Ε Θ Ν Ι Κ Ο Μ Ε Τ Σ Ο Β Ι Ο Π Ο Λ Υ Τ Ε Χ Ν Ε Ι Ο

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

28 Σεπτεμβρίου 2023

Ονοματεπώνυμο: . . . . / Αρ. Μητρώου: . . . .

ΘΕΜΑ 1 (Α) Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου (Π) που διέρχεται από τα σημεία $(1,2,9)$, $(2,-3,-4)$, $(-2,2,3)$. Στη συνέχεια, βρείτε την προβολή του σημείου $\mathrm{P}(5,7,4)$ στο επίπεδο (Π) και το συμμετρικό σημείο του P ως προς το ίδιο επίπεδο.

(Β) Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου (Π) που περιέχει την ευθεία $(\varepsilon_1): \frac{x+1}{3} = \frac{3-y}{5} = \frac{z+2}{2}$ και είναι παράλληλο στην ευθεία $(\varepsilon_2): \frac{x+8}{2} = \frac{5-y}{3} = \frac{15-z}{3}$. Στη συνέχεια, βρείτε τα άκρα του κοινού κάθετου ευθυγράμμου τμήματος των (ε_1) και (ε_2).

ΘΕΜΑ 2 (Α) Έστω οι γραμμικές θήκες $V = [(3,2,-1,0),(1,1,-3,5),(1,0,-5,2)]$ και $U = [(1,1,2,-1),(2,1,-3,1),(1,a,9,-4)]$. Βρείτε για ποια τιμή της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}$ ισχύει $U \leq V$.

(Β) Έστω μία βάση $\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{z}\}$ του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^4$. Να αποδείξετε ότι το σύνολο $\{\mathbf{u}+7\mathbf{v},\mathbf{v}+7\mathbf{w},\mathbf{w}+7\mathbf{z},\mathbf{z}+7\mathbf{u}\}$ είναι επίσης μία βάση του $\mathbb{R}^4$.

ΘΕΜΑ 3: (Α) Δίνεται ένας αντισυμμετρικός πίνακας $M \in M_n(\mathbb{R})$. Αν για τον πίνακα $A \in M_n(\mathbb{R})$ ισχύει ότι $A = (I_n - M)\cdot(I_n + M)^{-1}$, I_n ο μοναδιαίος πίνακας, να δείξετε ότι ισχύει $A^t = A^{-1}$, όπου A^t ο ανάστροφος του A.

(Β) Για ποιες τιμές των παραμέτρων $a,b,c,d\,e,f \in \mathbb{R}$ ο πίνακας $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & d & 2 & 0 \\ c & e & f & 2 \end{bmatrix}$ είναι διαγωνοποιήσιμος; Για τις τιμές που βρήκατε, να υπολογίσετε μία βάση των ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα M.

ΘΕΜΑ 4: (Α) Να υπολογίσετε την ορίζουσα, όπου $a,b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 3 \\ b & a & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}.$$

(Β) Να λύσετε το γραμμικό σύστημα για τις διάφορες τιμές των $a,b \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{matrix} (a+1)x + y + z = 1 \\ x + (a+1)y + z = b \\ x + y + (1+a)z = b^2 \end{matrix}\right\}.$$

Ε Θ Ν Ι Κ Ο   Μ Ε Τ Σ Ο Β Ι Ο   Π Ο Λ Υ Τ Ε Χ Ν Ε Ι Ο

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

13 Φεβρουαρίου 2023

Ονοματεπώνυμο: . . . . / Αρ. Μητρώου: . . . .

ΘΕΜΑ 1: (Α) Δίνονται δύο μοναδιαία διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ του τρισδιάστατου χώρου που σχηματίζουν γωνία $\pi/6$. Βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{x}$ (με τη βοήθεια των $\vec{u}$ και $\vec{v}$) τέτοιο ώστε $<\vec{v},\vec{x}>\vec{u}+\sqrt{3}\ \vec{v}-\sqrt{3b+3}\ \vec{x}=0$, όπου ως b γράφετε (υποχρεωτικά) το προτελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου σας. Στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{u}+(b+1)\vec{v}$, $\vec{v}+(b+2)\vec{x}$, $\vec{u}+(b+3)\vec{x}$ είναι συνεπίπεδα.

