

ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
8ο Φυλλάδιο Ασκήσεων (υποδείξεις)

Ασκηση 1. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και φραγμένη. Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$f(x) = x$$

έχει λύση στο $\mathbb{R}$.

Υπόδειξη: Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) - x$. Αφού η f είναι φραγμένη θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $x_1 < f(x)$ και $x_2 > f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Οπότε $g(x_1) > 0$, $g(x_2) < 0$ και το συμπέρασμα προκύπτει από το Θεώρημα Bolzano. $\square$

Ασκηση 2. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ 0, & \text{αν } x \text{ άρρητος.} \end{cases}$$

Να δείξετε, κάνοντας χρήση του $\epsilon - \delta$ ορισμού του ορίου συνάρτησης, ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

Υπόδειξη: Έστω $\epsilon > 0$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$|f(x)| \leq |x|.$$

Έστω $\epsilon > 0$. Αν επιλέξουμε $\delta = \epsilon$, τότε για κάθε $0 < |x| < \delta$ θα έχουμε ότι

$$|f(x)| \leq |x| < \epsilon.$$

Οπότε,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

$\square$

Ασκηση 3. (α) Έστω $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \geq 0$, αποδείξτε ότι η g διατηρεί πρόσημο: ή $g(x) > 0$ για κάθε $x \geq 0$ ή $g(x) < 0$ για κάθε $x \geq 0$.

(β) Έστω $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ συνεχής συνάρτηση. Αν $f(x) \neq x$ για κάθε $x \geq 0$, αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Υπόδειξη: (α) Αφού $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \geq 0$, αν η g δεν διατηρεί πρόσημο, θα υπάρχουν $x_1, x_2 \geq 0$ ώστε $g(x_1) < 0$ και $g(x_2) > 0$. Όμως τότε, εφαρμόζοντας το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής μπορούμε να βρούμε ξ ανάμεσα στα x_1 και x_2 για το οποίο $g(\xi) = 0$. Έτσι οδηγούμαστε σε άτοπο (από την υπόθεση έχουμε $g(\xi) \neq 0$).

(β) Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) - x$. Από την υπόθεση έχουμε $f(x) \neq x$ για κάθε $x \geq 0$. Από το (α), η g διατηρεί πρόσημο. Αφού $g(0) = f(0) > 0$, συμπεραίνουμε ότι $g(x) > 0$ για κάθε $x \geq 0$. Συνεπώς, $f(x) > x$ για κάθε $x \geq 0$. Έπεται ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. $\square$

Ασκηση 4. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα $f(x) \in \mathbb{Q}$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση.

Υπόδειξη: Η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$, άρα παίρνει ελάχιστη τιμή m και μέγιστη τιμή M στο $[0, 1]$. Αν υποθέσουμε ότι η f δεν είναι σταθερή συνάρτηση, τότε $m < M$ (γιατί;). Γνωρίζουμε ότι υπάρχει άρρητος α ώστε $m < \alpha < M$. Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής υπάρχει $x \in (0, 1)$ με $f(x) = \alpha$. Αυτό έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση ότι η f παίρνει μόνο ρητές τιμές. $\square$

Άσκηση 5. Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow [c, d]$ συνεχείς και επί συναρτήσεις. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.

Υπόδειξη: Αφού οι f, g είναι επί του $[c, d]$, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [a, b]$ ώστε $f(x_1) = d = g(x_2)$. Τότε, για τη συνάρτηση $h = f - g$ έχουμε

$$h(x_1) = f(x_1) - g(x_1) = d - g(x_1) \geq 0$$

και

$$h(x_2) = f(x_2) - g(x_2) = f(x_2) - d \leq 0.$$

Από την $h(x_1)h(x_2) \leq 0$ και από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής έπεται ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε $h(\xi) = 0$, δηλαδή $f(\xi) = g(\xi)$. $\square$

Άσκηση 6. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο 0 και ότι $f(x/2) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

Υπόδειξη: Έστω $x \neq 0$. Χρησιμοποιώντας την υπόθεση (και με επαγωγή) δείχνουμε ότι

$$f(x) = f(x/2) = f(x/2^2) = \dots = f(x/2^n)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έχουμε $\frac{x}{2^n} \rightarrow 0$ και η f είναι συνεχής στο 0. Από την αρχή της μεταφοράς, $f(x/2^n) \rightarrow f(0)$. Αφού $f(x) = f(x/2^n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η ακολουθία $(f(x/2^n))$ είναι σταθερή, με όλους τους όρους της ίσους με $f(x)$. Έπεται ότι $f(x) = f(0)$ και, αφού το $x \neq 0$ ήταν τυχόν, η f είναι σταθερή. $\square$

Άσκηση 7. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T > 0$: δηλαδή, $f(x+T) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = f(x + \sqrt{2})$.

Υπόδειξη: Η f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο κλειστό διάστημα $[0, T]$. Δηλαδή, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [0, T]$ ώστε $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ για κάθε $x \in [0, T]$. Αφού η f είναι περιοδική με περίοδο T , μπορούμε να ελέγξουμε ότι η ανισότητα

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ ώστε $x + kT \in [0, T]$, και από την περιοδικότητα της f , $f(x) = f(x + kT)$).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) - f(x + \sqrt{2})$. Τότε, $g(x_1) = f(x_1) - f(x_1 + \sqrt{2}) \leq 0$ και $g(x_2) = f(x_2) - f(x_2 + \sqrt{2}) \geq 0$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, βρίσκουμε x ανάμεσα στα x_1 και x_2 ώστε $g(x) = 0$, δηλαδή $f(x) = f(x + \sqrt{2})$. $\square$