix} 1 & 3 & \beta \\ 1 & 4 & \beta-\alpha \\ 1 & 5 & -\gamma \end{bmatrix}$, $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι το σύνολο $S=\left\{(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3 : \ \det(A)\text{=}\det(B)=0\right\}$ είναι διανυσματικός χώρος και να κατασκευάσετε μια βάση του.

ΘΕΜΑ Γ. (2.0 μον.) Δίνονται το επίπεδο $(\Pi): x+y+z=1$ και η ευθεία $(\varepsilon): \frac{-x}{2}=\frac{y-1}{2}=z+1$.
Να βρείτε το σημείο τομής τους (αν υπάρχει). Έπειτα να βρείτε την εξίσωση του επιπέδου (Π') που περιέχει την (ε) και είναι κάθετο στο (Π).

ΘΕΜΑ Δ. (1.5 μον.) Αν ο βαθμός ενός $\nu\times\nu$ πίνακα A είναι $\beta\alpha\theta\mu(A)\le \nu-2$, τι συμπεραίνετε για τον πίνακα $adj(A)$;

ΘΕΜΑ Ε. (2.3 μον.) Να υπολογίσετε αντιστρέψιμο πίνακα P που διαγωνοποιεί τον πίνακα $A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -12 & 7 & 12 \\ 6 & -4 & -7 \end{bmatrix}$. Έπειτα, να αποδείξετε ότι ο A ικανοποιεί τη σχέση $A^{2021}+A^{2020}-A=I$.

Ε Θ Ν Ι Κ Ο   Μ Ε Τ Σ Ο Β Ι Ο   Π Ο Λ Υ Τ Ε Χ Ν Ε Ι Ο

Επαναληπτική εξέταση του μαθήματος

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α2 (ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ & ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ)

της ΣΧΟΛΗΣ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

28 - 09 – 2020

Ονοματεπώνυμο: . . . .

<u>ΘΕΜΑ Α.</u> (2.2 μον.) Έστω το γραμμικό σύστημα: $(\Sigma)\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-1 \\ x_1+3x_2+4x_3+5x_4=0 \\ x_1-x_2-x_3-2x_4=2 \\ x_1+5x_2+(a+7)x_3+(a+9)x_4=-3 \\ 3x_1+3x_2+4x_3+(a^2+3)x_4=a^2 \end{cases}$. Να βρείτε για ποιες τιμές της παραμέτρου $a\in\mathbb{R}$ το σύστημα έχει άπειρες λύσεις και για ποιες τιμές της $a\in\mathbb{R}$ είναι αδύνατο. Για τις τιμές της παραμέτρου $a\in\mathbb{R}$ για τις οποίες το (Σ) είναι έχει άπειρες λύσεις, να λύσετε το σύστημα.

<u>ΘΕΜΑ Β.</u> (2.3 μον.) Έστω ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&0\\2&1&1\end{bmatrix}$.

(α) Να υπολογίσετε αντιστρέψιμο πίνακα P που διαγωνοποιεί τον πίνακα A (αν υπάρχει).

(β) Να αποδείξετε ότι $A^4-10A^2+9I=\mathrm{O}$.

ΘΕΜΑ Γ. (2.0 μον.) Δίνονται οι υπόχωροι του $\mathbb{R}^4$:

$$V_1=\left[(2,3,1,1),(-1,2,3,-1),(0,7,7,-1)\right] \quad \text{και} \quad V_2=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 : x_1-x_2+x_3=0\}.$$

Να βρείτε μία βάση σε καθέναν από τους V_1 και V_2 και να αποδείξετε ότι ο V_1 είναι υπόχωρος του V_2.

ΘΕΜΑ Δ. (2.0 μον.) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2+y^2+z^2-4x+2y-4=0$ είναι εξίσωση σφαίρας, της οποίας να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα. Έπειτα να βρείτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της στο σημείο $\mathrm{M}(0,1,1)$.

ΘΕΜΑ Ε. (1.5 μον.) Έστω ένας αντιστρέψιμος πίνακας A με ιδιοτιμές $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_k$. Να υπολογίσετε τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του $adj(A)$.

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Κανονική εξέταση του μαθήματος

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α2 (ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ & ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ)

της ΣΧΟΛΗΣ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

31 - 01 – 2020

Ονοματεπώνυμο: . . . .

ΘΕΜΑ 1. (1.0+1.0+1.0=3.0 μον.)

(α) Βρείτε την αναλυτική εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}(1,-3,2)$ και είναι κάθετο στα επίπεδα (Π_1): $x-2y+z+1=0$ και (Π_2): $3x+y-z-5=0$.

(β) Βρείτε την αναλυτική εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}(1,-3,2)$ και είναι παράλληλη στα επίπεδα (Π_1): $x-2y+z+1=0$ και (Π_2): $3x+y-z-5=0$.

(γ) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1): $x-5=\dfrac{9-y}{2}=z-1$ και (ε_2): $x=\dfrac{7-y}{6}=\dfrac{z-6}{7}$ είναι ασύμβατες και να βρείτε την αναλυτική εξίσωση της κοινής κάθετης ευθείας.

ΘΕΜΑ 2. (1.0+2.0=3.0 μον.)

(α) Αν ένας $\nu\times\nu$ πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, να αποδείξετε ότι και ο συμπληρωματικός πίνακας $\mathrm{adj}(A)$ είναι αντιστρέψιμος με $|\mathrm{adj}(A)|=|A|^{\nu-1}$ και $\mathrm{adj}(A)^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A$.

(β) Έστω ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}1 & x & y\\ 0 & 1 & z\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ $(x,y,z\in\mathbb{R})$. Να αποδείξετε ότι $(A-I)^3=\mathrm{O}$ και να βρείτε τον πίνακα A^{2020}. *Υπενθύμιση:* $(a+b)^k=a^k+\binom{k}{1}a^{k-1}b+\binom{k}{2}a^{k-2}b^2+\cdots+\binom{k}{k-2}a^2b^{k-2}+\binom{k}{k-1}ab^{k-1}+b^k$.

ΘΕΜΑ 3. (0.9+0.8+0.8=2.5 μον.)

(α) Βρείτε τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν οι αριθμοί $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ ώστε τα επίπεδα (Π_1): $x-y+z=\alpha$, (Π_2): $x+2y+3z=\beta$, (Π_3): $3x+3y+7z=\gamma$ να έχουν μη κενή τομή.

(β) Να αποδείξετε ότι το σύνολο $V=\{(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3:$ τα επίπεδα $(\Pi_1),(\Pi_2),(\Pi_3)$ έχουν μη κενή τομή$\}$ είναι διανυσματικός χώρος και κατασκευάστε μια βάση του.

(γ) Να αποδείξετε ότι ο παραπάνω διανυσματικός χώρος V είναι $V=[(1,1,3),(1,-1,-1)]$.

ΘΕΜΑ 4. (2.5 μον.) Κατασκευάστε έναν 4×4 πίνακα X τέτοιον ώστε $X^3=\begin{bmatrix}1 & -4 & 2 & 2\\ 0 & -3 & 2 & 2\\ 0 & -1 & 1 & 1\\ 0 & -3 & 2 & 2\end{bmatrix}$.