

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ Ι
ΣΕΜΦΕ 2023-2024

Οι πραγματικοί αριθμοί

ΑΣΚΗΣΗ 1.1. Από τις παρακάτω προτάσεις βρείτε ποιές είναι αληθείς και ποιές είναι ψευδείς δικαιολογώντας την απάντησή σας.

- (1) Αν ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ δεν έχει μέγιστο στοιχείο τότε δεν είναι άνω φραγμένο.
- (2) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό, άνω φραγμένο και έστω $s = \sup A$. Τότε ένας αριθμός $M \in \mathbb{R}$ είναι άνω φράγμα του A αν και μόνο αν $M \geq \sup A$.
- (3) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και άνω φραγμένο και έστω $s = \sup A$. Τότε για κάθε $s' < s$ υπάρχει $a \in A$ με $s' < a < s$.
- (4) Το άθροισμα ενός οποιουδήποτε ρητού και ενός οποιουδήποτε άρρητου είναι πάντα άρρητος αριθμός.
- (5) Το γινόμενο ενός οποιουδήποτε ρητού διαφόρου του μηδέν και ενός οποιουδήποτε άρρητου είναι πάντα άρρητος αριθμός.
- (6) Σε κάθε ανοικτό διάστημα του $\mathbb{R}$ υπάρχουν άπειροι ρητοί και άπειροι άρρητοι αριθμοί.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Θεωρώντας το ανοικτό διάστημα $(0, 1)$ βλέπουμε ότι η πρόταση (1) είναι ψευδής.

Η (2) είναι αληθής: Πράγματι, αν M άνω φράγμα του A τότε $M \geq \sup A$ αφού $\sup A$ είναι εξ ορισμού το ελάχιστο άνω φράγμα. Αντίστροφα, έστω $M \geq \sup A$. Αφού το $\sup A$ είναι άνω φράγμα του A έχουμε τότε $\sup A \geq a$ για όλα τα $a \in A$. Άρα $M \geq \sup A \geq a$ για όλα τα $a \in A$ και συνεπώς από την μεταβατική ιδιότητα της διάταξης, $M \geq a$ για όλα τα $a \in A$. Οπότε το M είναι άνω φράγμα του A .

Η (3) είναι ψευδής, πχ. έστω $A = \{a_0\}$ να είναι ένα μονοσύνολο. Τότε $s = \sup A = a_0$ και δεν υπάρχει $a \in A$ με $a < s$. Η σωστή πρόταση λέει ότι για κάθε $s' < s$ υπάρχει $a \in A$ με $s' < a \leq s$.

Οι (4) και (5) είναι αληθείς. Πράγματι, έστω προς απαγωγή σε άτοπο ότι υπήρχαν a άρρητος και ρ ρητός τέτοιои ώστε $a + \rho = \rho'$ με ρ' ρητό. Τότε $a = \rho' - \rho$ και άρα ο a θα ήταν ρητός, άτοπο. Ομοίως για το γινόμενο.

Η (6) είναι αληθής και προκύπτει από την πυκνότητα των ρητών και αρρήτων στο $\mathbb{R}$: Μεταξύ δύο πραγματικών αριθμών υπάρχει ένας ρητός και ένας άρρητος αριθμός.

ΑΣΚΗΣΗ 1.2. Έστω $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ μη κενά με το B φραγμένο. Δείξτε ότι και το A είναι φραγμένο και

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αφού κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B , αν για κάποιο $M \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $b \leq M$ για όλα τα $b \in B$ αυτό σημαίνει ότι θα ισχύει και $a \leq M$, για όλα τα $a \in A$. Με άλλα λόγια, κάθε άνω φράγμα του B είναι και άνω φράγμα του A . Ειδικότερα, το $\sup B$ ως άνω φράγμα του B είναι άνω φράγμα του A . Άρα το A είναι άνω φραγμένο και $\sup A \leq \sup B$ διότι το $\sup A$ είναι το μικρότερο άνω φράγμα του A .

Αντίστοιχα, κάθε κάτω φράγμα του B είναι και κάτω φράγμα του A . Ειδικότερα, το $\inf B$ ως κάτω φράγμα του B , είναι και κάτω φράγμα του A οπότε το A είναι κάτω φραγμένο και $\inf B \leq \inf A$ διότι το $\inf A$ είναι το μεγαλύτερο κάτω φράγμα του A . $\square$

ΑΣΚΗΣΗ 1.3. ($\uparrow$ ΑΣΚΗΣΗ 1.2) Έστω $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ μη κενά με το B φραγμένο.

- (1) Αν για κάθε $b \in B$ υπάρχει $a \in A$ με $b < a$ δείξτε ότι $\sup A = \sup B$.
- (2) Αν για κάθε $b \in B$ υπάρχει $a \in A$ με $a < b$ δείξτε ότι $\inf B = \inf A$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (1) Από την Άσκηση 1.2 έχουμε $\sup A \leq \sup B$ και συνεπώς αρκεί να αποκλείσουμε την περίπτωση $\sup A < \sup B$. Πράγματι αν ήταν $\sup A < \sup B$ τότε το $\sup A$ ως γνήσια μικρότερο του $\sup B$ (=ελάχιστο άνω φράγμα του B) δεν θα ήταν άνω φράγμα του B και άρα θα υπήρχε $b_0 \in B$ με $\sup A < b_0$. Από την υπόθεσή μας υπάρχει και $a_0 \in A$ με $b_0 < a_0$. Άρα $\sup A < a_0$ για κάποιο $a_0 \in A$, άτοπο.

(2) Ομοίως, από την Άσκηση 1.2 έχουμε $\inf B \leq \inf A$ και συνεπώς αρκεί να αποκλείσουμε την περίπτωση $\inf B < \inf A$. Πράγματι αν ήταν $\inf B < \inf A$ τότε το $\inf A$ ως γνήσια μεγαλύτερο του $\inf B$ (= μέγιστο κάτω φράγμα του B) δεν θα ήταν κάτω φράγμα του B και άρα θα υπήρχε $b_0 \in B$ με $b_0 < \inf A$. Από την υπόθεσή μας υπάρχει και $a_0 \in A$ με $a_0 < b_0$. Άρα $a_0 < \inf A$ για κάποιο $a_0 \in A$, άτοπο. $\square$

ΑΣΚΗΣΗ 1.4. Έστω $S, T \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $s \in S$ και κάθε $t \in T$ ισχύει ότι $s \leq t$. Δείξτε ότι $\sup S \leq \inf T$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Από την υπόθεση έπεται ότι κάθε $t \in T$ είναι άνω φράγμα του S , οπότε

$$\sup S \leq t, \text{ για όλα τα } t \in T \quad (1.1)$$

διότι το $\sup S$ είναι το μικρότερο άνω φράγμα του S .

Η (4.3) όμως δηλώνει ότι το $\sup S$ είναι κάτω φράγμα του T . Άρα

$$\sup S \leq \inf T \quad (1.2)$$

αφού το $\inf T$ είναι εξ ορισμού το μεγαλύτερο κάτω φράγμα του T . $\square$

ΑΣΚΗΣΗ 1.5. Έστω A, B μη κενά φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\sup A = \inf B$. Δείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν $a \in A$ και $b \in B$ με $0 \leq b - a < \epsilon$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $\epsilon > 0$ και έστω $s = \sup A = \inf B$. Αφού $s = \sup A$, υπάρχει $a \in A$ τέτοιο ώστε

$$s - \frac{\epsilon}{2} < a \leq s \quad (1.3)$$

(αυτό γίνεται διότι το $s - \frac{\epsilon}{2}$ ως γνήσια μικρότερο του ελαχίστου άνω φράγματος s του A δεν είναι άνω φράγμα του A και άρα υπάρχει $a \in A$ με $s - \frac{\epsilon}{2} < a$. Από την άλλη μεριά $a \leq s$ αφού το s είναι άνω φράγμα του A). Αντίστοιχα, αφού $s = \inf B$ υπάρχει $b \in B$ τέτοιο ώστε

$$s \leq b < s + \frac{\epsilon}{2} \quad (1.4)$$

Άρα

$$s - \frac{\epsilon}{2} < a \leq s \leq b < s + \frac{\epsilon}{2}$$

οπότε $0 \leq b - a < s + \frac{\epsilon}{2} - (s - \frac{\epsilon}{2}) < \epsilon$. □

ΑΣΚΗΣΗ 1.6. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $M \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε κάθε $M' > M$ να είναι άνω φράγμα του A . Δείξτε ότι και το M είναι άνω φράγμα του A .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω προς απαγωγή σε άτοπο, ότι το M δεν είναι άνω φράγμα του A . Τότε θα υπάρχει ένα $a \in A$ με $M < a$. Θέτουμε

$$M' = \frac{M + a}{2}$$

Επειδή $M < a$ έπεται εύκολα ότι

$$M < M' < a$$

Άρα από την μια μεριά το M' είναι άνω φράγμα του A (ως γνήσια μεγαλύτερο του M) ενώ από την άλλη μεριά το M' είναι γνήσια μικρότερο ενός στοιχείου του A , άτοπο. □

ΑΣΚΗΣΗ 1.7. (†ΑΣΚΗΣΗ 1.6) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $M_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

(α) για κάθε $M > M_0$, $A \cap (M, +\infty) = \emptyset$ και

(β) για κάθε $M < M_0$ $A \cap (M, +\infty) \neq \emptyset$.