(Β) Δίνονται η ευθεία $(\varepsilon):\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{2-y}{2}=z-a-1$ και το επίπεδο $(\Pi): x+2y+z-18-a=0$, όπου ως a γράφετε (υποχρεωτικά) το τελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου σας. Βρείτε τις αναλυτικές εξισώσεις της προβολής (ε') της ευθείας (ε) πάνω στο επίπεδο (Π). Στη συνέχεια, βρείτε τις αναλυτικές εξισώσεις της συμμετρικής ευθείας (ε'') της (ε) ως προς το (Π).

(Γ) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u}=(a+2,a+3,a+4,a+5)$, $\vec{v}=(a+4,a+5,a+6,a+7)$ και $\vec{w}=(a+b+5,a+b+6,a+b+7,a+b+8)$ του $\mathbb{R}^4$, όπου ως a γράφετε (υποχρεωτικά) το τελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου σας και ως b γράφετε (υποχρεωτικά) το προτελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου σας. Να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{x}=(a+1,a+2,a+3,a+4)$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$. Ελέγξτε αν τα $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα και αν είναι, τότε να γράψετε το $\vec{x}$ ως γραμμικό συνδυασμό δύο διανυσμάτων από τα $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$. Βρείτε την τομή των γραμμικών θηκών $U=[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$ και $W=[(1,1,1,1),(1,2,3,4)]$.

ΘΕΜΑ 2: (Α) Ένας πίνακας A έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A=(\lambda-a-1)^2(\lambda-b-2)^2$ και ελάχιστο πολυώνυμο $m_A=(\lambda-a-1)(\lambda-b-2)$. Αφού αντικαταστήσετε όπου a το τελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου σας και όπου b το προτελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου σας, να δικαιολογήσετε τα συμπεράσματα που μπορείτε να εξάγετε για τον πίνακα $A^{-1}+6\cdot I$.

(Β) Για $\kappa,\mu\in\mathbb{R}$ και $\mu\neq 0$, να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του πίνακα B. Αν διαγωνοποιείται, να κατασκευάσετε μία διαγωνοποίησή του με μετασχηματισμό ομοιότητας.

$$B=\begin{bmatrix}\kappa & \mu & \mu\\ \mu & \kappa & \mu\\ \mu & \mu & \kappa\end{bmatrix}.$$

(Γ) (i) Να υπολογίσετε το βαθμό του πίνακα Γ για τις διάφορες τιμές του $m\in\mathbb{R}$:

$$\Gamma=\begin{bmatrix}m & 0 & 1 & 1\\ 2m & 0 & 1 & 2m+1\\ 1 & 1 & m & m\\ 2m & 0 & 2 & m+2\end{bmatrix}.$$

(ii) Για ποιες τιμές των $\chi,\psi,\zeta,\omega\in\mathbb{R}$ αντιστρέφεται ο πίνακας $\Delta=\begin{bmatrix}\chi & \chi & \chi & \chi\\ \chi & \psi & \psi & \psi\\ \chi & \psi & \zeta & \zeta\\ \chi & \psi & \zeta & \omega\end{bmatrix}$;

Ε Θ Ν Ι Κ Ο Μ Ε Τ Σ Ο Β Ι Ο Π Ο Λ Υ Τ Ε Χ Ν Ε Ι Ο

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

29 Σεπτεμβρίου 2022

Ονοματεπώνυμο: . . . .

ΘΕΜΑ 1: (Α) Βρείτε το επίπεδο που διέρχεται από τα σημεία (10,1,1), (2,1,5) και (7,3,1). Έπειτα, να βρείτε την προβολή του σημείου $A(3,4,5)$ στο επίπεδο και το συμμετρικό σημείο του A ως προς το επίπεδο.

(Β) Να αποδείξετε ότι το επίπεδο $\Pi: x+y+z=1$ τέμνει τη σφαίρα $S: x^2+y^2+z^2+4x-2y-4z+1=0$ και να υπολογίσετε το κέντρο και την ακτίνα της τομής $\Pi \cap S$. Έπειτα, να υπολογίσετε την ορθή προβολή του κύκλου $\Pi \cap S$ επί του επιπέδου xOy.

