

ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
 5ο Φυλλάδιο Ασκήσεων (υποδείξεις)

Ασκηση 1. Έστω (α_k) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

(α) Αν $\alpha_k \rightarrow 0$ τότε η ακολουθία $s_n = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ είναι φραγμένη.

(β) Αν η ακολουθία $s_n = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ είναι φραγμένη τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει.

(γ) Αν $\alpha_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και αν $0 < \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} < 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει.

(δ) Αν $\alpha_k \rightarrow 0$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \alpha_k$ συγκλίνει.

(ε) Αν $\alpha_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\alpha_k}$ συγκλίνει.

(στ) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2$ συγκλίνει.

Υπόδειξη: (α) **Λάθος.** Η ακολουθία $\alpha_k = \frac{1}{k} \rightarrow 0$, όμως η ακολουθία $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ δεν είναι φραγμένη (τείνει στο $+\infty$).

(β) **Λάθος.** Αν θεωρήσουμε την ακολουθία $\alpha_k = (-1)^{k-1}$, τότε έχουμε $s_n = 1$ αν ο n είναι περιττός και $s_n = 0$ αν ο n είναι άρτιος. Δηλαδή, η ακολουθία $s_n = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ είναι φραγμένη. Όμως, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}$ αποκλίνει, διότι $\alpha_k \not\rightarrow 0$.

(γ) **Λάθος.** Θεωρήστε την $\alpha_k = \frac{1}{k}$. Τότε, $\alpha_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} = \frac{k}{k+1} < 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Όμως, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει.

(δ) **Λάθος.** Αν θεωρήσουμε την $\alpha_k = \frac{(-1)^k}{k}$, τότε $\alpha_k \rightarrow 0$. Όμως, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \alpha_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει.

(ε) **Λάθος.** Θεωρήστε την $\alpha_k = \frac{1}{k^2}$. Τότε, $\alpha_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει. Όμως, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\alpha_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει.

(στ) **Λάθος.** Από το κριτήριο του Leibniz, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$ συγκλίνει. Όμως, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει. □

Ασκηση 2. Ελέγξτε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

$$(\alpha) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!k!}{(3k)!}, \quad (\beta) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k^3}{4^k}, \quad (\gamma) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^k}{k!}, \quad (\delta) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 \ln k}.$$

Υπόδειξη: (α) Εφαρμόζουμε το κριτήριο λόγου. Είναι

$$\frac{\frac{(k+1)!(k+1)!}{(3k+3)!}}{\frac{k!k!}{(3k)!}} = \frac{(k+1)^2}{(3k+1)(3k+2)(3k+3)} = \frac{k+1}{3(3k+1)(3k+2)} \rightarrow 0 < 1,$$

άρα η σειρά συγχλίνει.

(β) Έχουμε ότι

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left| \frac{(-1)^k k^3}{4^k} \right|} = \frac{1}{4} (\sqrt[k]{k})^3 \rightarrow \frac{1}{4} < 1,$$

άρα η σειρά συγχλίνει από το κριτήριο ρίζας. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε αν χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο λόγου.

(γ) Έχουμε ότι

$$\frac{\frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{k^k}{k!}} = \frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)k^k} = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \rightarrow e > 1,$$

άρα η σειρά αποκλίνει από το κριτήριο λόγου.

(δ) Έχουμε ότι

$$\frac{\frac{1}{k^2 \ln k}}{\frac{1}{k^2}} = \frac{1}{\ln k} \rightarrow 0,$$

άρα, εφαρμόζοντας το οριακό κριτήριο σύγκρισης με την συγχλίνουσα σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$, συμπεραίνουμε ότι η σειρά $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 \ln k}$ συγχλίνει. $\square$

Άσκηση 3. Έστω ότι $\alpha_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγχλίνει, αποδείξτε ότι οι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{1 + \alpha_k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^2}{1 + \alpha_k^2}$$

συγχλίνουν επίσης.

Υπόδειξη: (α) Αφού η $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγχλίνει, έχουμε $\alpha_k \rightarrow 0$. Επομένως, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $k \geq m$,

$0 \leq \alpha_k \leq 1$. Τότε, για κάθε $k \geq m$ έχουμε $0 \leq \alpha_k^2 \leq \alpha_k$. Από το κριτήριο σύγκρισης, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2$ συγχλίνει.

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε το οριακό κριτήριο σύγκλισης: Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγχλίνει, άρα $\alpha_k \rightarrow 0$. Αφού

$$\frac{\alpha_k^2}{\alpha_k} = \alpha_k \rightarrow 0,$$

έπεται ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2$ συγχλίνει.

(β) Παρατηρήστε ότι $0 \leq \frac{\alpha_k}{1 + \alpha_k} \leq \alpha_k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Από το κριτήριο σύγκρισης, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{1 + \alpha_k}$ συγχλίνει.