Δείξτε ότι $M_0 = \sup A$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Παρατηρούμε ότι το (α) δίνει ότι

$$\text{κάθε } M > M_0 \text{ είναι άνω φράγμα του } A \quad (1.5)$$

Αντίστοιχα, από το (β) έχουμε ότι

$$\text{κάθε } M < M_0 \text{ δεν είναι άνω φράγμα του } A \quad (1.6)$$

Συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι το M είναι άνω φράγμα του A αφού τότε, από τα παραπάνω, θα είναι και το μικρότερο άνω φράγμα του A . Αυτό έπεται από την (1.5) και την Άσκηση 1.6. $\square$

ΑΣΚΗΣΗ 1.8. Έστω S_1 και S_2 δύο μη κενά και άνω φραγμένα υποσύνολα των πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι και το σύνολο $S_1 \cup S_2$ είναι άνω φραγμένο και μάλιστα

$$\sup(S_1 \cup S_2) = \max\{\sup S_1, \sup S_2\}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $s_1 = \sup S_1$ και $s_2 = \sup S_2$. Για κάθε $x \in S_1 \cup S_2$ έχουμε ότι $x \in S_1$ ή $x \in S_2$. Δηλαδή, $x \leq s_1$ ή $x \leq s_2$ και συνεπώς για κάθε $x \in S_1 \cup S_2$ θα έχουμε ότι $x \leq \max\{s_1, s_2\}$. Επομένως, $\sup(S_1 \cup S_2) \leq \max\{s_1, s_2\}$, αφού το $\sup(S_1 \cup S_2)$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του συνόλου. Για την αντίστροφη ανισότητα, αφού $S_1 \subseteq S_1 \cup S_2$ και $S_2 \subseteq S_1 \cup S_2$, από την Άσκηση 1.2 θα έχουμε ότι $s_1 \leq \sup(S_1 \cup S_2)$ και $s_2 \leq \sup(S_1 \cup S_2)$. Δηλαδή, $\max\{s_1, s_2\} \leq \sup(S_1 \cup S_2)$ από όπου και έπεται το ζητούμενο. $\square$

ΑΣΚΗΣΗ 1.9. Έστω T_1 και T_2 δύο μη κενά και κάτω φραγμένα υποσύνολα των πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι και το σύνολο $T_1 \cup T_2$ είναι κάτω φραγμένο και μάλιστα

$$\inf(T_1 \cup T_2) = \min\{\inf T_1, \inf T_2\}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αντίστοιχα όπως στην Άσκηση 1.8. $\square$

ΑΣΚΗΣΗ 1.10. Έστω S και T δύο μη κενά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών και θέτουμε

$$S + T = \{s + t : S \in S, t \in T\}.$$

Δείξτε ότι αν τα S και T είναι άνω φραγμένα, τότε

$$\sup(S + T) = \sup S + \sup T.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Επειδή $s \leq \sup S$ για κάθε $s \in S$ και ομοίως $t \leq \sup T$ για κάθε $t \in T$ έχουμε ότι $s + t \leq \sup S + \sup T$ για κάθε $s \in S$ και κάθε $t \in T$ και άρα το $\sup S + \sup T$ είναι άνω φράγμα του $S + T$. Μένει να δειχθεί ότι το $\sup S + \sup T$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του $S + T$. Έστω $x \in \mathbb{R}$ με $x < \sup S + \sup T$. Θέτουμε $\epsilon = \sup S + \sup T - x > 0$. Επειδή $\sup S - \frac{\epsilon}{2} < \sup S$ υπάρχει $s \in S$ με $s > \sup S - \frac{\epsilon}{2}$. Ομοίως υπάρχει $t \in T$ με $t > \sup T - \frac{\epsilon}{2}$. Άρα

$$s + t > \left(\sup S - \frac{\epsilon}{2}\right) + \left(\sup T - \frac{\epsilon}{2}\right) = \sup S + \sup T - \epsilon = x$$

Άρα υπάρχει στοιχείο του $S + T$ γνήσια μεγαλύτερο του x , δηλαδή το x δεν είναι άνω φράγμα του $S + T$. Αποδείξαμε λοιπόν ότι το $\sup S + \sup T$ είναι άνω φράγμα του $S + T$ και κάθε αριθμός μικρότερος του $\sup S + \sup T$ δεν

είναι. Άρα το $\sup S + \sup T$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του $S + T$, δηλαδή $\sup S + \sup T = \sup(S + T)$. $\square$

ΑΣΚΗΣΗ 1.11. Δείξτε ότι κάθε μη κενό πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει ελάχιστο και μέγιστο στοιχείο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ με $|A|$ θα συμβολίζουμε το πλήθος των στοιχείων του A . Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο πλήθος των στοιχείων του συνόλου. Αν $|A| = 1$ ισodύναμα $A = \{a\}$ για κάποιο $a \in \mathbb{R}$ τότε $\min A = \max A = a$. Έστω τώρα ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ με $|A| = n$ ισχύει ότι το A έχει μέγιστο και ελάχιστο. Θα δείξουμε ότι τότε το ίδιο ισχύει και για οποιοδήποτε $A \subseteq \mathbb{R}$ με $|A| = n + 1$. Πράγματι, έστω $A = \{x_1, \dots, x_{n+1}\}$ ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $n + 1$ στοιχεία. Θέτουμε $A' = \{x_1, \dots, x_n\}$. Επειδή $|A'| = n$ από την επαγωγική μας υπόθεση το A' έχει μέγιστο ($\max A'$) και ελάχιστο ($\min A'$). Είναι τώρα εύκολο να διαπιστώσουμε ότι ο μεγαλύτερος από τους $\max A'$ και x_{n+1} είναι το $\max A$ και αντίστοιχα ο μικρότερος από τους $\min A'$ και x_{n+1} είναι το ελάχιστο του A . $\square$

ΑΣΚΗΣΗ 1.12. Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 1.11 δώστε μια εναλλακτική απόδειξη της επονομαζόμενης Αρχής Καλής Διάταξης του $\mathbb{N}$: Κάθε μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}$ έχει ελάχιστο στοιχείο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $A \subseteq \mathbb{N}$ μη κενό. Αφού το A είναι μη κενό μπορούμε να επιλέξουμε ένα στοιχείο του $n_0 \in A$. Ορίζουμε το σύνολο

$$A' = A \cap \{1, \dots, n_0\} = \{a \in A : a \leq n_0\}.$$

Το A' έχει το πολύ n στοιχεία και άρα είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ μη κενό αφού περιέχει το n_0 . Από την Άσκηση 1.11 έχουμε ότι το A' έχει ελάχιστο στοιχείο. Έστω $m = \min A'$. Ισχυριζόμαστε ότι $m = \min A$. Πράγματι, καταρχάς $m \in A' \subseteq A$ και άρα $m \in A$. Μένει ναδειχθεί ότι $m \leq a$, για κάθε $a \in A$. Πράγματι, έστω a ένα οποιοδήποτε στοιχείο του A . Διακρίνουμε δύο δυνατές περιπτώσεις: είτε $a \leq n_0$ ή $a > n_0$. Αν $a \leq n_0$ έχουμε ότι $a \in A'$ και άρα $m \leq a$ αφού $m = \min A'$. Αν πάλι $a > n_0$ τότε $m \leq n_0 < a$ και άρα $m < a$. Συνεπώς, $m = \min A$. $\square$

ΑΣΚΗΣΗ 1.13. (α) Δείξτε ότι για κάθε $\lambda > 0$ ισχύει ότι

$$\lambda^n \geq 1 + n(\lambda - 1) \quad (1.7)$$

(β) Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $a_1, \dots, a_n$ μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί. Ο αριθμός

$$A_n = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$$

καλείται **αριθμητικός μέσος** των $a_1, \dots, a_n$. Δείξτε ότι

$$A_n^n \geq A_{n-1}^{n-1} a_n \quad (1.8)$$

για κάθε $n \geq 2$.

(γ) Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $a_1, \dots, a_n$ μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί. Ο αριθμός

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$$

καλείται **γεωμετρικός μέσος** των $a_1, \dots, a_n$.

Δείξτε την Ανισότητα Γεωμετρικού-Αριθμητικού Μέσου: Ο αριθμητικός μέσος είναι μεγαλύτερος ή ίσος του γεωμετρικού μέσου. Δηλαδή, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $a_1, \dots, a_n \geq 0$ ισχύει ότι

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \quad (1.9)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (α) Θέτοντας $a = \lambda - 1$ έχουμε $a > -1$. Άρα από την Ανισότητα Bernoulli:

$$\lambda^n = ((1 + (\lambda - 1)))^n = (1 + a)^n \geq 1 + na = 1 + n(\lambda - 1)$$

(β) Έστω $n \geq 2$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $A_{n-1} \neq 0$ διαφορετικά η ανισότητα είναι τετριμμένη. Θεωρούμε τον λόγο

$$\lambda = \frac{A_n}{A_{n-1}}$$

Από το (α) έχουμε

$$\begin{aligned} \left(\frac{A_n}{A_{n-1}} \right)^n &\geq \left(1 + n \left(\frac{A_n}{A_{n-1}} - 1 \right) \right) \\ &= \frac{A_{n-1} + nA_n - nA_{n-1}}{A_{n-1}} \\ &= \frac{nA_n - (n-1)A_{n-1}}{A_{n-1}} = \frac{a_n}{A_{n-1}} \end{aligned}$$

διότι $nA_n = a_1 + \cdots + a_n$ και $(n-1)A_{n-1} = a_1 + \cdots + a_{n-1}$.

Άρα

$$\left(\frac{A_n}{A_{n-1}} \right)^n \geq \frac{a_n}{A_{n-1}} \Rightarrow A_n^n \geq A_{n-1}^{n-1} a_n$$

(γ) Εφαρμόζοντας επαναληπτικά την (1.8) έχουμε

$$A_n^n \geq A_{n-1}^{n-1} a_n \geq (A_{n-2}^{n-2} a_{n-1}) a_n \geq \cdots \geq A_1 a_2 \cdots a_n = a_1 a_2 \cdots a_n$$

και άρα

$$\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \right)^n \geq a_1 \cdots a_n$$

Ισοδύναμα,

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$$

□

Κεφάλαιο 2

Ακολουθίες

ΑΣΚΗΣΗ 2.1. Από τις παρακάτω προτάσεις βρείτε ποιές είναι αληθείς και ποιές είναι ψευδείς δικαιολογώντας την απάντησή σας.