(Γ) Να αιτιολογήσετε γιατί τα σύνολα $U = [(1,2,1,1,3),(0,-2,1,-1,2),(1,2,3,4,4),(2,2,-1,-5,6)]$ και $W = [(1,2,3,1,1),(-1,0,2,6,-3),(3,2,-1,-11,7)]$ είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^5$ και να κατασκευάσετε από μία βάση τους. Έπειτα, να βρείτε από μία βάση των υποχώρων $U \cap W$ και $U+W$.

ΘΕΜΑ 2: (Α) Έστω ένας τετραγωνικός πίνακας A τέτοιος ώστε $A^2 = A$. Να βρείτε τις ιδιοτιμές του A και του $M = A^3 - 4A^2 + A + 3I$.

(Β) Για ποιες τιμές των $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ο πίνακας Π είναι αντιστρέψιμος;

$$\Pi = \begin{bmatrix} \kappa & \kappa & \lambda & 0 \\ \kappa & \kappa & 0 & \lambda \\ \mu & 0 & \kappa & \kappa \\ 0 & \mu & \kappa & \kappa \end{bmatrix}.$$

(Γ) Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ο πίνακας $B = \begin{bmatrix} 1 & -a & a \\ a & a-1 & 2 \\ a & -2 & a+3 \end{bmatrix}$ είναι διαγωνοποιήσιμος με μετασχηματισμό ομοιότητας. Έπειτα, για κάθε τιμή του α που θα βρείτε, να κατασκευάσετε μία πλήρη διαγωνοποίηση του B.

Ε Θ Ν Ι Κ Ο   Μ Ε Τ Σ Ο Β Ι Ο   Π Ο Λ Υ Τ Ε Χ Ν Ε Ι Ο

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

26 Ιανουαρίου 2022

Α

Ονοματεπώνυμο: . . . .

ΘΕΜΑ 1: (Α) Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{2} = 3 - z$ και $\varepsilon_2 : \frac{x+5}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{5-z}{2}$. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι ασύμβατες, να υπολογίστε τη μεταξύ τους απόσταση, και να υπολογίσετε τα άκρα του κοινού κάθετου ευθυγράμμου τμήματός τους. Έπειτα να κατασκευάσετε την αναλυτική εξίσωση του επιπέδου που περιέχει την ε_1 και είναι παράλληλο προς την ε_2.

(Β) Να αποδείξετε ότι το επίπεδο $\Pi : 2y - z = 1$ τέμνει τη σφαίρα $S : x^2 + y^2 + z^2 - 4y + 2z + 1 = 0$ και να υπολογίσετε το κέντρο και την ακτίνα της τομής $\Pi \cap S$. Έπειτα να υπολογίσετε την ορθή προβολή του κύκλου $\Pi \cap S$ επί του επιπέδου xOy.

(Γ) Να αποδείξετε ότι τα σύνολα $U = [(1,3,1,-2),(1,-1,1,4),(2,8,2,-7)]$ και $W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \colon\ 2x - y + z = 0,\ 2z + w = 0\}$ είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^4$ και να βρείτε από μία βάση τους. Έπειτα, να βρείτε από μία βάση των υποχώρων $U \cap W$ και $U + W$.

ΘΕΜΑ 2: (Α) Για έναν 3×3 πίνακα M γνωρίζουμε ότι μία ιδιοτιμή του είναι ίση με 1, το ίχνος του είναι ίσο με 0 και το ίχνος του M^2 είναι 26. Να υπολογίσετε τις ιδιοτιμές του $M^{-1} + 6 \cdot I_3$, καθώς και τις ιδιοτιμές του πίνακα $M^3 - 2 \cdot M + 8 \cdot I_3$.

(Β) Να λυθεί το επόμενο γραμμικό σύστημα για τις διάφορες τιμές της πραγματικής παραμέτρου α.

$$\left\{\begin{matrix} \alpha x + y + z + t = 1 \\ x + \alpha y + z + t = -1 \\ x + y + \alpha z + t = 1 \\ x + y + z + \alpha t = -1 \end{matrix}\right\}$$

(Γ) Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου $\alpha \in R$ για την οποία ο $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha - 3 & \alpha - 1 & 3 - \alpha & -1 \\ \alpha - 4 & \alpha - 3 & 5 - \alpha & -1 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ είναι διαγωνοποιήσιμος με μετασχηματισμό ομοιότητας. Έπειτα, για την τιμή του α που θα βρείτε, να κατασκευάστε μια πλήρη διαγωνοποίηση του A.

