

ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
4ο Φυλλάδιο Ασκήσεων (υποδείξεις)

Ασκηση 1. Έστω $0 < \alpha_1 < \beta_1$. Ορίζουμε αναδρομικά δύο ακολουθίες θέτοντας

$$\alpha_{n+1} = \sqrt{\alpha_n \beta_n} \quad \text{και} \quad \beta_{n+1} = \frac{\alpha_n + \beta_n}{2}.$$

(α) Αποδείξτε ότι η (α_n) είναι αύξουσα και η (β_n) φθίνουσα.

(β) Αποδείξτε ότι οι (α_n) , (β_n) συγκλίνουν και έχουν το ίδιο όριο.

Υπόδειξη: Αποδείξτε διαδοχικά τα εξής:

1. $\alpha_n > 0$ και $\beta_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

2. $\alpha_n \leq \beta_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από τον αναδρομικό ορισμό (ανεξάρτητα μάλιστα από το ποιοί είναι οι α_n και β_n) έχετε

$$\alpha_{n+1} = \sqrt{\alpha_n \beta_n} \leq \frac{\alpha_n + \beta_n}{2} = \beta_{n+1}.$$

3. Η (α_n) είναι αύξουσα. Παρατηρήστε ότι $\alpha_{n+1} = \sqrt{\alpha_n \beta_n} \geq \sqrt{\alpha_n^2} = \alpha_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

4. Η (β_n) είναι φθίνουσα. Παρατηρήστε ότι $\beta_{n+1} = \frac{\alpha_n + \beta_n}{2} \leq \frac{2\beta_n}{2} = \beta_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Από τα παραπάνω, η (α_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη από τον β_1 , ενώ η (β_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη από τον α_1 (εξηγήστε γιατί). Επομένως, υπάρχουν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε $\alpha_n \rightarrow \alpha$ και $\beta_n \rightarrow \beta$. Από την $\beta_{n+1} = \frac{\alpha_n + \beta_n}{2}$ έπεται ότι $\beta = \frac{\alpha + \beta}{2}$, δηλαδή $\alpha = \beta$. $\square$

Ασκηση 2. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω ακολουθίες:

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \\ \beta_n &= \frac{1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^n}{n^n} \\ \gamma_n &= \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \cdots + \frac{1}{(2n)!} \\ \delta_n &= \frac{1}{n^{2/3}} + \frac{1}{(n+1)^{2/3}} + \cdots + \frac{1}{(2n)^{2/3}}. \end{aligned}$$

Υπόδειξη: (α) Παρατηρήστε ότι

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \alpha_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Αφού $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$, συμπεραίνουμε ότι $\alpha_n \rightarrow 1$.

(β) Παρατηρούμε πρώτα ότι

$$1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^n \leq 1 + n^2 + n^3 + \cdots + n^n \leq 1 + n + n^2 + n^3 + \cdots + n^n.$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ για $x = n$, παίρνουμε

$$1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^n \leq 1 + n + n^2 + \cdots + n^n = \frac{n^{n+1} - 1}{n - 1}.$$

Συνεπώς,

$$\beta_n = \frac{1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^n}{n^n} \leq \frac{n^{n+1} - 1}{n^n(n-1)} = \frac{n^{n+1} - 1}{n^{n+1} - n^n} = \frac{1 - \frac{1}{n^{n+1}}}{1 - \frac{1}{n}}.$$

Από την άλλη πλευρά,

$$\beta_n = \frac{1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^n}{n^n} \geq \frac{n^n}{n^n} = 1.$$

Δηλαδή,

$$1 \leq \beta_n \leq \frac{1 - \frac{1}{n^{n+1}}}{1 - \frac{1}{n}}.$$

Από το κριτήριο παρεμβολής έπεται ότι $\beta_n \rightarrow 1$.

(γ) Παρατηρήστε ότι

$$0 < \gamma_n = \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \cdots + \frac{1}{(2n)!} \leq \frac{n+1}{n!}.$$

Από το κριτήριο του λόγου προκύπτει εύκολα ότι $\frac{n+1}{n!} \rightarrow 0$. Συνεπώς, $\gamma_n \rightarrow 0$.

(δ) Παρατηρήστε ότι

$$\delta_n = \frac{1}{n^{2/3}} + \frac{1}{(n+1)^{2/3}} + \cdots + \frac{1}{(2n)^{2/3}} \geq \frac{n+1}{(2n)^{2/3}} > \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{4}} \rightarrow +\infty.$$

Συνεπώς, $\delta_n \rightarrow +\infty$. □

Άσκηση 3. Έστω (α_n) ακολουθία με $\alpha_n \rightarrow \alpha$. Ορίζουμε μια δεύτερη ακολουθία (β_n) θέτοντας

$$\beta_n = \frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{n}.$$

Αποδείξτε ότι $\beta_n \rightarrow \alpha$.