- (1) Αν η (a_n^2) συγκλίνει τότε και η (a_n) συγκλίνει.
- (2) Αν $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ τότε $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^n = 1$.
- (3) Αν η ακολουθία (a_n) συγκλίνει τότε η ακολουθία $b_n = a_{2n} - a_{2n-1}$ συγκλίνει στο 0.
- (4) Αν η ακολουθία (a_n) συγκλίνει στο $a \in \mathbb{R}$ και $a_{3n} = 1$ τότε $a = 1$.
- (5) Αν η (a_n) είναι φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών τότε η (a_n) συγκλίνει.
- (6) Αν $a_n \rightarrow a$ με $a < 1$ τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $a_n < 1$ για κάθε $n \geq n_0$.
- (7) Υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών $k_1 < k_2 < \dots$ τέτοια ώστε η ακολουθία $a_n = \cos k_n$ συγκλίνει.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

- (1) ΛΑΘΟΣ, πχ. αν $a_n = (-1)^n$ τότε $a_n^2 = 1 \rightarrow 1$ αλλά η (a_n) δεν συγκλίνει.
- (2) ΛΑΘΟΣ, πχ. $a_n = 1 + \frac{1}{n}$. Τότε $a_n \rightarrow 1$ $a_n^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$.
- (3) ΣΩΣΤΟ, αν $a = \lim a_n$ τότε οι (a_{2n}) και (a_{2n-1}) συγκλίνουν στο a ως υπακολουθίες της (a_n) και άρα η διαφορά τους $a_{2n} - a_{2n-1}$ συγκλίνει στο $a - a = 0$.
- (4) ΣΩΣΤΟ, διότι η (a_{3n}) είναι υπακολουθία της συγκλίνουσας ακολουθίας (a_n) και άρα $1 = \lim a_{3n} = \lim a_n$.
- (5) ΣΩΣΤΟ, επειδή η (a_n) είναι και κάτω φραγμένη από το μηδέν.
- (6) ΣΩΣΤΟ, για $\epsilon = 1 - a$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|a_n - a| < \epsilon \Rightarrow a_n < a + \epsilon < a + 1 - a = 1$, για κάθε $n \geq n_0$.
- (7) ΣΩΣΤΟ, η ακολουθία $a_n = \cos n$ είναι φραγμένη ακολουθία και άρα από το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Άρα υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία $k_1 < k_2 < \dots$ φυσικών αριθμών τέτοια ώστε η $a_{k_n} = \cos k_n$ συγκλίνει.

ΑΣΚΗΣΗ 2.2. Έστω $a_n \rightarrow a$, $a \in \mathbb{R}$. Αν (a'_n) ακολουθία που διαφέρει από την (a_n) σε πεπερασμένο πλήθος όρων δείξτε ότι $a'_n \rightarrow a$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αφού η (a'_n) διαφέρει από την (a_n) σε πεπερασμένο πλήθος όρων υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $a_n = a'_n$ για κάθε $n \geq m_0$. Έστω $\epsilon > 0$. Επειδή $a_n \rightarrow a$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $n \geq n_0$, $|a_n - a| < \epsilon$. Θέτουμε $n'_0 = \max(m_0, n_0)$. Τότε για κάθε $n \geq n'_0$ έχουμε $|a'_n - a| = |a_n - a| < \epsilon$, αφού $a_n = a'_n$ και $n \geq n_0$. Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n'_0 \in \mathbb{N}$ με $|a'_n - a| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n'_0$ οπότε $a'_n \rightarrow a$. $\square$

ΑΣΚΗΣΗ 2.3. (α) Δείξτε ότι

$$a_n \rightarrow a \Leftrightarrow |a_n - a| \rightarrow 0$$

(β) Συμπεράνετε ότι

$$a_n \rightarrow 0 \Leftrightarrow |a_n| \rightarrow 0$$

(γ) Δείξτε την συνεπαγωγή $a_n \rightarrow a \Rightarrow |a_n| \rightarrow |a|$. Ισχύει για $a \neq 0$ η ισοδυναμία;

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (α) Εφαρμόζοντας τον ορισμό του ορίου έχουμε

$$a_n \rightarrow a \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad |a_n - a| < \epsilon \quad (2.1)$$

και αντίστοιχα θέτοντας $b_n = |a_n - a|$,

$$b_n \rightarrow 0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad |b_n - 0| = b_n < \epsilon \quad (2.2)$$

ή ισοδύναμα

$$|a_n - a| \rightarrow 0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad |a_n - a| < \epsilon \quad (2.3)$$

Από (2.1) και (2.3) έχουμε το ζητούμενο.

(β) Θέτουμε $a = 0$.

(γ) Από την ανισότητα $||x| - |y|| \leq |x - y|$ έχουμε

$$\begin{aligned} a_n \rightarrow a &\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad |a_n - a| < \epsilon \\ &\Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad ||a_n| - |a|| < \epsilon \\ &\Leftrightarrow |a_n| \rightarrow |a| \end{aligned}$$

Η αντίστροφη συνεπαγωγή δεν ισχύει, πχ. αν $a_n = (-1)^n$ τότε $|a_n| = 1 \rightarrow 1$ αλλά η (a_n) δεν συγκλίνει. $\square$

ΑΣΚΗΣΗ 2.4. Έστω (a_n) ακολουθία με $a_n \in \mathbb{Z}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν η (a_n) είναι συγκλίνουσα δείξτε ότι είναι τελικά σταθερή.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω ότι $a_n \rightarrow a$ για κάποιο $a \in \mathbb{R}$. Τότε για $\epsilon = 1/2$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$, $|a_n - a| < 1/2$ και άρα

$$|a_{n_0} - a_n| = |a_{n_0} - a + a - a_n| \leq |a_{n_0} - a| + |a - a_n| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Συνεπώς κάθε όρος a_n με $n > n_0$ απέχει από τον a_{n_0} απόσταση γνήσια μικρότερη του 1. Επειδή $a_n \in \mathbb{Z}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ αυτό σημαίνει ότι $a_n = a_{n_0}$ για κάθε $n \geq n_0$, δηλαδή η (a_n) είναι τελικά σταθερή. $\square$

ΑΣΚΗΣΗ 2.5. Αν $a_n > 0$ και $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ δείξτε ότι $a_n \rightarrow 0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αφού $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ έχουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ για κάθε $n \geq n_0$ (δείτε και Άσκηση 2.1). Άρα, αφού $a_n > 0$, έπεται ότι $a_{n+1} < a_n$ για κάθε $n \geq n_0$ δηλαδή η (a_n) είναι τελικά μία γνησίως φθίνουσα ακολουθία. Επειδή είναι και κάτω φραγμένη (από το μηδέν), η (a_n) είναι συγκλίνουσα. Έστω $a = \lim a_n$. Αν $a \neq 0$ τότε $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a}{a} = 1$, άτοπο. Άρα $a = 0$. $\square$

ΑΣΚΗΣΗ 2.6. Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών και $a \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

- (1) $a_n \rightarrow a$.
- (2) Για κάθε $\epsilon > 0$ το σύνολο $N_\epsilon = \{n \in \mathbb{N} : |a_n - a| \geq \epsilon\}$ είναι πεπερασμένο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (1) $\Rightarrow$ (2): Έστω $\epsilon > 0$. Αφού $a_n \rightarrow a$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|a_n - a| < \epsilon$ για όλα τα $n \geq n_0$. Αυτό σημαίνει ότι $N_\epsilon \subseteq \{n \in \mathbb{N} : n < n_0\}$ και συνεπώς το N_ϵ είναι πεπερασμένο.

(2) $\Rightarrow$ (1): Έστω $\epsilon > 0$. Αν το N_ϵ είναι κενό θέτουμε $n_0 = 1$. Διαφορετικά αν το N_ϵ είναι μη κενό τότε ως πεπερασμένο έχει μέγιστο στοιχείο (Άσκηση 1.11). Στην περίπτωση αυτή θέτουμε $n_0 = \max N_\epsilon + 1$. Παρατηρούμε ότι αν $n \geq n_0$ τότε $n \notin N_\epsilon$ και άρα $|a_n - a| < \epsilon$. $\square$

ΑΣΚΗΣΗ 2.7. ($\uparrow$ ΑΣΚΗΣΗ 2.6) Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών και $a \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

- (1) $a_n \rightarrow a$.
- (2) Υπάρχει $\epsilon > 0$ και μια υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) με $|a_{k_n} - a| \geq \epsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (1) $\Rightarrow$ (2): Από την Άσκηση 2.6 έχουμε ότι υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε το σύνολο $N_\epsilon = \{n \in \mathbb{N} : |a_n - a| \geq \epsilon\}$ είναι άπειρο. Το N_ϵ γράφεται $N_\epsilon = \{k_1 < k_2 < \dots\}$ και άρα η ακολουθία (a_{k_n}) είναι μια υπακολουθία της (a_n) με $|a_{k_n} - a| \geq \epsilon$.

(2) $\Rightarrow$ (1): Η (a_{k_n}) , λόγω του ότι $|a_{k_n} - a| \geq \epsilon$, δεν συγκλίνει στο a . Αν $a_n \rightarrow a$ τότε κάθε υπακολουθία της (a_n) θα είχε όριο το a . Άρα $a_{k_n} \rightarrow a$, άτοπο. $\square$

ΑΣΚΗΣΗ 2.8. ($\uparrow$ ΑΣΚΗΣΗ 2.7) Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών και $a \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

- (1) $a_n \nrightarrow a$.
 (2) Υπάρχει υπακολουθία της (a_n) της οποίας καμία υπακολουθία δεν συγκλίνει στο a .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (1) $\Rightarrow$ (2): Αν $a_n \nrightarrow a$ τότε από την Άσκηση 2.7 υπάρχει $\epsilon > 0$ και μια υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) με $|a_{k_n} - a| \geq \epsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι η (a_{k_n}) δεν περιέχει υπακολουθία που να συγκλίνει στο a αφού τότε θα υπήρχαν όροι της (a_{k_n}) οσοδήποτε κοντά στο a .

