

ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
6ο Φυλλάδιο Ασκήσεων (υποδείξεις)

Ασκηση 1. Ελέγξτε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

$$(\alpha) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{k^k}, \quad (\beta) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}, \quad (\gamma) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}, \quad (\delta) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^k}{k^{k+1}}.$$

Υπόδειξη: (α) Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο λόγου. Είναι

$$\frac{\frac{2^{k+1}(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}}{\frac{2^k k!}{k^k}} = 2 \left(\frac{k}{k+1} \right)^k \rightarrow 2/e < 1,$$

και άρα η σειρά συγκλίνει.

(β) Η σειρά συγκλίνει από το κριτήριο για εναλλάσσουσες σειρές (κριτήριο Leibniz).

(γ) Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο συμπίκνωσης (η ακολουθία $\frac{1}{k \ln k}$ έχει θετικούς όρους και είναι φθίνουσα). Έχουμε ότι η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^k \ln(2^k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln 2)k}$$

αποκλίνει (αρμονική σειρά), άρα και η σειρά $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ αποκλίνει.

(δ) Έχουμε ότι

$$\frac{\frac{(k+1)^k}{k^{k+1}}}{\frac{1}{k}} = \left(1 + \frac{1}{k} \right)^k \rightarrow e > 0,$$

και άρα, από το κριτήριο ισοδύναμης συμπεριφοράς (η σύγκριση γίνεται με την αρμονική σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$), η σειρά αποκλίνει. $\square$

Ασκηση 2. Να προσδιορίσετε τα $x \in \mathbb{R}$, για τα οποία συγκλίνουν οι σειρές

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

και

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

Στη συνέχεια, γι' αυτά τα x , να βρείτε τα αθροίσματα των σειρών.

Υπόδειξη: Πρόκειται για γεωμετρικές σειρές με λόγο $-x^2$ και $-x$ αντίστοιχα. Συνεπώς συγκλίνουν για $|x| < 1$ με

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2} \text{ και } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}.$$

$\square$

Ασκηση 3. Έστω (α_n) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών.

(α) Αποδείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{2 + k^2 \alpha_k}$$

συγκλίνει.

(β) Αν υποθέσουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ αποκλίνει, να δείξετε ότι και η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{2 + \alpha_k}$$

αποκλίνει επίσης.

Υπόδειξη: (α) Έχουμε ότι

$$0 \leq \frac{\alpha_k}{2 + \alpha_k} \leq \frac{\alpha_k}{k^2 \alpha_k} = \frac{1}{k^2},$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και συνεπώς από το κριτήριο σύγκρισης, για σειρές με θετικούς όρους, έχουμε το συμπέρασμα.

(β) Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- η ακολουθία (α_k) είναι άνω φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M > 0$, τέτοιο ώστε $\alpha_k \leq M$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Τότε,

$$\frac{\alpha_k}{2 + \alpha_k} \geq \frac{\alpha_k}{2 + M},$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και συνεπώς από το κριτήριο σύγκρισης, για σειρές με θετικούς όρους, έχουμε το συμπέρασμα.

- η ακολουθία (α_k) δεν είναι άνω φραγμένη. Τότε υπάρχει υποακολουθία (α_{s_k}) της (α_k) με

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_{s_k} = +\infty.$$

Επομένως,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{s_k}}{2 + \alpha_{s_k}} = 1,$$

και άρα από το κριτήριο απόκλισης η δοσμένη σειρά αποκλίνει.

□

Άσκηση 4. (Εκτίμηση σφάλματος για εναλλάσσουσες σειρές)

(i) Έστω (α_n) μηδενική και φθίνουσα ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Αν υποθέσουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \alpha_k = S,$$

να δείξετε ότι

$$|S - s_n| \leq \alpha_{n+1}, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N},$$

όπου (s_n) η ακολουθία μερικών αθροισμάτων της παραπάνω εναλλάσσουσας σειράς.

(ii) Να προσδιορίσετε το άθροισμα S της σειράς

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}$$

με ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων.

Υπόδειξη: (i) Παρατηρούμε ότι η (s_{2k}) είναι αύξουσα και η (s_{2k+1}) είναι φθίνουσα. Επίσης, $s_{2k} \rightarrow S$ και $s_{2k+1} \rightarrow S$. Έπεται ότι:

- αν n άρτιος, τότε $S \leq s_{n+1}$ και άρα

$$S - s_n \leq s_{n+1} - s_n = \alpha_{n+1}.$$

- αν n περιττός, τότε $S \geq s_{n+1}$ και άρα

$$-(S - s_n) \leq -(s_{n+1} - s_n) = a_{n+1}.$$

Οπότε,

$$|S - s_n| \leq a_{n+1}, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

(ii) Αφού θέλουμε ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων, θα πρέπει το σφάλμα να είναι μικρότερο από $\frac{1}{1000}$. Επομένως, χρησιμοποιώντας την εκτίμηση από το (i) θα πρέπει να επιλέξουμε τον n έτσι ώστε