Ε Θ Ν Ι Κ Ο   Μ Ε Τ Σ Ο Β Ι Ο   Π Ο Λ Υ Τ Ε Χ Ν Ε Ι Ο

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

27 Σεπτεμβρίου 2018

Β

Ονοματεπώνυμο: . . . .

ΘΕΜΑ 1: (Α) Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : 3-x=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z+2}{2}$ και $\varepsilon_2 : \dfrac{5-x}{2}=\dfrac{y+5}{2}=\dfrac{z-1}{3}$. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι ασύμβατες, να υπολογίστε τη μεταξύ τους απόσταση, και να υπολογίσετε τα άκρα του κοινού κάθετου ευθυγράμμου τμήματός τους. Έπειτα να κατασκευάσετε την αναλυτική εξίσωση του επιπέδου που περιέχει την ε_1 και είναι παράλληλο προς την ε_2.

(Β) Να αποδείξετε ότι το επίπεδο $\Pi : 2y-z+1=0$ τέμνει τη σφαίρα $S : x^2+y^2+z^2-4y-2z+$ $+1=0$ και να υπολογίσετε το κέντρο και την ακτίνα της τομής $\Pi \cap S$. Έπειτα να υπολογίσετε την ορθή προβολή του κύκλου $\Pi \cap S$ επί του επιπέδου xOy.

(Γ) Να αποδείξετε ότι τα σύνολα $U=\left[(2,4,2-1),(1,3,1,-2),(1,1,1,1)\right]$ και $W=\{(x,y,z,w)\in \mathbb{R}^4 :$ $4x-2y-w=0,\ 2z+w=0\}$ είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^4$ και να βρείτε από μία βάση τους. Έπειτα, να βρείτε από μία βάση των υποχώρων $U\cap W$ και $U+W$.

ΘΕΜΑ 2: (Α) Για έναν 3×3 πίνακα M γνωρίζουμε ότι μία ιδιοτιμή του είναι ίση με 1, το ίχνος του είναι ίσο με -4 και το ίχνος του M^2 είναι 14. Να υπολογίσετε τις ιδιοτιμές του $M^{-1}+3\cdot I_3$, καθώς και τις ιδιοτιμές του πίνακα $M^3+2\cdot M-8\cdot I_3$.

(Β) Να λυθεί το επόμενο γραμμικό σύστημα για τις διάφορες τιμές της πραγματικής παραμέτρου α.

$$\left\{\begin{matrix} \alpha x+y+z+t=1 \\ x+y+z+\alpha t=-1 \\ x+ay+z+t=-1 \\ x+y+\alpha z+t=1 \end{matrix}\right\}$$

(Γ) Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου $\alpha \in R$ για την οποία ο πίνακας

$A=\begin{bmatrix} 1 & \alpha-3 & \alpha-4 & -2 \\ 0 & \alpha-1 & \alpha-3 & -2 \\ 0 & 3-\alpha & 5-\alpha & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ είναι διαγωνοποιήσιμος με μετασχηματισμό ομοιότητας. Έπειτα, για την τιμή του α που θα βρείτε, να κατασκευάστε μια πλήρη διαγωνοποίηση του A.

Ε Θ Ν Ι Κ Ο   Μ Ε Τ Σ Ο Β Ι Ο   Π Ο Λ Υ Τ Ε Χ Ν Ε Ι Ο

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

7 Σεπτεμβρίου 2020

Ονοματεπώνυμο: . . . .

ΘΕΜΑ 1

(Α) Να αποδείξετε ότι η μικρότερη δυνατή γωνία του διανύσματος $\vec{x} = (1,3,-1,3)$ με τα διανύσματα του υποχώρου $V = [(1,-1,1,1),(5,1,-3,3)]$ είναι $\pi/4$.

(Β) Να υπολογίσετε την προβολή της ευθείας (ε): $\frac{x}{2} = y-3 = z-1$ πάνω στο επίπεδο (Π): $2x-3y-z+3=0$. Έπειτα να υπολογίσετε τη συμμετρική ευθεία της (ε) ως προς το επίπεδο (Π).

(Γ) Για τις διάφορες τιμές των πραγματικών παραμέτρων α και β, να υπολογίσετε τη διάσταση του $V = [(1,1,1,1),(1,1,\alpha,1),(2,\beta,2\alpha,\beta),(1,\beta-1,\alpha,\beta-1)]$

ΘΕΜΑ 2

(Α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu \times \nu$ αντιστρέψιμο πίνακα A, ισχύει $|adj(A)| = |A|^{\nu-1}$ και $adj(adj(A)) = |A|^{\nu-2} \cdot A$.