(2) $\Rightarrow$ (1): Έστω ότι ισχύει το (2) αλλά $a_n \rightarrow a$. Τότε όλες οι υπακολουθίες της (a_n) συγκλίνουν στο a , άτοπο. $\square$

ΑΣΚΗΣΗ 2.9. ($\uparrow$ ΑΣΚΗΣΗ 2.8) Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών και $a \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

- (1) $a_n \rightarrow a$.
 (2) Κάθε υπακολουθία της (a_n) περιέχει μια υπακολουθία που συγκλίνει στο a .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. $\square$

ΑΣΚΗΣΗ 2.10. Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών και $a \in \mathbb{R}$. Αν οι υπακολουθίες (a_{2n}) και (a_{2n-1}) συγκλίνουν στο a , δείξτε ότι και η (a_n) συγκλίνει στο a .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $\epsilon > 0$. Επειδή $a_{2n} \rightarrow a$ υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$|a_{2n} - a| < \epsilon \text{ για κάθε } n \geq n_1$$

Ισοδύναμα, θέτοντας $n'_1 = 2n_1$,

$$|a_n - a| < \epsilon \text{ για κάθε } n \text{ άρτιο με } n \geq n'_1 \quad (2.4)$$

Ομοίως, αφού $a_{2n-1} \rightarrow a$ υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$|a_{2n-1} - a| < \epsilon \text{ για κάθε } n \geq n_2$$

Ισοδύναμα, θέτοντας $n'_2 = 2n_2 - 1$,

$$|a_n - a| < \epsilon \text{ για κάθε } n \text{ περιττό με } n \geq n'_2 \quad (2.5)$$

Θέτουμε

$$n_0 = \max\{n'_1, n'_2\}$$

Είναι εύκολο τώρα να επαληθεύσουμε ότι $|a_n - a| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Πράγματι έστω $n \geq n_0$. Τότε $n \geq n'_1$ και $n \geq n'_2$. Άρα αν ο n είναι άρτιος τότε $|a_n - a| < \epsilon$ από την (2.4) και αν ο n είναι περιττός τότε $|a_n - a| < \epsilon$ από την (2.5). $\square$

ΑΣΚΗΣΗ 2.11. Έστω (a_n) συγκλίνουσα ακολουθία. Αν $a_{2n} = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ δείξτε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1} = 0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $a = \lim a_n$. Τότε $\lim a_{k_n} = a$ για κάθε υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) . Συνεπώς $\lim a_{2n-1} = a = \lim a_{2n} = \lim 0 = 0$. $\square$

ΑΣΚΗΣΗ 2.12. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό.

- (1) Αν το A είναι άνω φραγμένο δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (a_n) με $a_n \in A$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $a_n \rightarrow \sup A$.
- (2) Αντίστοιχα αν το A είναι κάτω φραγμένο δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (a_n) με $a_n \in A$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $a_n \rightarrow \inf A$.

ΑΣΚΗΣΗ 2.13. Έστω $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\frac{x^n}{n!} \rightarrow 0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $x > 0$. Έστω $n_0 = [x]$. Τότε για κάθε $n > n_0$ έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{x^n}{n!} &= \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdots \frac{x}{n_0} \cdot \frac{x}{n_0+1} \cdot \frac{x}{n_0+2} \cdots \frac{x}{n} \\ &= \frac{x^{n_0}}{n_0!} \cdot \frac{x}{n_0+1} \cdot \frac{x}{n_0+2} \cdots \frac{x}{n} \\ &\leq \frac{x^{n_0}}{n_0!} \cdot \left(\frac{x}{n_0+1} \right)^{n-n_0} \\ &= \frac{(n_0+1)^{n_0}}{n_0!} \cdot \left(\frac{x}{n_0+1} \right)^n \end{aligned}$$

Άρα, θέτοντας

$$c = \frac{(n_0+1)^{n_0}}{n_0!} \quad \text{και} \quad \lambda = \frac{x}{n_0+1} = \frac{x}{[x]+1}$$

έχουμε

$$0 \leq \frac{x^n}{n!} \leq c \cdot \lambda^n$$

για κάθε $n \geq n_0$. Επειδή $0 < \lambda < 1$, έχουμε ότι $\lambda^n \rightarrow 0$ και άρα από το Θεώρημα των Ισοσυγκλιουσών ακολουθιών έπεται ότι $\frac{x^n}{n!} \rightarrow 0$.

Για $x = 0$ είναι προφανές. Αν τώρα $x < 0$ τότε

$$-\frac{|x|^n}{n!} \leq \frac{x^n}{n!} \leq \frac{|x|^n}{n!}$$

και το ζητούμενο έπεται από την προηγούμενη περίπτωση και το Θεώρημα των Ισοσυγκλιουσών ακολουθιών. $\square$

ΑΣΚΗΣΗ 2.14. Βρείτε το όριο (αν υπάρχει) των παρακάτω ακολουθιών:

- (1) $a_n = \frac{4n^2 - n + 2}{n^2 + 7n - 3}$.
- (2) $a_n = \frac{\sin n}{n}$.

$$(3) \ a_n = \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}, \text{ όπου } 0 \leq a \leq b \leq c.$$

$$(4) \ a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

$$(5) \ a_n = \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n.$$

$$(6) \ a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$$

$$(7) \ a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (1) Έχουμε

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4n^2 - n + 2}{n^2 + 7n - 3} = \frac{n^2(4 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2})}{n^2(1 + \frac{7}{n} - \frac{3}{n^2})} \\ &= \frac{4 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{7}{n} - \frac{3}{n^2}} \rightarrow \frac{4}{1} = 4 \end{aligned}$$

(2) Επειδή

$$\frac{-1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

από το Θεώρημα Ισοσσυγκλινουσών Ακολουθιών, $\frac{\sin n}{n} \rightarrow 0$.

(3) Επειδή, όπου $0 \leq a \leq b \leq c$, έχουμε ότι

$$c \leq \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} \leq \sqrt[n]{3}c$$

Επιπλέον, $\sqrt[n]{3} \rightarrow 1$ και άρα από το Θεώρημα Ισοσσυγκλινουσών Ακολουθιών, έπεται ότι $\sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} \rightarrow c$.

(4) Είναι

$$\begin{aligned} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \end{aligned}$$

οπότε

$$0 < a_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

και άρα από το Θεώρημα Ισοσσυγκλινουσών Ακολουθιών, έπεται ότι $a_n \rightarrow 0$.

(5) Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2\right)^n \\ &= \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^2 \rightarrow e^2 \end{aligned}$$

αφού $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$.

(6) Έχουμε ότι $1 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα

$$1 < \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} < e$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε παίρνοντας n -οστές ρίζες,

$$1 < \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n < \sqrt[n]{e}$$

Επειδή $\sqrt[n]{e} \rightarrow 1$ για κάθε $a > 0$, από το Θεώρημα των Ισοσυγκλινουσών έπεται ότι $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \rightarrow 1$.

(7) Από την Ανισότητα Bernoulli έχουμε

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \geq 1 + n^2 \frac{1}{n} = 1 + n$$

και άρα $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \rightarrow +\infty$.

□

ΑΣΚΗΣΗ 2.15. Έστω $a > 0$. Επιλέγουμε $x_1 > \sqrt{a}$ και έστω (x_n) η ακολουθία που ορίζεται αναδρομικά από τον τύπο

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$$

Δείξτε τα εξής: (α) $x_n \geq \sqrt{a}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, (β) $\frac{a}{x_n} \leq x_{n+1} \leq x_n$ (γ) $x_n \rightarrow \sqrt{a}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (α) Από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου,

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) \geq \sqrt{x_n \cdot \frac{a}{x_n}} = \sqrt{a}$$

(β) Από το (α) έχουμε

$$x_n \geq \sqrt{a} \Rightarrow x_n^2 \geq a \Rightarrow x_n \geq \frac{a}{x_n}$$

και άρα επειδή ο x_{n+1} είναι ο μέσος όρος των x_n και $\frac{a}{x_n}$ θα πρέπει

$$\frac{a}{x_n} \leq x_{n+1} \leq x_n$$

(γ) Από το (β) έχουμε ότι η (x_n) είναι φθίνουσα. Επειδή είναι και κάτω φραγμένη (αφού $x_n > \sqrt{a}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$) θα είναι και συγκλίνουσα με

$x = \lim x_n \geq \sqrt{a} > 0$. Επιπλέον, η (x_{n+1}) είναι υποακολουθία της (x_n) και άρα $\lim x_{n+1} = x$. Άρα

$$x = \lim x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) \Rightarrow 2x = x + \frac{a}{x} \Rightarrow x = \frac{a}{x} \Rightarrow x^2 = a$$

Επειδή όπως είδαμε $x > 0$ έχουμε ότι $x = \sqrt{a}$. □

ΑΣΚΗΣΗ 2.16. Δείξτε ότι η ακολουθία $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ είναι γνησίως αύξουσα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για κάθε $n \geq 2$ έχουμε,

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{\frac{(n+1)^n}{n^n}}{\frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}}} \\ &= \frac{(n+1)^n (n-1)^{n-1}}{n^n n^{n-1}} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \\ &= \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \\ &> \left(1 - \frac{n}{n^2}\right) \cdot \frac{n}{n-1} \quad (\text{Ανισότητα Bernoulli}) \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n}{n-1} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n-1} = 1 \end{aligned}$$

□

ΑΣΚΗΣΗ 2.17. Δείξτε ότι η ακολουθία $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ είναι γνησίως φθίνουσα με $\lim b_n = e$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για κάθε $n \geq 2$ έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{b_{n-1}}{b_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\frac{n^n}{(n-1)^n}}{\frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}}} \\ &= \frac{n^{2n+1}}{(n^2-1)^n (n+1)} \\ &= \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} \\ &> \left(1 + \frac{n}{n^2-1}\right) \cdot \frac{n}{n+1} \quad (\text{Ανισότητα Bernoulli}) \\ &= \frac{(n^2-1+n)n}{(n^2-1)(n+1)} = \frac{n^3-n+n^2}{n^3-n+n^2-1} > 1 \end{aligned}$$

και άρα η (b_n) είναι γνησίως φθίνουσα. Παρατηρούμε επίσης ότι

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow e \cdot 1 = e.$$

□

ΑΣΚΗΣΗ 2.18. ($\uparrow$ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2.16, 2.17) (α) Δείξτε ότι

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < e < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(β) Δείξτε ότι

$$\frac{(n+1)^n}{n!} < e^n < \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}$$

Ισοδύναμα, έχουμε την εξής προσέγγιση του $n!$,

$$\frac{(n+1)^n}{e^n} < n! < \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Ισοδύναμα, έχουμε την εξής προσέγγιση του $n!$,

$$\frac{(n+1)^n}{e^n} < n! < \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (α) Η ακολουθία

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

είναι γνησίως αύξουσα (Άσκηση 2.16) και συγκλίνει στο e και άρα

$$a_n < e \Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^n < e \quad (2.6)$$

Ομοίως η ακολουθία

$$b_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

είναι γνησίως φθίνουσα και συγκλίνει στον e (δες Άσκηση 2.17) και άρα

$$e < b_n \Leftrightarrow e < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \quad (2.7)$$

Από (2.6) και (2.7) προκύπτει το ζητούμενο.

