

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΝΔΙΑΜΕΣΩΝ ΤΙΜΩΝ

Πρόταση 1. Έστω $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω $\xi \in X$ σημείο συνέχειας της f και $\eta \in \mathbb{R}$.

1. Αν $\eta < f(\xi)$ τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $\eta < f(x)$ για κάθε $x \in X \cap (\xi - \delta, \xi + \delta)$.
2. Αντίστοιχα, αν $f(\xi) < \eta$ τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) < \eta$ για κάθε $x \in X \cap (\xi - \delta, \xi + \delta)$.

Απόδειξη. Το ότι το ξ είναι σημείο συνέχειας της f σημαίνει εξ ορισμού ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ για κάθε $x \in X$ με $|x - \xi| < \delta$ ή ισοδύναμα,

$$f(\xi) - \epsilon < f(x) < f(\xi) + \epsilon, \text{ για κάθε } x \in X \cap (\xi - \delta, \xi + \delta) \quad (1)$$

1. Προκύπτει από την (1) για $\epsilon = f(\xi) - \eta > 0$.
2. Ομοίως για $\epsilon = \eta - f(\xi) > 0$. □

Θεώρημα 2. (Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών) Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(a) \neq f(b)$. Τότε για κάθε η μεταξύ των $f(a)$ και $f(b)$ υπάρχει ξ μεταξύ των a και b τέτοιο ώστε $f(\xi) = \eta$.

Απόδειξη. Έστω ότι $f(a) < f(b)$ (αν $f(b) < f(a)$ τότε θεωρούμε την $-f$) και έστω $f(a) < \eta < f(b)$. Θέτουμε

$$A = \{x \in [a, b] : f(x) < \eta\}.$$

Το A είναι μη κενό ($a \in A$) και άνω φραγμένο (από το b) και άρα από Πληρότητα του $\mathbb{R}$, το A έχει supremum. Έστω $\xi = \sup A$. Έχουμε ότι $\xi \in [a, b]$. Πράγματι, $a \leq \xi$ διότι $a \in A$ και ξ άνω φράγμα του A και $\xi \leq b$ διότι το b είναι άνω φράγμα του A και το ξ είναι το μικρότερο άνω φράγμα του A . Άρα η f ορίζεται στο ξ . Θα δείξουμε ότι οι περιπτώσεις $\eta < f(\xi)$ και $f(\xi) < \eta$ οδηγούν σε άτοπο και άρα η μόνη δυνατότητα είναι να έχουμε $f(\xi) = \eta$.

Πράγματι, αν $\eta < f(\xi)$ τότε από Πρόταση 1 υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $\eta < f(x)$ για κάθε $x \in (\xi - \delta, \xi + \delta) \cap [a, b]$. Άρα, από τον ορισμό του A ,

$$(\xi - \delta, \xi + \delta) \cap A = \emptyset \quad (2)$$

Όμως $\xi = \sup A$ και άρα υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε $\xi - \delta < x \leq \xi$. Άρα $(\xi - \delta, \xi] \cap A \neq \emptyset$, που είναι άτοπο από την (2).

Από την άλλη μεριά αν $f(\xi) < \eta$ τότε (πάλι από την Πρόταση 1), υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) < \eta$ για κάθε $x \in (\xi - \delta, \xi + \delta) \cap [a, b]$. Ισοδύναμα, από τον ορισμό του A ,

$$(\xi - \delta, \xi + \delta) \cap [a, b] \subseteq A \quad (3)$$

Έχουμε $\eta < f(b)$ και άρα $\xi \neq b$. Οπότε $a \leq \xi < b$. Επιπλέον $b \notin A$ και άρα από την (3) θα πρέπει $\xi + \delta < b$. Άρα

$$(\xi, \xi + \delta) \subseteq [a, b] \quad (4)$$

Από τις (3) και (4) προκύπτει ότι $(\xi, \xi + \delta) \subseteq A$. Αλλά τότε το A περιέχει στοιχεία γνήσια μεγαλύτερα του supremum του, άτοπο. □