(Β) Για έναν τετραγωνικό πίνακα 3×3 ισχύει ότι $B \cdot \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\3\\3\end{bmatrix}, B \cdot \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, B \cdot \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\0\\2\end{bmatrix}$. Να βρείτε τις ιδιοτιμές, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα B. Ο πίνακας B αντιστρέφεται; (δικαιολόγηση) Ο πίνακας B διαγωνοποιείται; (δικαιολόγηση) Αν ναι, ποια είναι η διαγωνοποιημένη του μορφή και ποιος είναι ο πίνακας που τον διαγωνοποιεί; Να υπολογίσετε τον πίνακα B.

(Γ) Να προσδιορίσετε τις τιμές των πραγματικών παραμέτρων a, b για τις οποίες ο επόμενος τετραγωνικός πίνακας 6×6 είναι αντιστρέψιμος:

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 & b \\ b & a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & a & b \\ b & 0 & 0 & 0 & b & a \end{bmatrix}$$

Ε Θ Ν Ι Κ Ο   Μ Ε Τ Σ Ο Β Ι Ο   Π Ο Λ Υ Τ Ε Χ Ν Ε Ι Ο

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

4 Φεβρουαρίου 2020

A

ΘΕΜΑ 1 (Α) Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου (Π) που διέρχεται από τα σημεία $(-1,2,3)$, $(7,-6,-5)$, $(4,3,2)$. Στη συνέχεια, βρείτε την προβολή του σημείου $\mathrm{P}(2,-2,4)$ στο επίπεδο (Π) και το συμμετρικό σημείο του P ως προς το ίδιο επίπεδο.

(Β) Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου (Π) που περιέχει την ευθεία $(\varepsilon_1): \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{3-z}{5}$ και είναι παράλληλο στην ευθεία $(\varepsilon_2): \dfrac{x+8}{2} = \dfrac{15-y}{3} = \dfrac{5-z}{3}$. Στη συνέχεια, βρείτε τα άκρα του κοινού κάθετου ευθυγράμμου τμήματος των (ε_1) και (ε_2).

ΘΕΜΑ 2 (Α) Έστω δύο υπόχωροι του $\mathbb{R}^5$, V και U. Αποδείξτε ότι η ένωση $V \cup U$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^5$ αν και μόνο αν $V \leq U$ ή $U \leq V$ (δηλαδή, ο ένας είναι υπόχωρος του άλλου).

(Β) Έστω $V = \left\{ (\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^4 : \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = \mathrm{O} \right\}$ και $U = \left\{ (\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^4 : \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = \mathrm{O} \right\}$.

Αποδείξτε ότι τα σύνολα V και U είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^4$, και κατασκευάστε βάσεις των υποχώρων V, U, $V+U$ και $V \cap U$.

ΘΕΜΑ 3 (Α) Δίνεται τετραγωνικός πίνακας A και u ένα ιδιοδιάνυσμα του με αντίστοιχη ιδιοτιμή λ.

(i) Το διάνυσμα $7u$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του $3A^2 + 5A + I$; Αν ναι, να υπολογίσετε την αντίστοιχη ιδιοτιμή του. Αν όχι, να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(ii) Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, το u είναι ένα ιδιοδιάνυμα του A^{-1}; Αν ναι, να υπολογίσετε την αντίστοιχη ιδιοτιμή του. Αν όχι, να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Β) (i) Για ποιες τιμές των $a,b \in \mathbb{R}$ ο πίνακας $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a \\ 3 & 0 & b \end{bmatrix}$ είναι διαγωνοποιήσιμος;

(ii) Για $a = 0$ και για $b = 1$, να βρείτε τον διαγώνιο πίνακα D που είναι όμοιος με τον B καθώς και τον πίνακα P που τον διαγωνοποιεί.

ΘΕΜΑ 4 (Α) Δίνεται $n \times n$ πίνακας A τέτοιος ώστε $A^t = -A$. Να αποδείξετε ότι αν ο n είναι περιττός, τότε ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.