(β) Από το (α) παίρνουμε

$$\frac{2}{1} < e < \left(\frac{2}{1}\right)^2$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 < e < \left(\frac{3}{2}\right)^3$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^3 < e < \left(\frac{4}{3}\right)^4$$

...

...

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < e < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη, έχουμε

$$\frac{2}{1} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdots \left(\frac{n+1}{n}\right)^n < e^n < \left(\frac{2}{1}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^4 \cdots \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

οπότε

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdots \frac{(n+1)^n}{n} < e^n < \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdots \frac{(n+1)^{n+1}}{n}$$

ή

$$\frac{(n+1)^n}{n!} < e^n < \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}$$

□

ΑΣΚΗΣΗ 2.19. Έστω (a_n) ακολουθία και $0 < \theta < 1$ τέτοια ώστε

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \theta |a_n - a_{n-1}| \quad (2.8)$$

για κάθε $n \geq 2$. Δείξτε τα εξής:

(α) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \theta^{n-1} |a_2 - a_1| \quad (2.9)$$

(β) Για κάθε $n, k \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι

$$|a_{n+k} - a_n| \leq \frac{\theta^{n-1}}{1-\theta} |a_2 - a_1| \quad (2.10)$$

(γ) Η (a_n) είναι Cauchy και άρα συγκλίνουσα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Με επαγωγή: Για $n = 1$ η (2.9) είναι τετριμμένη. Έστω τώρα ότι η (2.9) ισχύει για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι τότε ισχύει και για “ $n = n + 1$ ”. Πράγματι,

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \stackrel{(2.8)}{\leq} \theta |a_n - a_{n-1}| \stackrel{(2.9)}{\leq} \theta \cdot \theta^{n-1} |a_2 - a_1| = \theta^n |a_2 - a_1|$$

(β) Χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα, την (2.9) και την ταυτότητα $1 + \dots + \theta^{k-1} = \frac{1 - \theta^k}{1 - \theta}$, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} |a_{n+k} - a_n| &\leq |a_{n+k} - a_{n+k-1}| + |a_{n+k-1} - a_{n+k-2}| + \dots + |a_{n+1} - a_n| \\ &\leq (\theta^{n+k-2} + \dots + \theta^{n-1}) |a_2 - a_1| \\ &= (\theta^{m-n-1} + \dots + 1) \theta^{n-1} |a_2 - a_1| \\ &= \frac{1 - \theta^k}{1 - \theta} \theta^{n-1} |a_2 - a_1| \\ &\leq \frac{\theta^{n-1}}{1 - \theta} |a_2 - a_1| \end{aligned}$$

(γ) Αν $a_1 = a_2$, από το (β) έπεται ότι η (a_n) είναι σταθερή και άρα τετρισμένη είναι Cauchy.

Υποθέτουμε για την συνέχεια ότι $a_1 \neq a_2$. Από το (β), για $m = n + k$ έχουμε

$$|a_m - a_n| \leq c\theta^n \quad (2.11)$$

όπου $c = \theta^{-1}(1 - \theta)^{-1}|a_2 - a_1|$. Επειδή $0 < \theta < 1$ έχουμε ότι $\theta^n \rightarrow 0$. Άρα αν $\epsilon > 0$ τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\theta^n < \epsilon/c$ και συνεπώς από την (2.11),

$$|a_m - a_n| \leq c \frac{\epsilon}{c} = \epsilon$$

για όλα τα $m > n \geq n_0$. Άρα η (a_n) είναι Cauchy. $\square$

ΑΣΚΗΣΗ 2.20. Έστω η ακολουθία (a_n) με $a_1 = 1$ και $a_{n+1} = \frac{1}{3 + a_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η (a_n) συγκλίνει και βρείτε το όριό της.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Προφανώς $a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$. Επίσης $\forall n \geq 2$ έχουμε

$$|a_{n+1} - a_n| = \left| \frac{1}{3 + a_n} - \frac{1}{3 + a_{n-1}} \right| = \frac{|a_n - a_{n-1}|}{(3 + a_n)(3 + a_{n-1})} \leq \frac{1}{9} \cdot |a_n - a_{n-1}|.$$

Συνεπώς από την Άσκηση 2.19 η ακολουθία (a_n) είναι Cauchy και άρα συγκλίνει. Έστω $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \frac{1}{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n} \Rightarrow a = \frac{1}{3 + a} \Rightarrow a = \frac{-3 + \sqrt{13}}{3}$$

$\square$

Κεφάλαιο 3

Συνεχείς Συναρτήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 3.1. (α) Βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την σχέση $f^2(x) = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την σχέση $f^2(x) = x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είτε $f(x) = 1$ ή $f(x) = -1$. Άρα η f είναι μια συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ που παίρνει το πολύ δύο τιμές. Από το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών η f δεν μπορεί να λαμβάνει και τις δύο τιμές γιατί τότε θα υπήρχε $x \in \mathbb{R}$ με $f(x) = 0$, άτοπο. Άρα είτε $f(x) = 1$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ είτε $f(x) = -1$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή όλες οι συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την σχέση $f^2(x) = x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι δύο:

Η σταθερή $f_1 = 1$ και η σταθερή $f_2 = -1$

(β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f^2(x) - x^2 = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = |x|$. Ειδικότερα, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ και άρα, από Θεώρημα Ενδιάμεσων τιμών, η f διατηρεί πρόσημο στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι όλες οι συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την σχέση $f^2(x) = x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι οι εξής τέσσερις:

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = -x, \quad f_3(x) = |x|, \quad f_4(x) = -|x|$$

□

ΑΣΚΗΣΗ 3.2. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση.

(α) Αν $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ δείξτε ότι υπάρχει $\theta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) \geq \theta$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αντίστοιχα, αν $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ δείξτε ότι υπάρχει $\theta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) \leq -\theta$ για κάθε $x \in [a, b]$.

(β) Αν $|f(x)| > 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ δείξτε ότι υπάρχει $\theta > 0$ τέτοιο ώστε ακριβώς ένα από τα παρακάτω ενδεχόμενα συμβαίνει: Είτε 1) $f(x) \geq \theta$ για κάθε $x \in [a, b]$, ή 2) $f(x) \leq -\theta$ για κάθε $x \in [a, b]$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (α) Αν $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ τότε αφού η f είναι συνεχής στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a, b]$ θα πρέπει να λαμβάνει ελάχιστη τιμή.

Δηλαδή, υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ τέτοιο ώστε $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αν $\theta = f(x_0) > 0$ έχουμε το ζητούμενο. Όμοια για $f(x_0) < 0$.

(β) Αφού $|f(x)| > 0$ έπεται ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Άρα η f θα διατηρεί πρόσημο, διότι διαφορετικά, από Θεώρημα Bolzano, θα υπήρχε σημείο που θα μηδενιζόταν. Άρα είτε $f(x) > 0$ για όλα τα $x \in [a, b]$ είτε $f(x) < 0$ για όλα τα $x \in [a, b]$ και το συμπέρασμα έπεται από το (α) ερώτημα. $\square$

ΑΣΚΗΣΗ 3.3. (α) Αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής με $f(q) = 0$ για κάθε $q \in \mathbb{Q}$, δείξτε ότι $f = 0$.

(β) Αν $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς με $f(q) = g(q)$ για κάθε $q \in \mathbb{Q}$, δείξτε ότι $f = g$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (α) Έστω $x \in \mathbb{R}$. Τότε λόγω πυκνότητας του $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$, υπάρχει ακολουθία ρητών (x_n) με $x_n \rightarrow x$. Αφού η f είναι συνεχής, από Αρχή Μεταφοράς θα έχουμε ότι $f(x_n) \rightarrow f(x)$. Όμως, αφού $f(x_n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θα έχουμε ότι $f(x) = 0$. Συνεπώς, $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Θεωρούμε την $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $h(x) = f(x) - g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και εφαρμόζουμε το (α). $\square$

ΑΣΚΗΣΗ 3.4. (α) Έστω $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις και $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ f_2(x), & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}.$$

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(1) $f_1(x_0) = f_2(x_0)$.

(2) Η f είναι συνεχής στο x_0 .

(β) Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ x^2, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$$

Βρείτε τα σημεία συνέχειας της f .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (α) (1) $\Rightarrow$ (2): Έστω ότι $f_1(x_0) = f_2(x_0)$ και άρα

$$f(x_0) = f_1(x_0) = f_2(x_0) \quad (3.1)$$

ανεξάρτητα αν το x_0 είναι ρητός ή άρρητος.

Θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της συνέχειας για να δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 , δηλαδή για κάθε $\epsilon > 0$ θα βρούμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \text{ αν } |x - x_0| < \delta \quad (3.2)$$

Έστω $\epsilon > 0$. Αφού η $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής, υπάρχει $\delta_1 > 0$ τέτοιο ώστε

$$|f_1(x) - f_1(x_0)| < \epsilon \text{ αν } |x - x_0| < \delta_1 \quad (3.3)$$

Ομοίως, αφού η f_2 είναι συνεχής θα υπάρχει $\delta_2 > 0$ τέτοιο ώστε

$$|f_2(x) - f_2(x_0)| < \epsilon \text{ αν } |x - x_0| < \delta_2 \quad (3.4)$$

Θέτουμε $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ και ισχυριζόμαστε ότι ικανοποιεί την (3.2). Πράγματι, έστω $x \in \mathbb{R}$ με $|x - x_0| < \delta$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για τον x :

Περίπτωση 1: Ο x είναι ρητός. Τότε $f(x) = f_1(x)$ και άρα επειδή $\delta \leq \delta_1$, από τις (3.1) και (3.3), έπεται ότι $|f(x) - f(x_0)| = |f_1(x) - f_1(x_0)| < \epsilon$.