Υπόδειξη: Κάνουμε πρώτα την επιπλέον υπόθεση ότι $\alpha = 0$ και δείχνουμε ότι $\beta_n \rightarrow 0$. Θεωρούμε $\varepsilon > 0$ και βρίσκουμε $n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: για κάθε $n \geq n_1$ ισχύει $|\alpha_n| < \varepsilon/2$. Τότε, για κάθε $n > n_1$ έχουμε

$$|\beta_n| \leq \frac{|\alpha_1 + \cdots + \alpha_{n_1}|}{n} + \frac{n - n_1}{n} \frac{\varepsilon}{2} < \frac{|\alpha_1 + \cdots + \alpha_{n_1}|}{n} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ο αριθμός $A := |\alpha_1 + \cdots + \alpha_{n_1}|$ εξαρτάται από το ε (αφού ο n_1 εξαρτάται από το ε) όχι όμως από το n . Από την Αρχιμήδεια ιδιότητα, υπάρχει $n_2(A) = n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: για κάθε $n \geq n_2$ έχουμε

$$\frac{|\alpha_1 + \cdots + \alpha_{n_1}|}{n} = \frac{A}{n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Αν λοιπόν πάρουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ τότε, για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει η

$$|\beta_n| \leq \frac{A}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Με βάση τον ορισμό, $\beta_n \rightarrow 0$.

Για τη γενική περίπτωση, θεωρήστε την ακολουθία $\alpha'_n := \alpha_n - \alpha$. Τότε, $\alpha'_n \rightarrow 0$. Συνεπώς,

$$\beta_n - \alpha = \frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{n} - \alpha = \frac{(\alpha_1 - \alpha) + \cdots + (\alpha_n - \alpha)}{n} = \frac{\alpha'_1 + \cdots + \alpha'_n}{n} \rightarrow 0.$$

Έπεται ότι $\beta_n \rightarrow \alpha$. □

Άσκηση 4. Έστω (α_n) ακολουθία μη αρνητικών αριθμών και έστω ότι $\lim \alpha_n = \alpha > 0$. Αποδείξτε ότι $\lim \sqrt[n]{\alpha_n} = 1$.

Υπόδειξη: Επιλέγουμε $\varepsilon = \alpha/2 > 0$. Αφού $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha$, υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $|\alpha_n - \alpha| < \alpha/2$. Ισοδύναμα, για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $\alpha/2 < \alpha_n < 3\alpha/2$. Τότε,

$$\sqrt[n]{\alpha/2} < \sqrt[n]{\alpha_n} < \sqrt[n]{3\alpha/2}.$$

Όμως, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\alpha/2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3\alpha/2} = 1$. Τότε, το κριτήριο παρεμβολής μας εξασφαλίζει ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\alpha_n} = 1$. $\square$

Άσκηση 5. (α) Αποδείξτε ότι $n! \geq 2^{n-1}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(β) Αποδείξτε ότι η ακολουθία (s_n) με τύπο

$$s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

είναι φραγμένη.

Υπόδειξη:

(α) Έχουμε ότι

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \geq 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^{n-1} \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

(β) Χρησιμοποιώντας το (α) και τον τύπο για το μερικό άθροισμα της γεωμετρικής σειράς, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\ &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= 1 + \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} \\ &< 1 + 2 = 3 \end{aligned}$$

και συνεπώς η (s_n) είναι φραγμένη.

$\square$

Άσκηση 6. Έστω (β_n) φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών και $|\lambda| < 1$. Αποδείξτε ότι η ακολουθία με τύπο

$$\alpha_n = \beta_1 \lambda + \beta_2 \lambda^2 + \cdots + \beta_n \lambda^n$$

είναι ακολουθία Cauchy.

Υπόδειξη: Αφού η (β_n) είναι φραγμένη υπάρχει $M > 0$, τέτοιο ώστε $|\beta_n| \leq M$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω $m, n \in \mathbb{N}$, με $n > m$ και $\varepsilon > 0$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} |\alpha_n - \alpha_m| &= |\beta_{m+1} \lambda^{m+1} + \beta_{m+2} \lambda^{m+2} + \cdots + \beta_n \lambda^n| \\ &\leq M |\lambda|^{m+1} (1 + |\lambda| + \cdots + |\lambda|^{n-m-1}) \\ &= M |\lambda|^{m+1} \frac{1 - |\lambda|^{n-m}}{1 - |\lambda|} \\ &\leq M |\lambda|^{m+1} \frac{1}{1 - |\lambda|}. \end{aligned}$$

Αν επιλέξουμε n_0 αρκετά μεγάλο ώστε

$$|\lambda|^{n_0+1} < \frac{\varepsilon(1 - |\lambda|)}{M}$$

και αφού $|\lambda| < 1$, βλέπουμε ότι

$$|\alpha_n - \alpha_m| < \varepsilon, \text{ για κάθε } n, m \geq n_0.$$

Συνεπώς, η (α_n) είναι ακολουθία Cauchy.

$\square$

Άσκηση 7. Έστω (α_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών, τέτοια ώστε

$$|\alpha_n - \alpha_{n+1}| \leq \frac{1}{2^n}, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Αποδείξτε ότι η (α_n) συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

Υπόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$ και $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $\frac{1}{2^{n_0-1}} < \varepsilon$. Αν $n, m \in \mathbb{N}$, με $n \geq m \geq n_0$, τότε έχουμε τα εξής

$$\begin{aligned} |\alpha_m - \alpha_n| &\leq |\alpha_m - \alpha_{m+1}| + |\alpha_{m+1} - \alpha_{m+2}| + \cdots + |\alpha_{n-1} - \alpha_n| \\ &\leq \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= \frac{1}{2^m} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-m-1}} \right) \\ &< \frac{1}{2^m} 2 = \frac{1}{2^{m-1}} \leq \frac{1}{2^{n_0-1}} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Επομένως, η (α_n) είναι ακολουθία Cauchy και συμπεραίνουμε ότι συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. $\square$