(Β) Δίνεται ο πίνακας $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \kappa & \lambda & \mu \\ \kappa^2 & \lambda^2 & \mu^2 \end{bmatrix}$, όπου κ, λ, μ τρεις διακεκριμένοι πραγματικοί αριθμοί. Να εξετάσετε αν είναι αντιστρέψιμος. (Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.)

(Γ) Να λυθεί το επόμενο σύστημα γραμμικών εξισώσεων, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α:

$$\begin{cases} \alpha x + (1-\alpha) y + (1-\alpha) z = \alpha^2 \\ \alpha x + (1+\alpha) y + (1+\alpha) z = \alpha - \alpha^2 \\ x + y + z = 1 - \alpha \end{cases}.$$

Ε Θ Ν Ι Κ Ο   Μ Ε Τ Σ Ο Β Ι Ο   Π Ο Λ Υ Τ Ε Χ Ν Ε Ι Ο

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

4 Φεβρουαρίου 2020

Β

ΘΕΜΑ 1 (Α) Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου (Π) που διέρχεται από τα σημεία $(2,2,2)$, $(-3,7,7)$, $(3,-2,-1)$. Στη συνέχεια, βρείτε την προβολή του σημείου $\mathrm{P}(0,2,-2)$ στο επίπεδο (Π) και το συμμετρικό σημείο του P ως προς το ίδιο επίπεδο.

(Β) Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου (Π) που περιέχει την ευθεία $(\varepsilon_1): \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{2-y}{3} = \dfrac{z+1}{3}$ και είναι παράλληλο στην ευθεία $(\varepsilon_2): \dfrac{x+8}{3} = \dfrac{y-15}{2} = \dfrac{5-z}{5}$. Στη συνέχεια, βρείτε τα άκρα του κοινού κάθετου ευθυγράμμου τμήματος των (ε_1) και (ε_2).

ΘΕΜΑ 2 (Α) Έστω δύο υπόχωροι του $\mathbb{R}^4$, V και U. Αποδείξτε ότι η ένωση $V \cup U$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ αν και μόνο αν $V \le U$ ή $U \le V$ (δηλαδή, ο ένας είναι υπόχωρος του άλλου).

(Β) Έστω $V = \left\{ (\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^4 : \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = \mathrm{O} \right\}$ και $U = \left\{ (\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^4 : \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = \mathrm{O} \right\}$.

Αποδείξετε ότι τα σύνολα V και U είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^4$, και κατασκευάστε βάσεις των υποχώρων V, U, $V+U$ και $V \cap U$.

ΘΕΜΑ 3 (Α) Δίνεται τετραγωνικός πίνακας A και u ένα ιδιοδιάνυσμα του με αντίστοιχη ιδιοτιμή λ.

(i) Το διάνυσμα $7u$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του $5A^2 + 3A + I$; Αν ναι, να υπολογίσετε την αντίστοιχη ιδιοτιμή του. Αν όχι, να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(ii) Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, το u είναι ένα ιδιοδιάνυμα του A^{-1}; Αν ναι, να υπολογίσετε την αντίστοιχη ιδιοτιμή του. Αν όχι, να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Β) (i) Για ποιες τιμές των $a,b \in \mathbb{R}$ ο πίνακας $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & a & b \end{bmatrix}$ είναι διαγωνοποιήσιμος;

(ii) Για $a = 0$ και για $b = 1$, να βρείτε τον διαγώνιο πίνακα D που είναι όμοιος με τον B καθώς και τον πίνακα P που τον διαγωνοποιεί.

ΘΕΜΑ 4 (Α) Δίνεται $n \times n$ πίνακας A τέτοιος ώστε $A^t = -A$. Να αποδείξετε ότι αν ο n είναι περιττός, τότε ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.

(Β) Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \kappa & \lambda & \mu \\ \kappa^2 & \lambda^2 & \mu^2 \end{bmatrix}$, όπου κ, λ, μ τρεις διακεκριμένοι πραγματικοί αριθμοί. Να εξετάσετε αν είναι αντιστρέψιμος. (Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.)

(Γ) Να λυθεί το επόμενο σύστημα γραμμικών εξισώσεων, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α:

$$\begin{cases} \alpha x + (1+\alpha)y + (1+\alpha)\,z = \alpha - \alpha^2 \\ \alpha x + (1-\alpha)y + (1-\alpha)\,z = \alpha^2 \\ x + y + z = 1 - \alpha \end{cases} .$$