Περίπτωση 2: Ο x είναι άρρητος. Τότε $f(x) = f_2(x)$ και άρα επειδή $\delta \leq \delta_2$, από τις (3.1) και (3.4), έπεται ότι $|f(x) - f(x_0)| = |f_2(x) - f_2(x_0)| < \epsilon$.

Άρα η (3.2) ικανοποιείται και η f είναι συνεχής στο x_0 .

(2) $\Rightarrow$ (1): Έστω ότι η f είναι συνεχής στο x_0 . Έστω (x_n) και (y_n) δύο ακολουθίες από ρητούς και άρρητους αντίστοιχα τέτοιες ώστε $\lim x_n = \lim y_n = x_0$. Από Αρχή Μεταφοράς, έχουμε ότι

$$f_1(x_0) = \lim f_1(x_n) = \lim f(x_n) = f(x_0) = \lim f(y_n) = \lim f_2(x_n) = f_2(x_0)$$

(β) Από το (α) έχουμε ότι τα σημεία συνέχειας της f θα είναι οι λύσεις της εξίσωσης $x^2 = x$. Άρα τα σημεία συνέχειας της f είναι τα σημεία $x_1 = 0$ και $x_2 = 1$. $\square$

ΑΣΚΗΣΗ 3.5. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) > 0$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ στο οποίο η f λαμβάνει μέγιστη τιμή.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Γνωρίζουμε ότι για $\ell \in \mathbb{R}$ και $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists c \in \mathbb{R} : x < c \Rightarrow \ell - \epsilon < f(x) < \ell + \epsilon$$

και άρα αφού $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ τότε (για $\ell = 0$ και για $\epsilon = f(0) > 0$) έχουμε ότι υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$x < c \Rightarrow f(x) < f(0) \quad (3.5)$$

Ομοίως,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists C \in \mathbb{R} : x > C \Rightarrow \ell - \epsilon < f(x) < \ell + \epsilon$$

και άρα αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ έχουμε ότι για $\epsilon = f(0)$ υπάρχει $C \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$x > C \Rightarrow f(x) < f(0) \quad (3.6)$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $c < 0 < C$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[c, C]$ λαμβάνει μέγιστη τιμή, δηλαδή υπάρχει $x_0 \in [c, C]$ τέτοιο ώστε

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in [c, C] \quad (3.7)$$

Ειδικότερα, αφού $0 \in [c, C]$,

$$f(0) \leq f(x_0)$$

και άρα από τις (3.5)–(3.7) έπεται ότι $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συνεπώς η f παρουσιάζει μέγιστο στο x_0 . $\square$

ΑΣΚΗΣΗ 3.6. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ φθίνουσα συνάρτηση. Αν $g(x) = f(x) - x$ δείξτε ότι η g είναι φθίνουσα και $g(x) \cdot g(f(x)) \leq 0$, για όλα τα $x \in \mathbb{R}$.

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ φθίνουσα και συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι η f έχει μοναδικό σταθερό σημείο, δηλαδή υπάρχει μοναδικό $x \in \mathbb{R}$ με $f(x) = x$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (α) Η $g(x) = f(x) - x = f(x) + (-x)$ είναι φθίνουσα ως άθροισμα φθίνουσων συναρτήσεων. Έστω τώρα ένα $x \in \mathbb{R}$. Αν $x \geq f(x)$, τότε αφού η f είναι φθίνουσα θα έχουμε $f(x) \leq f(f(x))$ και άρα $g(f(x)) = f(f(x)) - f(x) \geq 0$. Επίσης, επειδή $x \geq f(x)$ θα έχουμε ότι $g(x) = f(x) - x \leq 0$ και άρα $g(x) \cdot g(f(x)) \leq 0$. Όμοια, για $x \leq f(x)$ θα είναι $g(f(x)) \leq 0$ και $g(x) \geq 0$. Συνεπώς, $g(x) \cdot g(f(x)) \leq 0$, για κάθε $x \in [a, b]$.

(β) Παρατηρούμε ότι η f έχει το πολύ ένα σταθερό σημείο, αφού αν υπήρχαν δύο σταθερά σημεία, έστω $x_1 < x_2$, επειδή η f είναι φθίνουσα θα είχαμε $x_1 = f(x_1) \geq f(x_2) = x_2$, άτοπο. Επίσης παρατηρούμε ότι ένα $x \in \mathbb{R}$ είναι σταθερό σημείο για την f αν και μόνο αν $g(x) = f(x) - x = 0$ και άρα αρκεί να δείξουμε ότι η g μηδενίζεται σε κάποιο $x \in \mathbb{R}$. Πράγματι, αν αυτό δεν συμβαίνει, τότε λόγω συνέχειας, η g θα διατηρεί πρόσημο. Ειδικότερα, θα είχαμε $g(x)g(f(x)) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, άτοπο από το (α). $\square$

ΑΣΚΗΣΗ 3.7. Μια συνάρτηση $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I διάστημα του $\mathbb{R}$ καλείται *Lipschitz* αν υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$$

για όλα τα $x, y \in I$.

(α) Δείξτε ότι κάθε *Lipschitz* συνάρτηση είναι συνεχής.

(β) Αν f παραγωγίσιμη με φραγμένη παράγωγο δείξτε ότι η f είναι *Lipschitz*.

(γ) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$ δεν είναι *Lipschitz*.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (α) Έστω $x_0 \in I$ και $\epsilon > 0$. Θέτουμε $\delta = \epsilon/C$. Τότε

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < C|x - x_0| < \epsilon$$

(β) Έστω $|f'(x)| \leq C$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $x, y \in I$ με $x \neq y$, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού, υπάρχει ξ μεταξύ των x και y τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\xi) &\Rightarrow \left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| = |f'(\xi)| \leq C \\ &\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq C|x - y| \end{aligned}$$

(γ) Έστω προς απαγωγή σε άτοπο, ότι υπάρχει $C > 0$ τέτοιο ώστε $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq C|x - y|$, για κάθε $x, y \geq 0$. Ειδικότερα, αν $y = 0$ τότε

$$\sqrt{x} \leq Cx \Rightarrow x \leq C^2 x^2 \Rightarrow \frac{1}{C^2} \leq x \text{ για κάθε } x > 0,$$

που φυσικά είναι αδύνατον (πχ. $x = \frac{1}{2C^2}$). □

ΑΣΚΗΣΗ 3.8. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ και $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ αν $x \neq 0$.

(1) Θεωρώντας γνωστό ότι η συνάρτηση $\sin x$ είναι συνεχής, δείξτε ότι η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ ενώ είναι συνεχής για κάθε $x \neq 0$.

(2) Δείξτε ότι η f έχει την ιδιότητα των Ενδιάμεσων Τιμών, δηλαδή αν $a \neq b$ με $f(a) \neq f(b)$ τότε για κάθε η μεταξύ των $f(a)$ και $f(b)$ υπάρχει ξ μεταξύ των a και b με $f(\xi) = \eta$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (1) Για $x \neq 0$, η f είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Για $x = 0$, παρατηρούμε ότι οι ακολουθίες $x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$ και $y_n = \frac{1}{2n\pi - \frac{\pi}{2}}$ συγκλίνουν στο 0, ενώ $\sin \frac{1}{x_n} = \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1$ και $\sin \frac{1}{y_n} = \sin(2n\pi - \frac{\pi}{2}) = -1$. Από Αρχή Μεταφοράς η f δεν μπορεί να είναι συνεχής στο 0.

(2) Αν $0 < a < b$ ή $a < b < 0$ τότε η f έχει προφανώς την ιδιότητα των ενδιάμεσων τιμών αφού είναι συνεχής στο $[a, b]$. Αν τώρα $a < 0 < b$, τότε αφού η ακολουθίες (x_n) και (y_n) του προηγούμενου ερωτήματος είναι μηδενικές, θα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $0 < \frac{1}{2n_0\pi + \frac{\pi}{2}} < \frac{1}{2n_0\pi - \frac{\pi}{2}} < b$. Παρατηρούμε ότι η f είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\frac{1}{2n_0\pi + \frac{\pi}{2}}, \frac{1}{2n_0\pi - \frac{\pi}{2}} \right]$ με $f(\frac{1}{2n_0\pi + \frac{\pi}{2}}) = 1$ και $f(\frac{1}{2n_0\pi - \frac{\pi}{2}}) = -1$. Επομένως, ως συνεχής συνάρτηση

στο διάστημα αυτό, από την ιδιότητα των ενδιαμέσων τιμών θα παίρνει όλες τις ενδιαμέσες τιμές μεταξύ του -1 και 1 . Δουλεύουμε ανάλογα για τις περιπτώσεις όπου $a = 0$ ή $b = 0$.

□

ΑΣΚΗΣΗ 3.9. Έστω $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}$ και $x_0 \in X$. Δείξτε ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα.

- (1) Η f είναι συνεχής στο x_0 .
- (2) Για κάθε ακολουθία (x_n) στο X με $x_n \rightarrow x_0$ η ακολουθία $(f(x_n))$ είναι συγκλίνουσα.
- (3) Για κάθε ακολουθία (x_n) στο X με $x_n \rightarrow x_0$ η ακολουθία $(f(x_n))$ είναι *Cauchy*.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (1) $\Rightarrow$ (2): Αφού η f είναι συνεχής στο x_0 , για κάθε ακολουθία (x_n) στο X με $x_n \rightarrow x_0$, από Αρχή Μεταφοράς η ακολουθία $(f(x_n))$ είναι συγκλίνουσα και μάλιστα στο $f(x_0)$.

(2) $\Leftrightarrow$ (3): Όπως είναι γνωστό μια ακολουθία πραγματικών αριθμών είναι συγκλίνουσα αν και μόνο αν είναι *Cauchy*. Άρα η πρόταση ότι για κάθε ακολουθία (x_n) στο X με $x_n \rightarrow x_0$ η ακολουθία $(f(x_n))$ είναι συγκλίνουσα, είναι ισοδύναμη με την πρόταση ότι για κάθε ακολουθία (x_n) στο X με $x_n \rightarrow x_0$ η ακολουθία $(f(x_n))$ είναι *Cauchy*.

