

ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
 3ο Φυλλάδιο Ασκήσεων (υποδείξεις)

Ασκηση 1. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορίου ακολουθίας, να δείξετε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Υπόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Από την Αρχιμήδεια ιδιότητα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιος ώστε $\frac{1}{n_0} < \varepsilon^2$. Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$0 < \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n_0}} < \varepsilon.$$

□

Ασκηση 2. Για καθεμιά από τις παρακάτω ακολουθίες εξετάστε αν συγκλίνει, και αν ναι, βρείτε το όριό της:

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{3^n}{n!}, & \beta_n &= \frac{2n-1}{3n+2}, & \gamma_n &= n - \sqrt{n^2 - n}, & \delta_n &= \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \\ \varepsilon_n &= (\sqrt[3]{10} - 1)^n, & \zeta_n &= \frac{n^6}{6^n}, & \eta_n &= n^2 \sin\left(\frac{1}{n^3}\right), & \theta_n &= \frac{\sin n}{n} \\ \kappa_n &= \frac{2^n \cdot n!}{n^n}, & \nu_n &= \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}, & \rho_n &= \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n, & \sigma_n &= \frac{n^2}{3n^2 + n + 1} \\ \tau_n &= \frac{3^n \cdot n!}{n^n}, & \xi_n &= \frac{\sin(n^3)}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Υπόδειξη: (α) $\alpha_n = \frac{3^n}{n!}$: με το κριτήριο του λόγου. Παρατηρήστε ότι $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{3}{n+1} \rightarrow 0 < 1$, άρα $\alpha_n \rightarrow 0$.

(β) $\beta_n = \frac{2n-1}{3n+2} = \frac{2-1/n}{3+2/n} \rightarrow \frac{2}{3}$.

(γ) $\gamma_n = n - \sqrt{n^2 - n} = \frac{n}{n + \sqrt{n^2 - n}} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 - 1/n}} \rightarrow \frac{1}{2}$.

(δ) $\delta_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$: Παρατηρήστε ότι

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \leq e,$$

διότι $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη από τον e . Παίρνοντας n -οστές ρίζες βλέπουμε ότι

$$1 + \frac{1}{n} \leq \delta_n \leq \sqrt[n]{e}.$$

Από το κριτήριο ισοσυγκλινουσών ακολουθιών, $\delta_n \rightarrow 1$ (αφού $1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1$ και $\sqrt[n]{e} \rightarrow 1$).

Αλλιώς: παρατηρήστε ότι $x_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \rightarrow e$ ως υπακολουθία της $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Τότε,

$$\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = \sqrt[n]{x_n} \rightarrow 1.$$

Εδώ χρησιμοποιούμε και το εξής: αν $x_n > 0$ και $x_n \rightarrow x > 0$ τότε $\sqrt[n]{x_n} \rightarrow 1$ (άσκηση).

(ε) $\varepsilon_n = (\sqrt[3]{10} - 1)^n$: με το κριτήριο της ρίζας. Παρατηρήστε ότι $\sqrt[3]{\varepsilon_n} = \sqrt[3]{10} - 1 \rightarrow 1 - 1 = 0 < 1$. Έπεται ότι $\varepsilon_n \rightarrow 0$.

(ζ) $\zeta_n = \frac{n^6}{6^n}$: με το κριτήριο του λόγου. Παρατηρήστε ότι $\frac{\zeta_{n+1}}{\zeta_n} = \frac{1}{6} \left(\frac{n+1}{n}\right)^6 \rightarrow \frac{1}{6} < 1$. Έπεται ότι $\zeta_n \rightarrow 0$.

(η) $\eta_n = n^2 \sin\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Χρησιμοποιώντας την $0 < \sin t \leq t$ για $t \in (0, \pi/2)$, βλέπουμε ότι $0 < \eta_n \leq n^2 \cdot \frac{1}{n^3} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$. Συνεπώς, $\eta_n \rightarrow 0$.

(θ) $\theta_n = \frac{\sin n}{n}$: $\eta(\sin n)$ είναι φραγμένη απολύτως από 1 και $\eta\left(\frac{1}{n}\right)$ μηδενική. Συνεπώς, $\theta_n \rightarrow 0$.

