

Ακολουθίες Cauchy

Πολλές φορές είναι δύσκολο να υπολογίσουμε το όριο μιας ακολουθίας. Πως όμως θα μπορούσαμε να καταλάβουμε αν μια ακολουθία είναι ή δεν είναι συγκλίνουσα χωρίς να βρίσκουμε αν υπάρχει ή όχι το όριό της; Ένας τρόπος είναι να ελέγχουμε αν η ακολουθία μας είναι μονότονη και φραγμένη. Πράγματι, όπως είδαμε κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία είναι συγκλίνουσα. Όμως αν η ακολουθία μας δεν είναι μονότονη τι θα μπορούσαμε να κάνουμε; Μια απάντηση στο ερώτημα αυτό είναι η έννοια της *Cauchy* (ή *βασικής*) ακολουθίας. Πρίν δώσουμε τον ορισμό ας δούμε μια ιδιότητα που έχουν οι συγκλίνουσες ακολουθίες και που έπεται σχεδόν άμεσα από τον ορισμό της σύγκλισης.

Πρόταση 1. Έστω (a_n) συγκλίνουσα ακολουθία. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|a_m - a_n| < \varepsilon$ για όλα τα $m, n \geq n_0$.

Απόδειξη. Έστω a το όριο της (a_n) . Έστω επίσης $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό της σύγκλισης έχουμε ότι για τον θετικό αριθμό $\varepsilon/2$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε όταν $n \geq n_0$ τότε

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ισχυριζόμαστε ότι αυτό συνεπάγεται ότι $|a_n - a_m| < \varepsilon$ για όλα τα $n, m \geq n_0$. Πράγματι, έστω $n, m \geq n_0$. Τότε

$$|a_m - a_n| = |a_m - a + a - a_n| \leq |a_m - a| + |a - a_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Η παραπάνω πρόταση λέει απλά ότι εφόσον η (a_n) συγκλίνει στο a , οι όροι της, όσο μεγαλώνει η τάξη τους, έρχονται κοντά στο a και κατά συνέπεια έρχονται κοντά και μεταξύ τους.

Με βάση τα παραπάνω δίνουμε τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 1. Μια ακολουθία (a_n) καλείται Cauchy ή βασική αν

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ τέτοιο ώστε } |a_n - a_m| < \varepsilon \text{ για όλα τα } n, m \geq n_0.$$

Με τον παραπάνω ορισμό η Πρόταση 1 αναδιατυπώνεται ως εξής.

Πρόταση 2. Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι *Cauchy*.

Θα δούμε ότι ισχύει και το αντίστροφο δηλαδή ισχύει ο επόμενος χαρακτηρισμός συγκλινουσών ακολουθιών που είναι συνέπεια της Ιδιότητας της Πληρότητας του $\mathbb{R}$.

Θεώρημα 3. Μια ακολουθία είναι συγκλίνουσα αν και μόνο αν είναι *Cauchy*.

Απόδειξη. Η κατεύθυνση

$$(a_n) \text{ συγκλίνουσα} \Rightarrow (a_n) \text{ Cauchy}$$

έχει ήδηδειχθεί παραπάνω. Μένει συνεπώς να δειχθεί η αντίστροφη συνεπαγωγή

$$(a_n) \text{ Cauchy} \Rightarrow (a_n) \text{ συγκλίνουσα} \quad (1)$$

Όπως θα δούμε η συνεπαγωγή (1) είναι συνέπεια της Πληρότητας του $\mathbb{R}$. Θα χρειασθούμε επίσης και δύο Λήμματα που παραθέτουμε στην συνέχεια.

Λήμμα 4. Κάθε Cauchy ακολουθία είναι φραγμένη.

Απόδειξη του Λήμματος 4. Η απόδειξη είναι παρόμοια με εκείνη της πρότασης που λέει ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη. Έστω (a_n) ακολουθία Cauchy. Τότε για $\varepsilon = 1$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|a_n - a_m| < 1$ για όλα τα $n, m \geq n_0$. Ειδικότερα,

$$|a_n - a_{n_0}| < 1 \text{ για όλα τα } n \geq n_0 \quad (2)$$

Θέτουμε

$$M = \max\{|a_1|, \dots, |a_{n_0-1}|, |a_{n_0}| + 1\}$$

(αν $n_0 = 1$ τότε θέτουμε απλά $M = |a_{n_0}| + 1$). Ισχυριζόμαστε ότι

$$|a_n| \leq M$$

για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Πράγματι έστω $n \in \mathbb{N}$. Αν $n < n_0$ τότε από τον ορισμό του M έχουμε $|a_n| \leq M$. Αν $n \geq n_0$ τότε από την (2), την τριγωνική ανισότητα και τον ορισμό του M ,

$$|a_n - a_{n_0}| < 1 \Rightarrow |a_n| - |a_{n_0}| < 1 \Rightarrow |a_n| < |a_{n_0}| + 1 \leq M$$

και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. $\square$

Λήμμα 5. Μια Cauchy ακολουθία είναι συγκλίνουσα αν περιέχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία.

Απόδειξη του Λήμματος 5. Έστω (a_n) Cauchy ακολουθία και έστω ότι η (a_n) περιέχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία (a_{k_n}) . Έστω επίσης a το όριο της (a_{k_n}) . Θα δείξουμε ότι $a_n \rightarrow a$. Πράγματι έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή η (a_n) είναι Cauchy υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$|a_n - a_m| < \varepsilon/2 \text{ για όλα τα } n, m \geq n_1 \quad (3)$$

Ισχυριζόμαστε ότι

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ για όλα τα } n \geq n_1 \quad (4)$$

Πράγματι, επειδή $a_{k_n} \rightarrow a$ μπορούμε να επιλέξουμε $n_2 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$|a_{k_n} - a| < \varepsilon/2 \text{ για όλα τα } n \geq n_2 \quad (5)$$

Θέτουμε

$$n_0 = \max\{n_1, n_2\} \text{ και } m_0 = k_{n_0}$$

Τότε $m_0 = k_{n_0} \geq n_0 \geq n_1$ και άρα από την (3) (για $m = m_0$) παίρνουμε

$$|a_n - a_{m_0}| < \varepsilon/2 \text{ για όλα τα } n \geq n_1 \quad (6)$$

Αντίστοιχα, αφού $m_0 = k_{n_0}$ και $n_0 \geq n_2$, η (5) (για $n = n_0$) δίνει

$$|a_{m_0} - a| < \varepsilon/2 \quad (7)$$

Άρα για κάθε $n \geq n_1$ έχουμε

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{m_0}| + |a_{m_0} - a| \stackrel{(6),(7)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

□

Είμαστε τώρα σε θέση να δώσουμε την απόδειξη της συνεπαγωγής (1):

$$\begin{aligned} (a_n) \text{ Cauchy} &\Rightarrow (a_n) \text{ φραγμένη} \quad (\text{Λήμμα 4}) \\ &\Rightarrow \exists (a_{k_n}) \text{ συγκλίνουσα} \quad (\text{Bolzano-Weierstrass}) \\ &\Rightarrow (a_n) \text{ συγκλίνουσα} \quad (\text{Λήμμα 5}) \end{aligned}$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος 3 έχει ολοκληρωθεί. □

Ερώτηση: Γιατί είπαμε ότι η συνεπαγωγή (1) είναι συνέπεια της Πληρότητας του $\mathbb{R}$? Που χρειασθήκαμε την ιδιότητα αυτή?