(2) $\Rightarrow$ (1): Υποθέτουμε ότι για κάθε ακολουθία (x_n) στο X με $x_n \rightarrow x_0$ η ακολουθία $(f(x_n))$ είναι συγκλίνουσα. Θα δείξουμε ότι η υπόθεση αυτή δίνει ότι για κάθε ακολουθία (x_n) στο X με $x_n \rightarrow x_0$ η ακολουθία $(f(x_n))$ είναι συγκλίνουσα στο $f(x_0)$ και άρα από Αρχή Μεταφοράς η f είναι συνεχής στο x_0 .

Πράγματι, έστω μια οποιαδήποτε ακολουθία (x_n) στο X με $x_n \rightarrow x_0$. Θα δείξουμε ότι $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$. Για τον σκοπό αυτόν σχηματίζουμε την ακολουθία $(\tilde{x}_n)$ με $\tilde{x}_{2n} = x_0$ και $\tilde{x}_{2n-1} = x_n$. Έχουμε ότι $\tilde{x}_n \rightarrow x_0$ αφού οι υπακολουθίες των άρτιων και των περιττών όρων της συγκλίνουν στο x_0 (Άσκηση 2.6). Άρα από την υπόθεσή μας θα πρέπει η $f(\tilde{x}_n)$ να είναι συγκλίνουσα και συνεπώς κάθε υπακολουθία της $(f(\tilde{x}_n))$ θα πρέπει να συγκλίνει στο ίδιο όριο με αυτήν. Ειδικότερα,

$$\lim f(\tilde{x}_{2n-1}) = \lim f(\tilde{x}_{2n}) \quad (3.8)$$

Όμως $\tilde{x}_{2n-1} = x_n$ και $\tilde{x}_{2n} = x_0$, οπότε η (3.8) δίνει

$$\lim f(x_n) = \lim f(x_0) = f(x_0)$$

□

ΑΣΚΗΣΗ 3.10. Εξετάστε αν ισχύει η όχι ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ μεταφέρει *Cauchy* ακολουθίες του X σε *Cauchy* ακολουθίες του $\mathbb{R}$ όταν
(1) $X = (0, 1)$, (2) $X = \mathbb{R}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (1) Λάθος, πχ. η $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι συνεχής στο $X = (0, 1)$. Η ακολουθία $x_n = \frac{1}{n+1}$ είναι μια ακολουθία στο $(0, 1)$ που συγκλίνει στο $0 \notin X$ και άρα είναι Cauchy ως συγκλίνουσα. Όμως $f(x_n) = n+1 \rightarrow +\infty$ και άρα η $(f(x_n))$ δεν είναι Cauchy γιατί δεν είναι συγκλίνουσα.

(2) Σωστό. Πράγματι, έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και έστω (x_n) μια οποιαδήποτε Cauchy ακολουθία του $\mathbb{R}$. Τότε υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ με $x_n \rightarrow x_0$ και επειδή η f είναι συνεχής, από Αρχή Μεταφοράς, η $f(x_n)$ είναι συγκλίνουσα άρα και Cauchy. $\square$

ΑΣΚΗΣΗ 3.11. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που έχει την ιδιότητα των Ενδιάμεσων Τιμών (δείτε Άσκηση 3.8 για τον ορισμό) Αν για κάθε $y \in \mathbb{R}$ το σύνολο $f^{-1}[y] = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = y\}$ είναι πεπερασμένο δείξτε ότι η f είναι συνεχής.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Έστω $\epsilon > 0$. Έστω

$$f^{-1}[f(x_0) + \epsilon] \cup f^{-1}[f(x_0) - \epsilon] = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

και έστω

$$\delta = \min\{|x_0 - x_i| : i = 1, \dots, n\}$$

Από την επιλογή του δ έχουμε ότι $x_i \notin (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ για κάθε $i = 1, \dots, n$. Επειδή τα $x_1, \dots, x_n$ είναι τα μοναδικά σημεία του $\mathbb{R}$ στα οποία η f λαμβάνει τις τιμές $f(x_0) \pm \epsilon$ έπεται ότι

$$f(x) \neq f(x_0) \pm \epsilon \text{ για κάθε } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad (3.9)$$

Ισχυριζόμαστε τώρα ότι

$$f(x) \in (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$$

για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Πράγματι, αν υπήρχε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ με $f(x) > f(x_0) + \epsilon$ τότε αφού η f έχει την ιδιότητα των ενδιάμεσων τιμών θα υπήρχε ξ μεταξύ των x και x_0 και άρα $\xi \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = f(x_0) + \epsilon$, άτοπο από την (3.9). Ομοίως αν υπήρχε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ με $f(x) < f(x_0) - \epsilon$, από την ιδιότητα των ενδιάμεσων τιμών, θα υπήρχε $\xi \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = f(x_0) - \epsilon$, άτοπο από την (3.9). Επομένως, $f(x) \in (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$ το οποίο σημαίνει ότι η f είναι συνεχής στο x_0 . $\square$

ΑΣΚΗΣΗ 3.12. Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ θα καλείται 2-1 αν παίρνει κάθε τιμή της ακριβώς δύο φορές. Δείξτε ότι δεν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που να είναι 2-1.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2-1 και συνεχής συνάρτηση. Έστω $m \in f[R]$ και έστω $a < b$ τα δύο μοναδικά σημεία του $\mathbb{R}$ με $f(a) = f(b) = m$. Παρατηρείστε ότι ακριβώς ένα από τα επόμενα συμβαίνει: είτε (1) $m = \min\{f(x) : x \in [a, b]\}$ είτε (2) $m = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Πράγματι αν η f έπαιρνε στο (a, b) τιμές εκατέρωθεν του m , τότε από το Θεώρημα ενδιάμεσων Τιμών θα ξανάέπαιρνε την τιμή m ακόμα μια φορά κάπου ενδιάμεσα των a, b , άτοπο. Ας υποθέσουμε ότι $m = \min\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Έστω $M = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Τότε $m < M$ γιατί αλλιώς η f θα ήταν σταθερά στο $[a, b]$ άτοπο αφού είναι 2-1. Έστω $c < d$ τα μοναδικά σημεία με $f(c) = f(d) = M$. Διακρίνοντας περιπτώσεις για τις σχετικές θέσεις των a, b, c, d και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα των ενδιάμεσων Τιμών και της λήψης ακρότατων τιμών σε φραγμένα κλειστά διαστήματα καταλήγουμε σε άτοπο. $\square$

Παράγωγος

ΑΣΚΗΣΗ 4.1. Αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ δείξτε ότι η f είναι γνησίως μονότονη. Ισχύει το αντίστροφο?

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. α' τρόπος: Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής έχουμε καταρχάς ότι η f είναι 1-1 (Πράγματι, έστω $x_1 \neq x_2$. Τότε, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει ξ μεταξύ των x_1, x_2 με $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(\xi)$ και άρα, αφού $f'(\xi) \neq 0$ έπεται ότι $f(x_1) \neq f(x_2)$). Τώρα από γνωστό Θεώρημα η f ως συνεχής και 1-1 είναι γνησίως μονότονη.

β' τρόπος: Από το Θεώρημα Darboux (που λέει ότι η παράγωγος μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης ικανοποιεί την ιδιότητα των ενδιάμεσων τιμών), έπεται ότι αν η f' δεν μηδενίζεται τότε θα διατηρεί πρόσημο. Άρα είτε $f'(x) > 0$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα ή $f'(x) < 0$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Το αντίστροφο δεν ισχύει. Πχ. η $f(x) = x^3$ είναι γνησίως μονότονη αλλά $f'(0) = 0$. $\square$

ΑΣΚΗΣΗ 4.2. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Αν η f' είναι μη σταθερή συνάρτηση δείξτε ότι λαμβάνει και ρητές και άρρητες τιμές.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αφού η f' είναι μη σταθερή υπάρχουν $x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}$ με $f'(x_1) \neq f'(x_2)$. Έστω $a = f'(x_1)$ και $b = f'(x_2)$. Από Θεώρημα Darboux η f' έχει την ιδιότητα των ενδιάμεσων τιμών, δηλαδή η f' λαμβάνει όλες τις τιμές μεταξύ των a και b . Από την πυκνότητα των αρρήτων στο $\mathbb{R}$ μεταξύ των a και b υπάρχουν (άπειροι) ρητοί και (άπειροι) άρρητοι και άρα η f' λαμβάνει (άπειρες) ρητές και (άπειρες) άρρητες τιμές. $\square$

ΑΣΚΗΣΗ 4.3. Βρείτε όλες τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f'(x) \in \mathbb{N}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν η f' λαμβάνει δύο διαφορετικές τιμές, τότε θα λαμβάνει και τιμές εκτός του $\mathbb{N}$ αφού ικανοποιεί την ιδιότητα των ενδιάμεσων τιμών (Θεώρημα Darboux). Άρα αν $f'(x) \in \mathbb{N}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θα πρέπει $f'(x) = n_0$ για κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$ και για όλα τα $x \in \mathbb{R}$. Άρα $f(x) = n_0x + c$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. $\square$

ΑΣΚΗΣΗ 4.4. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \leq 0 \\ -x + 1, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

Δείξτε ότι δεν υπάρχει $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $F' = f$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Κάνοντας την γραφική παράσταση της f βλέπουμε ότι η f δεν ικανοποιεί την ιδιότητα των ενδιάμεσων τιμών, πχ. $f(0) = 0$, $f(1/2) = 1/2$ και δεν υπάρχει $x \in (0, 1/2)$ με $f(x) = 1/4$. Άρα, από Θεώρημα Darboux, δεν μπορεί η f να είναι η παράγωγος κάποιας συνάρτησης. $\square$

ΑΣΚΗΣΗ 4.5. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$. Αν το $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ υπάρχει δείξτε ότι η παράγωγος της f ορίζεται και στο x_0 και $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Από τον ορισμό της Παραγώγου στο x_0 ,

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Επειδή η f είναι συνεχής το παραπάνω όριο είναι απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$. Εφαρμόζοντας τον Κανόνα Hospital έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) - f(x_0))'}{(x - x_0)'} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$$

Άρα, $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$. $\square$

ΑΣΚΗΣΗ 4.6. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$, αν $x \neq 0$ με $f(0) = 0$ είναι παραγωγίσιμη και το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ δεν υπάρχει.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για κάθε $x \neq 0$ έχουμε $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \left(\cos \frac{1}{x} \right) \left(-\frac{1}{x^2} \right) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$. Επίσης για $x = 0$ έχουμε