(κ) $\kappa_n = \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$: παρατηρήστε ότι

$$\frac{\kappa_{n+1}}{\kappa_n} = \frac{2n^n}{(n+1)^n} = 2/\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \rightarrow \frac{2}{e} < 1.$$

Συνεπώς, $\kappa_n \rightarrow 0$.

(ν) $\nu_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}$: παρατηρήστε ότι

$$\nu_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/\sqrt{n}} + 1} \rightarrow \frac{1}{2}$$

(ρ) $\rho_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$: Παρατηρήστε ότι

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} \leq e,$$

διότι $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη από τον e . Παίρνοντας τετραγωνικές ρίζες βλέπουμε ότι

$$\sqrt{x_n} \leq \rho_n \leq \sqrt{e}.$$

Από το κριτήριο ισοσυγκλινουσών ακολουθιών, $\rho_n \rightarrow \sqrt{e}$.

(σ) $\sigma_n = \frac{n^2}{3n^2 + n + 1} \rightarrow \frac{1}{3}$.

(τ) $\tau_n = \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$: παρατηρήστε ότι

$$\frac{\tau_{n+1}}{\tau_n} = \frac{3n^n}{(n+1)^n} = 3/\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \rightarrow \frac{3}{e} > 1.$$

Συνεπώς, $\tau_n \rightarrow +\infty$.

(ξ) $\xi_n = \frac{\sin(n^3)}{\sqrt{n}}$: $\eta(\sin(n^3))$ είναι φραγμένη απολύτως από 1 και $\eta\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ μηδενική. Συνεπώς, $\xi_n \rightarrow 0$. □

Άσκηση 3. Έστω α, β θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\alpha^n + \beta^n}.$$

Υπόδειξη: Έχουμε ότι αν $\gamma = \max\{\alpha, \beta\}$, τότε

$$\gamma = \sqrt[n]{\gamma^n} \leq \sqrt[n]{\alpha^n + \beta^n} \leq \sqrt[n]{2\gamma^n} = \gamma \sqrt[n]{2},$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς (και αφού $\sqrt[n]{2} \rightarrow 1$) έχουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\alpha^n + \beta^n} = \max\{\alpha, \beta\}.$$

□

Άσκηση 4. Αποδείξτε ότι η ακολουθία $y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. Υπόδειξη: Εξετάστε πρώτα αν $\eta(y_n)$ είναι μονότονη.

Υπόδειξη: Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0, \end{aligned}$$

άρα η (y_n) είναι γνησίως αύξουσα. Επίσης,

$$y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} < 1,$$

αφού το άθροισμα που ορίζει τον y_n έχει n προσθετέους το πολύ ίσους με $\frac{1}{n+1}$. Συνεπώς, η (y_n) είναι άνω φραγμένη. Από το θεώρημα σύγκλισης μονότονων ακολουθιών, η (y_n) συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. $\square$

Άσκηση 5. (α) Έστω A μη κενό, άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και έστω $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι « $x = \sup A$ $\iff$ ο x είναι άνω φράγμα του A και υπάρχει ακολουθία στοιχείων του A που συγκλίνει στο x ».

(β) Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει ακολουθία ρητών αριθμών που συγκλίνει στον x και ακολουθία αρρήτων που συγκλίνει στον x . [Υπόδειξη: να χρησιμοποιήσετε την πυκνότητα των ρητών και των αρρήτων στο $\mathbb{R}$.]

Υπόδειξη: (α) ($\implies$) Ο x είναι το $\sup A$, άρα είναι άνω φράγμα του A . Επίσης, από τον ε -χαρακτηρισμό του supremum, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $a \in A$ ώστε $x - \varepsilon < a \leq x$. Εφαρμόζοντας διαδοχικά το παραπάνω για $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$, βρίσκουμε ακολουθία (a_n) στοιχείων του A με $a - \frac{1}{n} < a_n \leq a$. Από το κριτήριο των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών, $a_n \rightarrow a$.