$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} < \frac{1}{1000}.$$

Με δοκιμές βρίσκουμε ότι αρκεί να θεωρήσουμε $n \geq 6$: σύμφωνα με το (i),

$$|S - s_6| \leq a_7 = \frac{1}{7!} < \frac{1}{1000}.$$

Άρα το $s_6 = 0,631944\dots$ συμπίπτει σε τουλάχιστον τρία δεκαδικά ψηφία με το άθροισμα S της σειράς και επομένως έχουμε ότι $S = 0,631$ με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων. $\square$

Άσκηση 5. Ορίζουμε μια ακολουθία (α_k) ως εξής: αν ο k είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού θέτουμε $\alpha_k = \frac{1}{k}$ και αν ο k δεν είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού θέτουμε $\alpha_k = \frac{1}{k^2}$. Εξετάστε αν συγκλίνει η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$.

Υπόδειξη: Η σειρά έχει θετικούς όρους. Για να δείξουμε ότι συγκλίνει, αρκεί να δείξουμε ότι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων είναι άνω φραγμένη. Παρατηρούμε ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned} s_{m^2} &= \sum_{k=1}^{m^2} \alpha_k = \sum_{k=1}^m \alpha_{k^2} + \sum_{\substack{1 \leq k \leq m^2 \\ k \neq s^2}} \alpha_k \\ &\leq \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{m^2} \frac{1}{k^2} \\ &\leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = M < +\infty. \end{aligned}$$

Αν $n \in \mathbb{N}$, τότε $s_n \leq s_{n^2} \leq M$. Δηλαδή, η (s_n) είναι άνω φραγμένη. $\square$

Άσκηση 6. Υποθέτουμε ότι $\alpha_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ αποκλίνει. Θέτουμε $s_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$.

(α) Αποδείξτε ότι: για $1 \leq m < n$,

$$\frac{\alpha_{m+1}}{s_{m+1}} + \dots + \frac{\alpha_n}{s_n} \geq 1 - \frac{s_m}{s_n}$$

και συμπεράνατε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{s_k}$ αποκλίνει.

(β) Αποδείξτε ότι $\frac{\alpha_n}{s_n^2} \leq \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}$ και συμπεράνατε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{s_k^2}$ συγκλίνει.

Υπόδειξη: (α) Παρατηρούμε ότι η (s_n) είναι αύξουσα. Ήρα, αν $1 \leq m < n$ έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{m+1}}{s_{m+1}} + \dots + \frac{\alpha_n}{s_n} &\geq \frac{\alpha_{m+1}}{s_n} + \dots + \frac{\alpha_n}{s_n} = \frac{\alpha_{m+1} + \dots + \alpha_n}{s_n} \\ &= \frac{s_n - s_m}{s_n} = 1 - \frac{s_m}{s_n}. \end{aligned}$$

Ας υποθέσουμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{s_k}$ συγκλίνει. Από το κριτήριο Cauchy, για $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$, μπορούμε να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: αν $n > m \geq n_0$ τότε

$$\frac{\alpha_{m+1}}{s_{m+1}} + \dots + \frac{\alpha_n}{s_n} < \frac{1}{2},$$

δηλαδή

$$1 - \frac{s_m}{s_n} < \frac{1}{2} \implies \frac{s_m}{s_n} > \frac{1}{2}.$$

Σταθεροποιούμε $m \geq n_0$ και αφήνουμε το $n \rightarrow \infty$. Αφού η $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ αποκλίνει, έχουμε $s_n \rightarrow \infty$. Ήρα, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_m}{s_n} = 0$, το οποίο οδηγεί σε άτοπο.

(β) Παρατηρούμε ότι

$$\frac{\alpha_n}{s_n^2} = \frac{s_n - s_{n-1}}{s_n^2} \leq \frac{s_n - s_{n-1}}{s_n s_{n-1}} = \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}.$$

Αν t_n είναι το n -οστό μερικό άθροισμα της $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{s_k^2}$, τότε

$$t_n = \frac{\alpha_1}{s_1^2} + \frac{\alpha_2}{s_2^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{s_n^2} \leq \frac{1}{s_1} + \left(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n} \right) \leq \frac{2}{s_1}.$$

Η (t_n) είναι άνω φραγμένη, άρα η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{s_k^2}$ συγκλίνει. □

Άσκηση 7. Έστω (α_k) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε ότι αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ αποκλίνει τότε και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} k\alpha_k$ αποκλίνει.

Υπόδειξη: Θέτουμε $b_k = k\alpha_k$. Τότε, θέλουμε να δείξουμε ότι: αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}$ αποκλίνει τότε και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ αποκλίνει.

Παρατηρούμε ότι αν η $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει, τότε έχει φραγμένα μερικά αθροίσματα. Αφού η $\frac{1}{k}$ φθίνει προς το 0, το κριτήριο Dirichlet δείχνει ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}$ συγκλίνει, το οποίο είναι άτοπο. □