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

(από Θεώρημα Παρεμβολής, αφού $-x \leq x \sin \frac{1}{x} \leq x$). Τέλος, για να διαπιστώσουμε ότι το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right)$$

δεν υπάρχει, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Αρχή Μεταφοράς θεωρώντας τις ακολουθίες $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ και $y_n = \frac{1}{2n\pi + \pi}$. Έχουμε $x_n, y_n \neq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ και $\lim_{n \rightarrow \infty} f'(x_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f'(y_n)$ αφού $f(x_n) = -1$ και $f(y_n) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. $\square$

ΑΣΚΗΣΗ 4.7. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Αν η f' δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 δείξτε ότι ένα τουλάχιστον από τα δύο πλευρικά όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)$ δεν υπάρχει.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω προς απαγωγή σε άτοπο ότι η f' δεν είναι συνεχής στο x_0 αλλά τα πλευρικά όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)$ υπάρχουν. Από τον ορισμό της $f'(x_0)$ έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Άρα από κανόνα Hospital,

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{(f(x) - f(x_0))'}{(x - x_0)'} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$$

Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)$. Άρα

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = f'(x_0)$$

δηλαδή η f' είναι συνεχής στο x_0 , άτοπο. $\square$

ΑΣΚΗΣΗ 4.8. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε η $f''(x_0)$ υπάρχει. Δείξτε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + x) + f(x_0 - x) - 2f(x_0)}{x^2} = f''(x_0) \quad (4.1)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Λόγω συνέχειας της f το όριο στην (4.1) είναι απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$. Εφαρμόζοντας τον Κανόνα Hospital έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + x) + f(x_0 - x) - 2f(x_0)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[f(x_0 + x) + f(x_0 - x) - 2f(x_0)]'}{(x^2)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + x) - f'(x_0 - x)}{2x} \end{aligned}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + x) - f'(x_0 - x)}{2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + x) - f'(x_0) + f'(x_0) - f'(x_0 - x)}{2x} \\ &= \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + x) - f'(x_0)}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0) - f'(x_0 - x)}{-x} \right) \\ &= \frac{1}{2} (f''(x_0) + f''(x_0)) = f''(x_0) \end{aligned}$$

$\square$

ΑΣΚΗΣΗ 4.9. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη. Αν η f και η f'' είναι φραγμένες δείξτε ότι και η f' είναι φραγμένη.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $M_0, M_2 > 0$ τέτοια ώστε $|f(x)| \leq M_0$ και $|f''(x)| \leq M_2$. Με χρήση του Τύπου Taylor θα δείξουμε ότι

$$|f'(x)| \leq 2M_0 + \frac{M_2}{2}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Πράγματι, έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Από τον Τύπο του Taylor έχουμε ότι για κάθε $x \neq x_0$ υπάρχει υπάρχει ξ μεταξύ των x_0 και x τέτοιο ώστε

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2$$

Άρα για $x = x_0 + 1$ έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (x_0, x_0 + 1)$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0 + 1) = f(x_0) + f'(x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}$$

ισοδύναμα,

$$f'(x_0) = f(x_0 + 1) - f(x_0) - \frac{f''(\xi)}{2}$$

Συνεπώς

$$|f'(x_0)| \leq |f(x_0 + 1)| + |f(x_0)| + \frac{|f''(\xi)|}{2} \leq 2M_0 + \frac{M_2}{2}.$$

□

ΑΣΚΗΣΗ 4.10. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = 0$, $f'(0) = 2$ και $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$. Δείξτε ότι υπάρχουν $\xi_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ και $\xi_2 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1) = f''(\xi_2)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Από τον τύπο Taylor έχουμε ότι για κάθε $x, x_0 \in [0, 1]$ με $x \neq x_0$ υπάρχει ξ γνήσια μεταξύ των x_0, x τέτοιο ώστε

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!} \cdot (x - x_0)^2. \quad (4.2)$$

Έστω $x = 1/2$. Τότε για $x_0 = 0$ έχουμε ότι υπάρχει $\xi_1 \in (0, 1/2)$ με

$$f(1/2) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot \frac{1}{2} + \frac{f''(\xi_1)}{2!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{f''(\xi_1)}{8}$$

Ομοίως για $x_0 = 1$ υπάρχει $\xi_2 \in (1/2, 1)$

$$f(1/2) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right) + \frac{f''(\xi_2)}{2!} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 = 1 + \frac{f''(\xi_2)}{8}$$

Άρα $f(1/2) = 1 + \frac{f''(\xi_1)}{8} = 1 + \frac{f''(\xi_2)}{8}$ οπότε και $f''(\xi_1) = f''(\xi_2)$. □

ΑΣΚΗΣΗ 4.11. (Αντίστροφο Θεώρημα Μέσης Τιμής) Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν $a < \xi < b$ με $f'(a) < f'(\xi) < f'(b)$ δείξτε ότι υπάρχουν $a < x_1 < x_2 < b$ με $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θα ακολουθήσουμε την μέθοδο της απόδειξης του Θεωρήματος Darboux.

Θέτουμε $\lambda = f'(\xi)$ και έστω $g(x) = f(x) - \lambda x$, για κάθε $x \in [a, b]$. Παρατηρούμε ότι για $x_1 \neq x_2$ στο $[a, b]$, $\frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \lambda$ και άρα αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχουν $x_1 < x_2$ στο (a, b) με $g(x_1) = g(x_2)$.

Αφού $f'(a) < \lambda < f'(b)$ έχουμε $g'(a) < 0 < g'(b)$.

Επειδή $g'(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} < 0$ έπεται ότι υπάρχει $\delta_1 > 0$ τέτοιο ώστε

$$0 < x - a < \delta_1 \Rightarrow \frac{g(x) - g(a)}{x - a} < 0 \Rightarrow g(x) < g(a) \quad (4.3)$$

Αντίστοιχα, επειδή $g'(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{g(x) - g(b)}{x - b} > 0$ έπεται ότι υπάρχει $\delta_2 > 0$ τέτοιο ώστε

$$0 < b - x < \delta_2 \Rightarrow \frac{g(x) - g(b)}{x - b} > 0 \Rightarrow g(x) < g(b) \quad (4.4)$$

Από την συνέχεια της g υπάρχει $\xi \in [a, b]$ με

$$g(\xi) = \min\{g(x) : x \in [a, b]\}$$

και από τις (4.3) και (4.4) συμπεραίνουμε ότι $\xi \neq a, b$. Άρα $g(\xi) < g(a)$ και $g(\xi) < g(b)$, ισοδύναμα $g(\xi) < m$ όπου $m = \min\{g(a), g(b)\}$. Έστω $\eta \in (g(\xi), m)$. Τότε $g(\xi) < \eta < g(a)$ και άρα από Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών υπάρχει $x_1 \in (a, \xi)$ με $g(x_1) = \eta$. Ομοίως $g(\xi) < \eta < g(b)$ και άρα υπάρχει $x_2 \in (\xi, b)$ με $g(x_2) = \eta$. Άρα υπάρχουν $x_1 < x_2$ στο (a, b) με $g(x_1) = g(x_2)$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. $\square$

ΑΣΚΗΣΗ 4.12. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, τρεις φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'''(x) = 12$ δείξτε ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $x^3 < f(x) < 3x^3$ για όλα τα $x > M$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ μπορούμε να εφαρμόσουμε επαναληπτικά τον κανόνα De l'Hospital για την συνάρτηση $\frac{f(x)}{x^3}$ ως εξής

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f''(x)}{6x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{(3)}(x)}{6} = 2$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^3} = 2$, που εξ ορισμού του ορίου συνάρτησης στο $+\infty$ σημαίνει ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε

$$x > M \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{x^3} - 2 \right| < \epsilon \Leftrightarrow 2 - \epsilon < \frac{f(x)}{x^3} < 2 + \epsilon$$

Τώρα για $\epsilon = 1$ έπεται το ζητούμενο. $\square$

ΑΣΚΗΣΗ 4.13. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με την δεύτερη παράγωγο συνεχή στο 0. Έστω ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) θετικών αριθμών με $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ και $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x_n) - x_n}{x_n^2} = 1$.

(i) Δείξτε ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x_n)}{x_n} = 1$ και $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = 0$.

(ii) Υπολογίστε τις τιμές $f(0)$ και $f'(0)$.

(iii) Χρησιμοποιώντας τον Τύπο Taylor υπολογίστε την $f''(0)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i) Έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{f(x_n) - x_n}{x_n^2} &= \frac{\frac{f(x_n)}{x_n} - 1}{x_n} \\ \Rightarrow \frac{f(x_n)}{x_n} - 1 &= x_n \cdot \frac{f(x_n) - x_n}{x_n^2} \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x_n)}{x_n} - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x_n) - x_n}{x_n^2} = 0 \end{aligned}$$

οπότε $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x_n)}{x_n} = 1$. Επίσης, $f(x_n) = \frac{f(x_n)}{x_n} \cdot x_n$ και άρα με όμοιο τρόπο έπεται ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = 0$.

(ii) Επειδή $x_n \rightarrow 0$ από Αρχή Μεταφοράς,

$$f(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = 0$$

και

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x_n)}{x_n} = 1$$

(iii) Από τον τύπο του Taylor (για $x = x_n$ και κέντρο $x_0 = 0$) έχουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $\xi_n \in (0, x_n)$ τέτοιο ώστε

$$f(x_n) = f(0) + f'(0)x_n + \frac{f''(\xi_n)}{2}x_n^2 = x_n + \frac{f''(\xi_n)}{2}x_n^2 \Rightarrow f''(\xi_n) = 2 \frac{f(x_n) - x_n}{x_n^2}$$

Αφού $0 < \xi_n < x_n$ και $x_n \rightarrow 0$ από Θεώρημα Ισοσυγκλινοσών Ακολουθιών, έπεται ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} \xi_n = 0$. Άρα, αφού η f'' είναι συνεχής, από Αρχή Μεταφοράς,

$$f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f''(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f''(\xi_n) = 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x_n) - x_n}{x_n^2} = 2$$

□