($\impliedby$) Ο x είναι άνω φράγμα του A . Γνωρίζουμε επίσης ότι υπάρχει ακολουθία (a_n) στοιχείων του A ώστε $a_n \rightarrow x$. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει n_0 ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να έχουμε $a_n \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Ειδικότερα, για τον $a_{n_0} \in A$ ισχύει ότι $x - \varepsilon < a_{n_0} \leq x$. Από τον ε -χαρακτηρισμό του τλσμπρεμυ έχουμε ότι $x = \sup A$.

(β) Έστω $x \in \mathbb{R}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $q_n \in \mathbb{Q}$ και $\xi_n \notin \mathbb{Q}$ που ικανοποιούν τις $x - \frac{1}{n} < q_n < x$ και $x - \frac{1}{n} < \xi_n < x$ (από την πυκνότητα των ρητών και των αρρήτων μπορούμε να βρούμε ρητό και άρρητο στο $(x - \frac{1}{n}, x)$).

Από το κριτήριο των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών συμπεραίνουμε ότι $q_n \rightarrow x$ και $\xi_n \rightarrow x$. $\square$

Άσκηση 6. Ορίζουμε μια ακολουθία (a_n) με $a_1 = 1$ και

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + 1}{a_n + 1}, \quad n \geq 1.$$

Εξετάστε αν συγκλίνει.

Υπόδειξη: Παρατηρήστε πρώτα ότι, αν η (a_n) συγκλίνει τότε το όριο της θα ικανοποιεί την $x = \frac{2x+1}{x+1}$ (εξηγήστε γιατί). Συνεπώς $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ή $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Αποδείξτε διαδοχικά τα εξής:

1. Η (a_n) ορίζεται καλά. Αρκεί να δείξετε ότι $a_n \neq -1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε με επαγωγή ότι $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
2. Η (a_n) είναι αύξουσα (με επαγωγή). Παρατηρήστε ότι αν $a_m \leq a_{m+1}$ τότε

$$a_{m+2} - a_{m+1} = \frac{a_{m+1} - a_m}{(a_{m+1} + 1)(a_m + 1)} \geq 0.$$

3. Η (a_n) είναι άνω φραγμένη (με επαγωγή). Παρατηρήστε ότι

$$a_{m+1} = \frac{2a_m + 1}{a_m + 1} \leq \frac{2a_m + 2}{a_m + 1} = 2$$

για κάθε m . Θα μπορούσατε επίσης να δείξετε ότι $a_m \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ για κάθε m (αφού, από τα παραπάνω, αυτό είναι το «υποψήφιο όριο» της αύξουσας ακολουθίας (a_n)).

Αφού η (a_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, συγκλίνει (στον $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$). □

Άσκηση 7. Έστω $a > 0$. Θεωρούμε τυχόν $x_1 > 0$ και για κάθε $n \geq 1$ ορίζουμε

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right).$$

Αποδείξτε ότι η (x_n) , τουλάχιστον από τον δεύτερο όρο της και πέρα, είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη από τον $\sqrt{a}$. Βρείτε το $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Υπόδειξη: Αποδείξτε διαδοχικά τα εξής:

1. Η (x_n) ορίζεται καλά. Αρκεί να δείξετε ότι $x_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε με επαγωγή ότι $x_n > 0$ για κάθε n .

2. Για κάθε $n \geq 2$ ισχύει $x_n \geq \sqrt{a}$ (με επαγωγή). Παρατηρήστε ότι

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) \geq \sqrt{x_n \cdot \frac{a}{x_n}} = \sqrt{a}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

3. Για κάθε $n \geq 2$ ισχύει $x_n \geq x_{n+1}$ (με επαγωγή). Παρατηρήστε ότι

$$x_n - x_{n+1} = \frac{x_n^2 - a}{2x_n} \geq 0$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Αφού η $(x_n)_{n \geq 2}$ είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη, συγκλίνει. Το όριο x είναι θετικό (από τα προηγούμενα έχουμε $x \geq \sqrt{a}$) και πρέπει να ικανοποιεί την $x = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right)$, δηλαδή $x^2 = a$. Συνεπώς, $x = \sqrt{a}$. □