(γ) Παρατηρήστε ότι $0 \leq \frac{\alpha_k^2}{1 + \alpha_k^2} \leq \alpha_k^2$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Κατόπιν, χρησιμοποιήστε το (α). $\square$

Άσκηση 4. Έστω $(\alpha_k), (\beta_k)$ δύο ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε ότι: αν οι σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2$ και $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2$ συγχλίνουν, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \beta_k$ συγχλίνει απολύτως.

Υπόδειξη: Από την υπόθεση, οι σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2$ και $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2$ συγχλίνουν, άρα η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{2} \alpha_k^2 + \frac{1}{2} \beta_k^2)$ συγχλίνει κι αυτή. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει $|\alpha_k \beta_k| \leq \frac{1}{2} \alpha_k^2 + \frac{1}{2} \beta_k^2$. Από το κριτήριο σύγκρισης, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k \beta_k|$ συγχλίνει. Δηλαδή, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \beta_k$ συγχλίνει απολύτως. $\square$

Άσκηση 5. (α) Έστω (α_k) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k > 1$. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha_k}}$ συγχλίνει.

(β) Εξετάστε αν συγχλίνει η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\frac{1}{k}}}$.

Υπόδειξη: (α) Θεωρούμε $\alpha \in \mathbb{R}$ τέτοιον ώστε $1 < \alpha < s := \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k$. Εφαρμόζοντας τον ορισμό του ορίου ακολουθίας με $\varepsilon = s - \alpha > 0$, βρίσκουμε k_0 τέτοιον ώστε $\alpha_k > \alpha$ για κάθε $k \geq k_0$.

Συνεπώς, για κάθε $k \geq k_0$ έχουμε

$$0 < \frac{1}{k^{\alpha_k}} \leq \frac{1}{k^{\alpha}}.$$

Ο α είναι σταθερός (δεν εξαρτάται από το k) και μεγαλύτερος από 1, άρα η σειρά $\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ συγκλίνει. Από το κριτήριο σύγκρισης, η σειρά $\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha_k}}$ συγκλίνει, άρα και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha_k}}$ συγκλίνει.

(β) Θεωρούμε την $\beta_k = 1/k$. Έχουμε

$$\frac{\alpha_k}{\beta_k} = \frac{k}{k \sqrt[k]{k}} = \frac{1}{\sqrt[k]{k}} \rightarrow 1 > 0.$$

Από το οριακό κριτήριο σύγκρισης, η σειρά αποκλίνει (διότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει). □

Άσκηση 6. Έστω (α_k) φθίνουσα ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε ότι: αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει τότε $k\alpha_k \rightarrow 0$.

Υπόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει, η (s_n) είναι ακολουθία Cauchy. Επομένως, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: αν $n > m \geq n_0$ τότε

$$\alpha_{m+1} + \dots + \alpha_n = |s_n - s_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ειδικότερα, αν $n \geq 2n_0$, παίρνοντας $m = n_0$ και χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι η (α_n) είναι φθίνουσα, έχουμε

$$\frac{\varepsilon}{2} > \alpha_{n_0+1} + \dots + \alpha_n \geq (n - n_0)\alpha_n \geq \frac{n\alpha_n}{2},$$

διότι $n - n_0 \geq \frac{n}{2}$. Δηλαδή, αν $n \geq 2n_0$ έχουμε $n\alpha_n < \varepsilon$. Έπεται ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} (n\alpha_n) = 0$. □

Άσκηση 7. Δίνεται η ακολουθία (α_k) με αναδρομικό τύπο

$$\alpha_{k+1} = \frac{\alpha_k}{2 + \alpha_k^2}, \quad \alpha_1 > 0.$$

Να βρείτε τα όρια των ακολουθιών (α_k) , $(\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k})$ και να μελετήσετε τη σύγκλιση των σειρών

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \alpha_k \quad \text{και} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\alpha_k + \frac{1}{k} \right).$$

Υπόδειξη: Έχουμε ότι $\alpha_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $\alpha_{k+1} = \frac{\alpha_k}{2 + \alpha_k^2} < \alpha_k$. Δηλαδή, η (α_k) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη και άρα συγκλίνουσα. Αν α είναι το όριο της, τότε από τον αναδρομικό τύπο παίρνουμε ότι $\alpha(2 + \alpha^2) = \alpha$ και συνεπώς $\alpha = 0$. Χρησιμοποιώντας πάλι τον αναδρομικό τύπο βρίσκουμε ότι

$$\frac{(k+1)^2 \alpha_{k+1}}{k^2 \alpha_k} = \frac{(k+1)^2}{k^2} \frac{1}{2 + \alpha_k^2} \rightarrow \frac{1}{2} < 1$$

και αυτό με τη σειρά του μας δίνει από το κριτήριο του λόγου ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \alpha_k$ συγκλίνει. Τέλος, αφού η ακολουθία $\alpha_k + \frac{1}{k}$ είναι φθίνουσα και μηδενική, συμπεραίνουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\alpha_k + \frac{1}{k} \right)$ συγκλίνει, από το κριτήριο Leibniz. □